

Syllabus d'exercices, MathF112 Module T

Le présent document est le syllabus d'exercices du module T du Cours Math F112 de l'année 2018–2019. Il est tiré du syllabus de J.-P. Doignon pour le cours Math F 107. Je le remercie chaleureusement de m'avoir permis l'accès au « code source » de ce document.

Attention, les numéros et noms des chapitres du présent document ne correspondent pas exactement à ceux du cours.

Table des matières

1	Logique	3
2	Nombres	9
3	Géométrie	13
4	Fonctions	19
5	Trigonométrie	20
6	Limites, asymptotes et continuité	22
7	Fonctions trigonométriques	26
8	Fonctions logarithmes	28
9	Dérivées	32
10	Utilisation des dérivées	39
11	Primitives	44
12	Intégrale de Riemann	51
13	Fonctions vectorielles d'une variable réelle	56
14	Matrices	60
15	Systèmes d'équations linéaires	63
16	Matrices : déterminants et inverses	65

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	2
17 Fonction réelles de plusieurs variables	67
18 Équations différentielles	74
19 Intégrales multiples	80
20 Optimisation à deux variables	82
21 Complexes	83

Chapitre 1

Logique

1.1. Traduisez chacune des affirmations suivantes par une formule logique en utilisant les lettres indiqués et les symboles \rightarrow (« implique »), \vee (« ou »), \wedge (« et ») et, si nécessaire, le symbole \neg (« non »).

- a. Un lapin blanc est toujours gentil. (B,G)
Réponse (exemple) : $B \rightarrow G$ (« être un lapin blanc implique d'être gentil »)
- b. Les paresseux réussiront seulement si les examens sont simples. (R,S)
Réponse (exemple) : $R \rightarrow S$ est une réponse correcte. Une autre réponse correcte est « $\neg S \rightarrow \neg R$ » mais attention !
La réponse $S \rightarrow R$ est fausse ! Le mot « seulement » a ici son importance.
- c. S'il pleut ou neige, le match sera annulé. (P,N,A)
- d. Sauf en cas de vent fort, un tel record est homologué. (V,H)
- e. Deux droites sont parallèles dès qu'elles sont orthogonales à un même plan. (P,O)
- f. Pour que deux vecteurs soient orthogonaux, il faut et il suffit que leur produit scalaire soit nul. (O,N)
- g. La fonction est continue si elle est dérivable. (C,D)
- h. La fonction est intégrable, à moins qu'elle ne soit pas continue. (I,C)
- i. La différentiabilité de f en p_0 entraîne la continuité de f en p_0 . (D,C)
- j. Pour que f admette un extrémum en p_0 , il faut que $\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. (E,N)
- k. Pour qu'il y ait indépendance du chemin, il suffit que certaines conditions techniques soient satisfaites et que le rotationnel soit nul. (I,T,N)
- l. Une condition nécessaire pour qu'il y ait indépendance du chemin est que le champ de vecteurs dérive d'un potentiel scalaire. (I,P)
- m. Une condition suffisante pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable est qu'elle admette n valeurs propres distinctes. (D,V)

1.2. Une énorme quantité de marchandise avait été dérobée dans un magasin. Le voleur (ou les voleurs) s'était enfui en voiture. Trois malfaiteurs notoires A, B, C furent convoqués à Scotland Yard pour y être interrogés. On put établir les faits suivants de façon certaine :

- (1) Nul autre que A, B, C n'avait pu participer au cambriolage.
- (2) C ne faisait jamais un coup sans la complicité de A.
- (3) B ne savait pas conduire.

A était-il innocent ou coupable ?

1.3. Déterminez lesquelles des argumentations suivantes sont correctes.

- a. Luc a reçu une lettre. Si Luc est promu, il doit recevoir une lettre. Donc Luc a été promu.
- b. Si le prix de l'essence augmente, le coût de la vie augmente. Lorsque le coût de la vie augmente, la popularité du gouvernement baisse. Donc, si l'essence devient plus chère, le gouvernement perd en popularité.
- c. Une augmentation du prix du pain ou du thé est prévue. Comme le pain coûte plus cher, le prix du thé est inchangé.
- d. Lise vient de réussir l'interrogation de mathématiques. Lorsque Lise réussit un test, Jacques est heureux. Donc Jacques est heureux.
- e. Cédric se prend pour Napoléon. Seuls les fous se prennent pour Napoléon. Donc Cédric est fou.
- f. Si un nombre est divisible par 4, il est pair. Comme le nombre donné n'est pas divisible par 4, il n'est pas pair.
- g. Si un nombre est divisible par 4, il est pair. Comme le nombre donné n'est pas pair, il n'est pas divisible par 4.

1.4. Traduisez en formules mathématiques les affirmations suivantes.

- a. L'addition de nombres entiers est commutative.
- b. Tout nombre réel strictement supérieur à 1 est inférieur à son carré.

- c. La soustraction de nombres réels n'est pas commutative.
- d. L'addition membre à membre de deux inégalités de même sens fournit encore une inégalité de même sens.

1.5. Parmi les énoncés ci-dessous, lesquels sont équivalents au premier ?

- a. Si $a = b$, alors $N > 0$.
- b. Si $N \leq 0$, alors $a = b$.
- c. Si $N > 0$, alors $a = b$.
- d. Si $a \neq b$, alors $N \leq 0$.
- e. Si $N \leq 0$, alors $a \neq b$.
- f. $N > 0$ est une condition nécessaire pour que a et b soient égaux.
- g. $a = b$ est une condition nécessaire pour que N soit strictement supérieur à 0.
- h. $a = b$ est une condition suffisante pour que N soit strictement supérieur à 0.
- i. Pour que N soit strictement supérieur à 0, il faut que a et b soient égaux.
- j. Pour que N soit strictement supérieur à 0, il faut que a ne soit pas différent de b .

