Examen de MATH F-112 de JUIN 2019 – PARTIE Q1 DU MODULE T

BA1 BIOL/CHIM/IRBI/SCIE/INFO

Durée: 2h

Vérifiez que ce sujet correspond à votre section.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées.** Répondez à chaque exercice sur la ou les page correspondante(s).

Vous pouvez utiliser uniquement de quoi écrire. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie. **Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.** LE SUJET DOIT RESTER AGRAFÉ: **une copie sans agrafe sera refusée.**

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRÉNOM:

MATRICULE:

Exercice 1		/10
Exercice 2		/10
Exercice 3		/ 10
Exercice 4		/10
Total		/ 40

EXERCICE 1

En utilisant *la méthode du pivot de Gauss* et en justifiant à chaque étape les opérations effectuées, résolvez le système linéaire suivant d'inconnues (x, y, z, t):

$$\begin{cases} x - 2y - t = -5 \\ x - y + z - t = -2 \\ 2x - y + z - 2t = -3 \\ 3x + 3y + 3z - 3t = 0 \end{cases}$$

Correction: On écrit le système sous la forme d'une matrice augmentée:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Les opérations sur les lignes donnent alors:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 9 & 3 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow \frac{1}{3} L_4}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Les deux dernières équations sont incompatibles donc le système n'a pas de solutions.

EXERCICE 2

(1) Soit $R > 0$. Calculer

$$\int_3^R \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 3x + 2}.$$

(2) Est-ce que $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$ existe? (Autrement dit: est-ce que l'intégrale converge?). Si oui, donner sa valeur.
(3) Soit $2 < r < 3$. Calculer $\int_r^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$.
(4) Est-ce que $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$ existe? Si oui, donner sa valeur.

Correction:

(1) Le polynôme de second degré $x^2 - 3x + 2$ a pour racines 1 et 2 et se factorise sous la forme suivante:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

Par le cours, on sait alors que la fraction rationnelle $\frac{1}{x^2-3x+2}$ s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2},$$

où a et b sont deux constantes que nous devons déterminer. On réduit au même dénominateur:

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2) + b(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{(a+b)x - 2a - b}{x^2 - 3x + 2}. \end{aligned}$$

Nous avons donc $a+b=0$ et $-2a-b=1$, ce qui donne alors $b=1$ et $a=-1$. On a donc:

$$\begin{aligned}\int_3^R \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2} &= \int_3^R \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= [\ln(x-2)-\ln(x-1)]_3^R \\ &= \left[\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)\right]_3^R \\ &= \ln\left(\frac{R-2}{R-1}\right)-\ln(\frac{1}{2}) \\ &= \ln\left(\frac{R-2}{R-1}\right)+\ln 2.\end{aligned}$$

(2) Par définition, $\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$ existe si $\int_3^R\frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$ a une limite lorsque R tend vers $+\infty$, et dans ce cas la valeur de $\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$ est cette limite. Comme

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R-2}{R-1}=1,$$

par la question précédente et la règle de composition des limites on a

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int_3^R\frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=\ln 2.$$

(3) **On connaît déjà une primitive de $\frac{1}{x^2-3x+2}$ qu'on a calculée à la question** (1) **donc on réutilise le calcul ici:**

$$\begin{aligned}\int_r^3\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2} &= \left[\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)\right]_r^3 \\ &= -\ln 2+\ln\left(\frac{r-1}{r-2}\right)\end{aligned}$$

(4) Comme $\lim_{r\to 2}\ln\left(\frac{r-1}{r-2}\right)=+\infty$ l'intégrale $\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$ n'existe pas.

EXERCICE 3

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Correction:
On définit, pour tout entier $n \geq 0$, la proposition suivante:

$$\mathrm{P(n)} : \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Initialisation: d'un côté, $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0$. D'un autre côté, $\frac{0^2\times(0+1)^2}{4} = 0$. Ces deux quantités sont égales, et donc $P(0)$ est vraie.

Étape de récurrence: supposons que la propriété $P(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geq 0$. On veut montrer que $P(n+1)$ est encore vraie, et donc on calcule la somme de gauche:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3,\end{aligned}$$

où pour écrire cette dernière égalité on a utilisé l'hypothèse de récurrence. On continue alors le calcul:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2 \left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] \\
&= (n+1)^2 \times \frac{n^2+4n+4}{4} \\
&= (n+1)^2 \times \frac{(n+2)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est démontrée.

EXERCICE 4

On rappelle que les fonctions *sinus et cosinus hyperbolique* sont données, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$$

(2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sinh'(x) = \cosh(x) \quad \text{et} \quad \cosh'(x) = \sinh(x).$$

(3) On admet que $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une fonction réciproque, notée $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(4) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Correction:

(1) On calcule:

$$\begin{aligned}\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4}\\ &= \frac{4}{4} = 1.\end{aligned}$$

(2) Comme la dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $-e^{-x}$ il sort:

$$\sinh'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x),$$

et de même pour la dérivée de $\cosh(x)$.

(3) Par la formule de la dérivée des fonctions réciproques on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{argsh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{argsh}(x))}.$$

En utilisant la question (1) on trouve:

$$\cosh(\operatorname{argsh}(x))^2 - \sinh(\operatorname{argsh}(x))^2 = 1,$$

et comme par définition $\sinh(\operatorname{argsh}(x)) = x$ on trouve

$$\cosh(\operatorname{argsh}(x)) = \sqrt{x^2+1}.$$

La dérivée de argsh est alors:

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(4) On calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$: par la dérivée des fonctions composées on trouve:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) &= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1} \times \frac{x^2+1-x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1-x\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}-x(x^2+1)+x(x^2+1)-x^2\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^2-x^2(x^2+1)} \\
&= \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}-x^2\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^2-x^2(x^2+1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{(x^2+1)(x^2+1)-x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^2-x^2(x^2+1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}$$

Les deux fonctions considérées ont même dérivée donc sont égales à une constante près. Comm elles valent toutes les deux 0 en 0 elles sont donc égales.