Math-F-112 – Mathématiques

Modules T et SI du Q2

INFO1

L'examen comprend 5 questions valant chacune 10 points.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées**.

Vous pouvez utiliser UNIQUEMENT de quoi écrire.

Répondez à chaque question sur la page correspondante.

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRENOM:

MATRICULE:

SECTION:

Question 1		/10
Question 2		/10
Question 3		/10
Question 4		/10
Question 5		/10
Total		/50

1. (10 points) Soit l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x)\sin(x)\cos(x) = e^{\sin^2(x)}.$$

(a) Trouver une solution particulière de cette équation.

(b) Résoudre l'équation homogène associée.

(c) Donner la solution générale de l'équation.

(d) Résoudre le problème de Cauchy pour $y(1) = 0$.

2. (10 points) Intégrer la fonction $f(x, y) = y + xy$ sur le domaine $D = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq r_0^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ où r_0 est un nombre réel strictement positif.

3. (10 points)

   (a) Compléter l'ensemble $\{(1,2,1,2),(1,2,0,1),(1,2,0,0)\}$ afin d'obtenir une base de $(\mathbb{Z}_3)^4$.

   (b) Décomposer la permutation (1357264) en cycles et en transpositions. En déduire si elle est paire ou impaire.

4. (10 points) Considérons l'application linéaire définie par

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (-7x + 5y + 5z, 3y, -10x + 5y + 8z)$$

   (a) Déterminer M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Déterminer toutes les valeurs propres de M.

   (c) Trouver la matrice $P \in Mat(3 \times 3; \mathbb{R})$ inversible, telle que $P^{-1}.M.P$ soit diagonale ET donner la matrice diagonale.

5. (10 points) Soit V, W deux espaces vectoriels de dimension finie sur le corps K et $f : V \to W$ une application linéaire.

   (a) Définir l'image et le noyau de f.

   (b) Démontrer que le noyau de f est un sous-vectoriel de V.

   (c) Enoncer le théorème qui lie la dimension du noyau et de l'image de f.