Examen de MATH F-112 d'AOÛT 2019 – MODULE S

$\boxed{\text{BA2 GEOL/GEOG}}$

Durée: 3h

Vérifiez que ce sujet correspond à votre section.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées.** Répondez à chaque exercice sur la ou les page correspondante(s).

Vous pouvez utiliser uniquement de quoi écrire. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie. **Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.** LE SUJET DOIT RESTER AGRAFÉ: **une copie sans agrafe sera refusée.**

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRÉNOM:

MATRICULE:

Exercice 1		/10
Exercice 2		/10
Exercice 3		/ 10
Total		/ 30

EXERCICE 1

(a) On considère le champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donné par

$$f(x, y) = (x^2 \cos y, \sin x + e^y).$$

Calculer la divergence $\mathrm{div} f$ de f et montrer que le laplacien ΔF du champ scalaire $F = \mathrm{div} f$ vaut $e^y - 2x \cos y$.

(b) Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ délimitée par une courbe fermée simple C. On rappelle que l'aire de A est donnée par la formule $\mathcal{A}(A) = \iint_A 1 \mathrm{d}S$ où 1 désigne le champ scalaire valant 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$.

(i) Montrer, grâce au Théorème de Green, que

$$\mathcal{A}(A) = \frac{1}{2} \oint_C (-y, x) \cdot \mathrm{d}\ell.$$

(ii) En déduire que l'aire du disque de centre $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$ vaut πR^2.

EXERCICE 2

(a) On considère la suite (x_n) donnée par

$$x_n = \frac{n-1}{n+3}$$

pour tout $n \geq 1$. La série $\sum_{n\geq 1} x_n$ est-elle convergente ?

(b) On considère maintenant la suite (y_n) donnée par

$$y_n = \frac{n-1}{n^3+3n^2}$$

pour tout $n \geq 1$.

(i) Montrer que la suite (y_n) converge vers 0.

(ii) La série $\sum_{n\geq 1} y_n$ est-elle convergente ? absolument convergente ?

EXERCICE 3

Soit L l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par $L(x,y) = (x, 2x-y)$.

(a) Montrer que la matrice de L dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Prouver que les valeurs propres de L sont -1 et 1, déterminer les sous-espaces propres associées et justifier que L est diagonalisable.

(c) L'application linéaire L est-elle inversible ? Justifier votre réponse.

(d) Déterminer une matrice P inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(e) En déduire les coefficients de la matrice A^{2019}.

FEUILLE DE BROUILLON 1

FEUILLE DE BROUILLON 2

FEUILLE DE BROUILLON 3