Examen de MATH F-112 de JUIN 2019 – MODULE SI ET PARTIE Q2 DU MODULE T

$\boxed{\text{BA1 INFO}}$

Durée: 2h

Vérifiez que ce sujet correspond à votre section.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées.** Répondez à chaque exercice sur la ou les page correspondante(s).

Vous pouvez utiliser uniquement de quoi écrire. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie. **Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.** LE SUJET DOIT RESTER AGRAFÉ: **une copie sans agrafe sera refusée.**

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRÉNOM:

MATRICULE:

Exercice 1		/10
Exercice 2		/10
Exercice 3		/ 10
Exercice 4		/10
Exercice 5		/ 10
Total		/ 50

EXERCICE 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}.$$

(1) Calculer le gradient de f et la matrice Hessienne de f en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Déterminer tous les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$. Pour chaque point critique, déterminer sa nature (c'est-à-dire: dire si c'est ou non un maximum local ou un minimum local).

(3) Soit $R > 0$. On note C la région de l'espace $\mathbb{R}^3$ égale à l'intersection entre le cylindre $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leq R^2\}$ et la région située en-dessous du graphe de la fonction f.

Calculer le volume de C.

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle suivante, définie sur $\mathbb{R}$:

$$y' - 5x^4 y = 5x^4.$$

(1) Donner toutes les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation homogène

$$y' - 5x^4 y = 0.$$

(2) Donner une solution particulière de l'équation

$$y' - 5x^4 y = 5x^4.$$

(3) Résoudre les problèmes de Cauchy suivants:

$$\begin{cases} y' - 5x^4 y = 5x^4 \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y' - 5x^4 y = 5x^4 \\ y(0) = -1 \end{cases}.$$

On considère maintenant l'équation différentielle suivante, définie sur $\mathbb{R}$:

$$y'' - 2y' + y = 3\exp(x).$$

(4) Donner toutes les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation homogène

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

(5) Montrer que, pour une certaine valeur de β qu'on déterminera, la fonction $x \mapsto \beta x^2 \exp(x)$ est une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + y = 3\exp(x).$$

(6) Donner alors toutes les solutions de l'équation

$$y'' - 2y' + y = 3\exp(x).$$

EXERCICE 3

Considérons l'application linéaire définie par

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 : (x, y, z) \mapsto (x - y + 2z, x + 2y + z, x + 5y, -x - 5y)$$

(1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.
(2) Déterminer le noyau de f.
(3) Trouver une base pour le noyau de f et en déduire sa dimension.
(4) Utiliser (3) pour donner le rang de f.
(5) L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

EXERCICE 4

(1) Soit V, W deux espaces vectoriels sur le corps K. Soit $f : V \to W$ une application linéaire. Donner les définitions de valeur propre ET vecteur propre de f .

(2) Soit la matrice réelle

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Quelles sont les valeurs propres de la matrice M ?

   (b) Calculer M^{97} (vous pouvez laisser les valeurs sous forme exponentielle) .

EXERCICE 5

Soit $X = \{v_1, ..., v_m\}$ un ensemble de vecteurs non nuls dans $\mathbb{R}^n$. Laquelle des deux implications ci-dessous est vraie et laquelle est fausse? Démontrer celle qui est vraie et donner un contre-exemple pour celle qui est fausse (avec justifications).

(1) Si les vecteurs $\{v_1, ..., v_m\}$ sont deux à deux orthogonaux alors l'ensemble X forme une partie libre de $\mathbb{R}^n$.

(2) Si X est une partie libre de $\mathbb{R}^n$ alors les vecteurs $\{v_1, ..., v_m\}$ sont deux à deux orthogonaux.

FEUILLE DE BROUILLON 1

FEUILLE DE BROUILLON 2

FEUILLE DE BROUILLON 3