MATH-F-112 – MATHÉMATIQUES

Modules T et S du Q2

BIOL1 – CHIM1 – IRBI1 – SCIE1

L'examen comprend 5 questions valant chacune 10 points.
Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées**.
Vous pouvez utiliser UNIQUEMENT de quoi écrire.
Répondez à chaque question sur la page correspondante.
Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRENOM:

MATRICULE:

SECTION:

Question 1		/10
Question 2		/10
Question 3		/10
Question 4		/10
Question 5		/10
Total		/50

1. (10 points) Soit l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x)\sin(x)\cos(x) = e^{\sin^2(x)}.$$

   (a) Trouver une solution particulière de cette équation.

   (b) Résoudre l'équation homogène associée.

   (c) Donner la solution générale de l'équation.

   (d) Résoudre le problème de Cauchy pour $y(1) = 0$.

2. (10 points) Intégrer la fonction $f(x,y) = y + xy$ sur le domaine $D = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq r_0^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ où r_0 est un nombre réel strictement positif.

3. (10 points) On considère le champ de vecteurs f défini sur $\mathbb{R}^3$ par:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (z + y, y + x, x + z)$$

   (a) Calculer la divergence et le rotationel de ce champ en un point (x, y, z) quelconque de $\mathbb{R}^3$

   (b) Calculer le flux de ce champ de vecteurs à travers la sphère S de rayon 1 centrée en l'origine $(0, 0, 0)$ et orientée vers l'extérieur:

$$\oiint_S f.dS$$

   (Aide: utiliser le théorème de la divergence)

4. (10 points) On considère la suite (x_n) définie par:

$$x_n = \frac{n+1}{n^2\, 3^n} \quad \textit{pour } n \geq 1$$

(a) Calculer la limite de cette suite: $\lim_{n\to+\infty} x_n$

(b) On considère maintenant la série correspondante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Cette série est-elle convergente? Est-elle convergente absolument?

5. (10 points) On considère l'opérateur linéaire suivant sur $\mathbb{R}^3$:

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (2x, y + z, -x + 3z)$$

(a) Ecrire la matrice de L dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$;

(b) Chercher les valeurs propres de L, et chercher les sous-espaces propres associés;

(c) Montrer que les vecteurs $(2, 0, -1), (0, 1, 0)$ et $(0, 1, 3)$ sont linéairement indépendants.