Examen de MATH F-112 d'AOÛT 2019 – MODULE SI ET PARTIE Q2 DU MODULE T

BA1 INFO

Durée: 2h

Vérifiez que ce sujet correspond à votre section.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées.** Répondez à chaque exercice sur la ou les page correspondante(s).

Vous pouvez utiliser uniquement de quoi écrire. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie. **Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.** LE SUJET DOIT RESTER AGRAFÉ: **une copie sans agrafe sera refusée.**

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRÉNOM:

MATRICULE:

Exercice 1		/10
Exercice 2		/10
Exercice 3		/ 10
Exercice 4		/10
Exercice 5		/ 10
Total		/ 50

EXERCICE 1

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 - (4+2i)z + 12 + 4i = 0.$$

(2) Déterminer, sous forme exponentielle, tous les nombres complexes z vérifiant
$$z^4 = 16i.$$

(3) Soit $x = 1 + i$. Déterminer l'entier naturel n pour lequel on a
$$x^n = -64.$$

EXERCICE 2

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2).$$

(1) Calculer les dérivées partielles premières de f, par rapport à x et y, en un point (x, y) donné.

(2) Soit $R > 0$. On note D_R le disque de $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon R. Montrer que

$$\int_{D_R} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi \int_0^{R^2} \ln(1 + u)\mathrm{d}u.$$

(3) En déduire alors la valeur de

$$\int_{D_R} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

EXERCICE 3

(1) Montrer que la partie suivante est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}_5)^3$:

$$B = \{(1,2,4),(1,1,1),(0,3,0)\}.$$

(2) Déterminer les composantes d'un vecteur quelconque (x,y,z) de $(\mathbb{Z}_5)^3$ dans la base B ci-dessus.

EXERCICE 4

Considérons l'application linéaire définie par

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (-x, y + 2z, y)$$

(1) Déterminer M, la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(2) La matrice M est-elle inversible? Si oui, donner l'inverse. L'application linéaire f est-elle injective, surjective, bijective?
(3) Déterminer toutes les valeurs propres de M.
(4) Trouver la matrice $P \in Mat(3 \times 3; \mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}.M.P$ soit diagonale ET donner la matrice diagonale.

EXERCICE 5

(1) Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
(2) Soient V et W deux espaces vectoriels sur le corps K. Définir le rang ET le noyau d'une application linéaire $f : V \to W$.
(3) Compléter la proposition suivante (sans justification) :

Soient V et W deux espaces vectoriels sur le corps K et $f : V \to W$ une application linéaire. Alors $Ker(f) = \{0_V\}$ si et seulement si ....

FEUILLE DE BROUILLON 1

FEUILLE DE BROUILLON 2

FEUILLE DE BROUILLON 3