MATH–F112 BA1 Mathématiques Générales

Module S

Question 1.

(a) On considère le champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donné par

$$f(x, y) = (x^2 \cos y, \sin x + e^y).$$

Calculer la divergence $\mathrm{div} f$ de f, le rotationnel $\mathrm{rot} f$ de f et montrer que le laplacien ΔF du champ scalaire $F = \mathrm{div} f$ vaut $e^y - 2x \cos y$.

On note $f = (f_1, f_2)$ et on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{div} f &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2x \cos y + e^y \\
\mathrm{rot} f &= \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = \cos x + x^2 \sin y \\
\Delta F &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2x \cos y + e^y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(2x \cos y + e^y) \\
&= 0 - 2x \cos y + e^y.
\end{aligned}$$

(b) Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ délimitée par une courbe fermée simple C. On rappelle que l'aire de A est donnée par la formule $\mathcal{A}(A) = \iint_A 1 \mathrm{d}S$ où 1 désigne le champ scalaire valant 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$.

(i) Montrer, grâce au Théorème de Green, que

$$\mathcal{A}(A) = \frac{1}{2} \oint_C (-y, x) \cdot \mathrm{d}\ell.$$

On a

$$\frac{1}{2} \oint_C (-y, x) \cdot \mathrm{d}\ell = \frac{1}{2} \iint_A \mathrm{rot}(-y, x) \mathrm{d}S = \frac{1}{2} \iint_A \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}S = \iint_A 1 \mathrm{d}S.$$

(ii) En déduire que l'aire du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$ vaut πR^2.

On paramétrise le cerle C via $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$ pour $0 \leq t \leq 2\pi$. Alors on peut calculer

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(A) = \frac{1}{2} \oint_C (-y, x) \cdot \mathrm{d}\ell &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-R \sin t, R \cos t) \cdot (-R \sin t, R \cos t) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 (\sin t + \cos t) \mathrm{d}t \\
&= \pi R^2.
\end{aligned}$$

Question 2.

(a) On considère la suite (x_n) donnée par

$$x_n = \frac{n-1}{n+3}$$

pour tout $n \geq 1$. La série $\sum_{n\geq 1} x_n$ est-elle convergente ?

La suite x_n a pour limite 1 puisque

$$x_n = \frac{n-1}{n+3} = \frac{1-1/n}{1+3/n}$$

et que $\lim 1/n = \lim 3/n = 0$. Donc par le critère de divergence grossière la série de terme générale x_n ne converge pas.

(b) On considère maintenant la suite (y_n) donnée par

$$y_n = \frac{n-1}{n^3+3n^2}$$

pour tout $n \geq 1$.

(i) Montrer que la suite (y_n) converge vers 0.

On a

$$y_n = \frac{n-1}{n^3+3n^2} = \frac{n}{n^3}\frac{1-1/n}{1+3/n} = \frac{1}{n^2}\frac{1-1/n}{1+3/n}.$$

Comme $\lim 1/n = \lim 3/n = 0$ on a $\lim \frac{1-1/n}{1+3/n} = 1$. De plus $\lim \frac{1}{n^2} = 0$. Ainsi la suite (y_n) est convergence en tant que produit de deux suites convergentes et sa limite est le produit des limites donc vaut 0.

(ii) La série $\sum_{n\geq 1} y_n$ est-elle convergente ? absolument convergente ?

La suite (y_n) est à terme positif donc la convergence simple est équivalente à la convergence absolue.

De plus la suite (y_n) est équivalente à la suite $(1/n^2)$ en plus l'infini. Par le critère d'équivalence on sait que $\sum_{n\geq 1} y_n$ est convergente ssi $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ est convergente. De plus la série $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ est une série de Riemann avec $\alpha = 2$ donc elle converge car $\alpha > 2$.

Question 3. Soit L l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par $L(x,y) = (x, 2x-y)$.

(a) Montrer que la matrice de L dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcul $L(1,0) = (1,2) = (1,0) + 2(0,1)$ et $L(0,1) = (0,-1) = -(0,1)$.

(b) Prouver que les valeurs propres de L sont -1 et 1, déterminer les sous-espaces propres associées et justifier que L est diagonalisable.

On calcule le polynôme caractéristique $P_L(X) = \det(M - XI_2)$ de L. On trouve $P_L(X) = (1-X)(1+X)$. Les valeurs propres sont donc ± 1.

Le sous-espace propre V_1 associé à la valeur propre 1 est l'ensemble des vecteurs solutions de $L(x,y) = (x,y)$, ou de manière équivalente telle que $M(x,y)^T = 1(x,y)^T$. On trouve

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{cc} x & = x \\ 2x - y & = y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x \in \mathbb{R} \\ x = y \end{array} \right.$$

Donc $V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1) \rangle$.

De même on trouve $V_2 = \langle (0,1) \rangle$.

L est diagonalisable puisque elle admet 2 valeurs propres distinctes et que $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Si on a oublié cela, on peut aussi dire que la multiplicité (arithmétique) de chaque valeur propre est égale à la dimension de l'espace propre correspondant, ce qui est une CNS à la diagonalisation.

(c) L'application linéaire L est-elle bijective ? Justifier votre réponse.

L a déjà 2 vap non nulles donc 0 ne peut donc pas être vap. Alors il n'y a aucun vecteur non nul dans le noyau sinon ce serait un vep pour la vap 0.

Sinon on résout le système

$$\left\{ \begin{array}{cc} x & = 0 \\ 2x - y & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Donc $\ker L$ est réduit au vecteur neutre, et alors L est injective.

Par le théorème du rang on sait que $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \ker L + \dim \operatorname{Im} L$. Comme $\dim \ker L = 0$ on déduit que $\operatorname{Im} L$, l'image de L, est un sev de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Alors il lui est nécessairement égale et donc L atteint tous les vecteurs de l'espace d'arrivée, i.e. elle est surjective.

Donc L est bijective puisque elle injective et surjective.

On peut aussi remarquer que L est son propre inverse puisque $A^2 = I_2$.

(d) Déterminer une matrice P inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On prend la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ construite à partir de vecteurs propres de L correspondant à chaque valeur propre. On vérifie alors que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(e) En déduire les coefficients de la matrice A^{2019}.

On a $A = PDP^{-1}$ donc

$$A^{2019} = PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^{2019}P^{-1}$$

et donc

$$A^{2019} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A.$$

On peut aussi voir que $A^2 = I_2$ et donc que $A^{2019} = A^{2 \cdot 1009 + 1} = (A^2)^{1009} \cdot A = I_2 \cdot A = A$.