

Examen de MATH F-112 de Janvier 2019 – MATHÉMATIQUES

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées**. Répondez à chaque exercice sur la ou les page correspondante(s).

Vous pouvez utiliser uniquement de quoi écrire. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie. **Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.** LE SUJET DOIT RESTER AGRAFÉ: **une copie sans agrafe sera refusée.**

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRÉNOM:

MATRICULE:

SECTION:

Q. Théoriques		/10
Exercice 1		/10
Exercice 2		/10
Exercice 3		/ 12
Exercice 4		/10
Exercice 5		/ 8
Total		/ 60

QUESTIONS THÉORIQUES

- (1) Soient x et y deux nombres réels. Exprimer (sans donner de justification) $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$ en fonction de $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\cos(y)$ et $\sin(y)$.
 - (2) Si \vec{a} et \vec{b} désignent deux vecteurs de l'espace \mathbb{R}^3 , définissez leur produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ et exprimez $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ en fonction de $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ et de l'angle entre \vec{a} et \vec{b} .
-

EXERCICE 1

En utilisant un changement de variable judicieux, calculer

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^t}{e^{2t} - 1} dt.$$

EXERCICE 2

Résoudre, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

EXERCICE 3

On rappelle que la fonction tangente est définie, pour $x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

On rappelle aussi que la fonction tan admet une *fonction réciproque* sur $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, qu'on notera ici arctan:

$$\arctan :] - \infty, +\infty[\rightarrow] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad x \mapsto \arctan(x).$$

(1) Montrer que

$$\tan'(x) = 1 + (\tan(x))^2.$$

(2) Montrer que, pour tout $y \in] - \infty, \infty[$:

$$(\arctan)'(y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

[Indication: utiliser la question 1.]

(3) Donner le polynôme de Taylor d'ordre 2 de la fonction arctan en 0.

EXERCICE 4

Trouver l'équation du plan de \mathbb{R}^3 passant par le point $A = (4, -2, 1)$ et perpendiculaire à la droite d'équations

$$\frac{x - 1}{7} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z - 2}{3}.$$

EXERCICE 5

Résoudre l'équation

$$\log_9(x^3) + 2\log_3\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

FEUILLE DE BROUILLON 1

FEUILLE DE BROUILLON 2

FEUILLE DE BROUILLON 3