Examen de MATH F-112 de JUIN 2019 – PARTIE Q2 DU MODULE T

Durée: 1h30

Vérifiez que ce sujet correspond à votre section.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées.** Répondez à chaque exercice sur la ou les page correspondante(s).

Vous pouvez utiliser uniquement de quoi écrire. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie. **Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.** LE SUJET DOIT RESTER AGRAFÉ: **une copie sans agrafe sera refusée.**

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRÉNOM:

MATRICULE:

Exercice 1		/10
Exercice 2		/10
Total		/ 20

EXERCICE 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}.$$

(1) Calculer le gradient de f et la matrice Hessienne de f en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(2) Déterminer tous les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$. Pour chaque point critique, déterminer sa nature (c'est-à-dire: dire si c'est ou non un maximum local ou un minimum local).
(3) Soit $R > 0$. On note C la région de l'espace $\mathbb{R}^3$ égale à l'intersection entre le demi-cylindre $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ et la région située en-dessous du graphe de la fonction f.

Calculer le volume de C.

Correction:

(1) Le gradient est le vecteur de $\mathbb{R}^2$ composé des dérivées partielles de f:

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big).$$

En dérivant d'abord par rapport à x (en considérant y comme une constante) et ensuite par rapport à y on trouve:

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}\Big).$$

La matrice Hessienne est la matrice formée par les dérivées partielles secondes:

$$\mathrm{Hess}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

En dérivant les expressions des dérivées partielles précédentes on trouve alors:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-2}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2+y^2)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{-2}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{8y^2}{(1+x^2+y^2)^3}
\end{aligned}$$

(2) On rappelle que $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique pour f si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Avec l'expression trouvée ci-dessus on a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ \dfrac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0).$$

Le point $(0,0)$ est donc le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$. En remplaçant x et y respectivement par 0 et 0 dans l'expression de la Hessienne de f, la matrice Hessienne de f en $(0,0)$ vaut:

$$\mathrm{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice vaut 4, qui est strictement positif. Comme -2 est strictement négatif, $(0,0)$ est un minimum local de f sur $\mathbb{R}^2$ (et en particulier un minimum global, car c'est le seul point critique).

(3) Par définition, le volume de la région C est donné par la double intégrale:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(C) &= \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} \frac{1}{1+x^2+y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

On calcule cette intégrale avec un changement de coordonnées polaires (ρ, θ), où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Le domaine sur lequel on intègre devient dans ces coordonnées:

$$\left\{0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi\right\}.$$

L'élément de volume se transforme comme $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$, de sorte que le volume de C se calcule comme:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(C) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_0^R \frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho \\
&= \left[\pi \ln(1+\rho^2)\right]_0^R \\
&= \pi \ln(1+R^2).
\end{aligned}$$

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle suivante, définie sur $\mathbb{R}$:

$$y' - 5x^4y = 5x^4.$$

(1) Donner toutes les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation homogène

$$y' - 5x^4y = 0.$$

(2) Donner une solution particulière de l'équation

$$y' - 5x^4y = 5x^4.$$

(3) Résoudre les problèmes de Cauchy suivants:

$$\begin{cases} y' - 5x^4y = 5x^4 \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y' - 5x^4y = 5x^4 \\ y(0) = -1 \end{cases}.$$

On considère maintenant l'équation différentielle suivante, définie sur $\mathbb{R}$:

$$y'' - 2y' + y = 3e^x.$$

(4) Donner toutes les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation homogène

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

(5) Montrer que, pour une certaine valeur de β qu'on déterminera, la fonction $x \mapsto \beta x^2 e^x$ est une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + y = 3e^x.$$

(6) Donner alors toutes les solutions de l'équation

$$y'' - 2y' + y = 3e^x.$$

Correction

(1) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors

$$y' - 5x^4y = 0 \iff \frac{y'}{y} = 5x^4 \iff \int \frac{y'}{y}\mathrm{d}x = \int 5x^4\mathrm{d}x \iff \ln|y| = x^5 + C$$

pour une constante $C \in \mathbb{R}$. Ceci donne donc:

$$|y| = e^C e^{x^5} = C' e^{x^5}$$

et donc

$$y = C'e^{x^5}$$

pour une contante $C' \in \mathbb{R}$.

(2) Pour ce genre d'équations on commence toujours par chercher une solution constante. Dans ce cas $y(x) = a$ est solution si et seulement si

$$-5x^4 a = 5x^4 \iff a = -1.$$

$y(x) = -1$ est donc une solutions constante de l'équation. Sinon la méthode de la variation des constantes permet de retrouver cette solution particulière.

(3) La solution générale de l'équation différentielle $y' - 5x^4 y = 5x^4$ est donc donnée par:

$$y(x) = -1 + C'e^{x^5}$$

pour $C' \in \mathbb{R}$.

Si on impose $y(0) = 3$ on a alors $3 = y(0) = -1 + C'$ et donc $C' = 4$. La solution du premier problème de Cauchy est donc

$$y(x) = -1 + 4e^{x^5}.$$

Si on impose en revanche $y(0) = -1$ on a alors $-1 = y(0) = -1 + C'$ et donc $C' = 0$. La solution du deuxième problème de Cauchy est donc

$$y(x) = -1.$$

(4) L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

dont 1 est **une racine double.** La solution générale de l'équation homogène est ainsi donnée par:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

pour deux constante C_1 et C_2.

(5) Soit $y_0(x) = \beta x^2 e^x$. Alors:

$$y_0'(x) = \beta(2x + x^2)e^x,$$
$$y_0''(x) = \beta(2 + 4x + x^2)e^x.$$

Ainsi, y_0 est solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = 3e^x$ si et seulement si:

$$\beta(2 + 4x + x^2)e^x - 2\beta(2x + x^2)e^x + \beta x^2 e^x = 3e^x$$
$$\iff e^x \left(2\beta + 4\beta x - 4\beta x + \beta x^2 - 2\beta x^2 + \beta x^2\right) = 3e^x$$
$$\iff 2\beta e^x = 3e^x \iff \beta = \frac{3}{2}.$$

La solution particulière cherchée est ainsi

$$y_0(x) = \frac{3}{2}x^2 e^x.$$

(6) Toutes les solutions de l'équation $y'' - 2y' + y = 3e^x$ sont alors données par:

$$y(x) = \frac{3}{2}x^2 e^x + C_1 e^x + C_2 x e^x.$$