

MATH-F-112 – MATHÉMATIQUES

Module S du Q2

GEOG2 – GEOL2

L'examen comprend 3 questions valant chacune 10 points.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées**.

Vous pouvez utiliser **UNIQUEMENT** de quoi écrire.

Répondez à chaque question sur la page correspondante.

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous **ET** sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRENOM:

MATRICULE:

SECTION:

Question 1		/10
Question 2		/10
Question 3		/10
Total		/30

1. (10 points) On considère le champ de vecteurs f défini sur \mathbb{R}^3 par:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (z + y, y + x, x + z)$$

- (a) Calculer la divergence et le rotationnel de ce champ en un point (x, y, z) quelconque de \mathbb{R}^3
- (b) Calculer le flux de ce champ de vecteurs à travers la sphère S de rayon 1 centrée en l'origine $(0, 0, 0)$ et orientée vers l'extérieur:

$$\iint_S f \cdot dS$$

(Aide: utiliser le théorème de la divergence)

2. (10 points) On considère la suite (x_n) définie par:

$$x_n = \frac{n+1}{n^2 3^n} \text{ pour } n \geq 1$$

- (a) Calculer la limite de cette suite: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$
- (b) On considère maintenant la série correspondante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Cette série est-elle convergente? Est-elle convergente absolument?

3. (10 points) On considère l'opérateur linéaire suivant sur \mathbb{R}^3 :

$$L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (2x, y + z, -x + 3z)$$

- (a) Écrire la matrice de L dans la base canonique de \mathbb{R}^3 ;
- (b) Chercher les valeurs propres de L , et chercher les sous-espaces propres associés;
- (c) Montrer que les vecteurs $(2, 0, -1)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 1, 3)$ sont linéairement indépendants.