MATH–F112 BA1 Mathématiques Générales
Module S

Question 1. On considère le champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donné par

$$f(x, y) = (xy^3, -x^2y).$$

Calculer, à l'aide du Théorème de Green, l'intégrale

$$\oint_C f \cdot \mathrm{d}\ell$$

c'est-à-dire l'intégrale curviligne du champ de vecteurs f le long du cercle C de centre $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$, parcouru dans le sens trigonométrique.

Par le théorème de Green on peut écrire

$$\begin{aligned}\oint_C f \cdot \mathrm{d}\ell &= \iint_A \mathrm{rot}\ f\ \mathrm{d}S \\ &= \iint_A (-2xy - 3xy^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -2\iint_A xy\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 3\iint_A xy^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

où A est le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon R délimité par la courbe C.

Pour calculer ces intégrales doubles on peut passer en coordonnées polaires ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$) puisque le domaine d'intégration A est un disque. Celui-ci est décrit alors par les inéquations $0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$. On calcule, en utilisant le théorème de Fubini pour séparer les intégrales, et sans oublier que le changement en coordonnées polaires modifie les infinitésimaux ($\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$) :

$$\begin{aligned}\oint_C f \cdot \mathrm{d}\ell &= -2\iint_A xy\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 3\iint_A xy^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -2\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3\cos\theta\sin\theta\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta - 3\int_0^{2\pi}\int_0^R r^4\cos\theta\sin^2\theta\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= -2\left(\int_0^R r^3\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\right) - 3\left(\int_0^R r^4\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta\right) \\ &= -2\left(\int_0^R r^3\mathrm{d}r\right)\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{2\pi} - 3\left(\int_0^R r^4\mathrm{d}r\right)\left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

puisque $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$.

Question 2. On considère la suite (x_n) donnée par

$$x_n = \frac{3^n}{n!}$$

pour tout $n \geq 1$.

(a) Montrer que la suite (x_n) tends vers 0.

On a

$$0 \leq x_n = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} \leq \frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$$

puisque $3/n \leq 3/4$ dès que $n > 3$. Comme $3/4 < 1$, la suite géométrique $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$ tends vers 0 et donc il en est de même de x_n par le théorème du sandwich.

(b) La série associée

$$\sum_{n \geq 1} \frac{3^n}{n!}$$

est-elle convergente ? absolument convergente ?

La série étant à termes positifs, la convergence absolue est équivalente à la convergence simple. On applique le critère du quotient :

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{3^{n+1} n!}{(n+1)! 3^n} = \frac{3}{n+1} \to 0.$$

Comme $L = \lim \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 0 < 1$ on déduit que la série est convergente absolument (et aussi simplement).

Question 3. Soit L l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par $L(x, y, z) = (2x - z, y - z, 3z)$.

(a) Déterminer la matrice de L dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On trouve $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Calculer les valeurs propres de L et déterminer les sous-espaces propres associées.

On calcule le polynôme caractéristique $P_L(X) = \det(M - XI_3)$ de L. En développant par rapport à la première colonne par exemple on trouve $P_L(X) = (1 - X)(2 - X)(3 - X)$. Les valeurs propres sont donc $1, 2$ et 3.

Le sous-espace propre V_1 associé à la valeur propre 1 est l'ensemble des vecteurs solutions de $L(x, y, z) = (x, y, z)$, ou de manière équivalente telle que $M(x, y, z)^T = 1(x, y, z)^T$. On trouve

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rl} 2x - z & = x \\ y - z & = y \\ 3z & = z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{r} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Donc $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\} = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1, 0) \rangle$.

De même on trouve que $V_2 = \langle (1, 0, 0) \rangle$ et que $V_3 = \langle (2, 1, -2) \rangle$.

(c) L'application linéaire L est-elle diagonalisable ?

Oui. En effet elle admet 3 valeurs propres distinctes et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Si on a oublié cela, on peut aussi dire que la multiplicité (arithmétique) de chaque valeur propre est égale à la dimension de l'espace propre correspondant, ce qui est une CNS à la diagonalisation.

(d) Montrer que le noyau de L est réduit à $\{(0,0,0)\}$. En déduire que L est une application linéaire bijective.

L a déjà 3 vap non nulles donc 0 ne peut donc pas être vap. Alors il n'y a aucun vecteur non nul dans le noyau sinon ce serait un vep pour la vap 0.

Sinon on résout le système

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x - z & = 0 \\ y - z & = 0 \\ 3z & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Donc $\ker L$ est réduit au vecteur neutre, et alors L est injective.

Par le théorème du rang on sait que $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker L + \dim \mathrm{Im}\ L$. Comme $\dim \ker L = 0$ on déduit que $\mathrm{Im}\ L$, l'image de L, est un sev de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. Alors il lui est nécessairement égale et donc L atteint tous les vecteurs de l'espace d'arrivée, i.e. elle est surjective.

(e) Les vecteurs $(2,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(-1,-1,3)$ sont-ils linéairement indépendant ?

Oui. La réponse rapide : ils forment une base de $\mathrm{Im}\ L$ puisque c'est l'image de la base canonique par L qui est bijective. Sinon on résout le système $\alpha(2,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(-1,-1,3) = (0,0,0)$ et on trouve $\alpha = \beta = \gamma = 0$.