MATH-F-112 – MATHÉMATIQUES

L'examen comprend 5 questions valant chacune 10 points.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées**.

Vous pouvez utiliser UNIQUEMENT de quoi écrire.

Répondez à chaque question sur la page correspondante.

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRENOM:

MATRICULE:

SECTION:

Question 1		/10
Question 2		/10
Question 3		/10
Question 4		/10
Question 5		/10
Total		/50

1. (10 points) Prouver l'égalité

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Testons d'abord cette égalité pour $n = 0$. Elle donne $0 = 0$.

Supposons ensuite que l'égalité est vérifiée pour n et montrons qu'alors elle est aussi vérifiée pour $n + 1$.

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= (n+1)^2 + \textstyle\sum_{i=0}^{n} i^2 \\
&= (n+1)^2 + \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= (n+1)\tfrac{6(n+1)+n(2n+1)}{6} \\
&= (n+1)\tfrac{6(n+1)+2n^2+n}{6} \\
&= (n+1)\tfrac{2n^2+7n+6}{6} \\
&= (n+1)\tfrac{(2n+3)(n+2)}{6} \\
&= \tfrac{(2(n+1)+1)(n+1)((n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

2. (10 points) Démontrer que la droite d'équation $2x + y + 3 = 0$ coupe le segment limité par les points $a = (-5, 1)$ et $b = (3, 7)$.

   Le point de coordonnées $(-5, 7)$ est sur la droite. Il est au dessus du point a. Le point de coordonnées $(3, -9)$ est aussi sur la droite. Il est en-dessous de b. La droite doit donc nécessairement couper le segment limité par les points a et b.

3. (10 points) Considérons la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lceil x \rceil - \sqrt{x}.$$

(a) Déterminer en quels points de $\mathbb{R}$ cette fonction est continue.

(b) Etudier la croissance de cette fonction.

(a) Il faut d'abord noter que pour que cette fonction soit définie, il faut que x soit un nombre positif à cause de la racine carrée. Pour tout réel non entier, la fonction f est une différence de fonctions continues, et donc elle est continue. Pour les entiers positifs, la fonction est clairement discontinue car la limite à gauche et la limite à droite diffèrent de 1. La réponse est donc l'ensemble des réels positifs non entiers.

(b) La dérivée ne peut être calculée que pour les points où la fonction est continue. En ces points, le plafond est une constante et donc sa dérivée vaut 0. La dérivée de f est donc $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et la fonction est donc toujours décroissante sur les réels non entiers.

4. (10 points) Calculer en utilisant le développement de Taylor de $y = \sin x$ au voisinage de $x = \pi/6$ une valeur approchée de $\sin 32^o$ (se limiter au terme du second degré).

   L'angle $\pi/6$ est un angle de 30 degrés. $32^o - 30^o = 2^o$. Comme π correspond à 180^o, 2^o correspond à $\pi/90$.

   Le développement de Taylor du 2ème degré de $\sin x$ au voisinage de $\pi/6$ vaut donc

$$\sin(\pi/6) + \cos(\pi/6)(\pi/90) - \sin(\pi/6)(\pi/90)^2/2$$

5. (10 points) Calculer

$$\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{4x}{1+x^2}dx.$$

On pose $t = 1 + x^2$ et donc $dt = 2xdx$. On remplace dans l'intégrale en recalculant les bornes. Quand $x = 0$, $t = 1$ et quand $x = \sqrt{e-1}$, $t = 1 + e - 1 = e$. L'intégrale devient

$$\int_1^e \frac{2}{t}dt = [2\ln|t|]_1^e = 2\ln e - 2\ln 1 = 2.$$