1.6. Lesquelles des formules logiques suivantes sont des tautologies ? (C'est-à-dire sont toujours vraies quelles que soient les valeurs – vrai ou faux – de p et q)

- a. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
- b. $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
- c. $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

1.7. Lesquelles des équivalences suivantes sont correctes ?

- a. $\neg(p \rightarrow q) \iff (p \wedge \neg q)$
- b. $(p \rightarrow q) \iff (q \rightarrow p)$
- c. $(p \wedge q) \iff \neg(\neg q \vee \neg p)$
- d. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \iff ((p \wedge q) \rightarrow r)$

1.8. Lesquelles des implications suivantes sont correctes ?

- a. $((p \rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
- b. $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$
- c. $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow q$

1.9. Démontrez par récurrence (pour n un nombre naturel) :

- a. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- b. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- c. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
- d. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

1.10. Soit a un réel donné et (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2 \cos(a)$ et $u_{p+1} = u_1 u_p - u_{p-1}$ pour $p \geq 1$. Démontrez : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = 2 \cos(na)$

1.11. Soit λ un réel strictement négatif. Est-il vrai que, quels que soient les nombres réels x, y , le maximum de $\lambda \cdot x$ et $\lambda \cdot y$ vaut le produit de λ par le minimum de x et y ?

1.12. Est-il vrai que toute application de \mathbb{R} vers \mathbb{R} est la somme d'une application paire et d'une application impaire (toutes les deux de \mathbb{R} vers \mathbb{R}) ?

1.13. Lesquelles des argumentations suivantes sont correctes ?

- a. La plupart des étudiants pratiquent un sport. Fabrice, qui est étudiant, pratique donc un sport.
- b. Tout étudiant a le droit de vote. Hélène, qui a pris part au vote, est donc une étudiante.
- c. Tous les rubis sont rouges, et toutes les émeraudes vertes. Une pierre précieuse bleue est donc soit un rubis, soit une émeraude.
- d. Aucun astrologue n'est homme de science. Donc aucun homme de science n'est astrologue.
- e. Tout astrologue est un charlatan. Donc tout charlatan est astrologue.
- f. Tous les schtroumpfs déjà rencontrés sont bleus ou noirs. Il n'y a donc pas de schtroumpf rouge.

1.14. Pour un certain cours, un étudiant réussit si et seulement s'il obtient au moins 10 à l'examen écrit. Lesquelles des affirmations suivantes sont correctes ?

- a. Une condition nécessaire pour réussir est d'obtenir au moins 10.
- b. Une condition suffisante pour réussir est d'obtenir au moins 10.
- c. Une condition nécessaire et suffisante pour réussir est d'obtenir au moins 10.
- d. Si un étudiant obtient au moins 10, il réussit.
- e. Si un étudiant obtient moins de 10, il échoue.

1.15. Exprimez par une formule logique les assertions suivantes :

- a. Aucun voleur n'est admiré.
- b. Ce ne sont pas tous les voleurs qui sont admirés.
- c. Aucune personne n'est admirée si elle est un voleur.
- d. Un voleur n'attire aucune admiration.

Certaines de ces assertions sont-elles logiquement équivalentes ?

1.16. En utilisant les abréviations

\mathbb{N} pour l'ensemble des nombres naturels,

$P(x)$ pour « x est pair »,

$I(x)$ pour « x est premier »,

traduisez en formules logiques les assertions suivantes :

- a. il existe un nombre naturel pair ;
- b. il existe un nombre naturel pair et premier ;
- c. il est faux que tout nombre naturel pair est premier,
- d. il existe un seul nombre naturel à la fois pair et premier.

1.17. Considérons l'assertion

Tous les gaz ont un comportement de gaz parfait lorsque leur température absolue excède la constante universelle C .

Déterminez, parmi les phrases suivantes, la négation de cette assertion.

- Il existe un gaz dont le comportement n'est pas celui d'un gaz parfait lorsque sa température n'excède pas C .
- Il existe un gaz dont le comportement n'est pas celui d'un gaz parfait lorsque sa température excède C .
- Tous les gaz ont un comportement qui n'est pas celui d'un gaz parfait lorsque leur température n'excède pas C .
- Tous les gaz ont un comportement qui n'est pas celui d'un gaz parfait lorsque leur température excède C .

1.18. Pour C et n fixés, considérons l'assertion suivante :

Tous les algorithmes de tri requièrent au moins C comparaisons pour trier n clés dans le pire des cas.

Quelle est la négation de cette assertion ?

- Il existe un algorithme de tri qui trie toujours n clés en faisant au plus $C - 1$ comparaisons.
- Il existe un algorithme de tri qui trie toujours n clés en faisant au moins C comparaisons dans le pire des cas.
- Tous les algorithmes de tri requièrent toujours au plus $C - 1$ comparaisons pour trier n clés.
- Tous les algorithmes de tri requièrent toujours au moins C comparaisons pour trier n clés.

1.19. Un directeur de laboratoire impose les trois règles suivantes à ses techniciens :

- a. si votre protocole d'expérience ne contient pas de commentaires, alors il doit contenir au moins une procédure normalisée ;
- b. si votre protocole est bref et sans commentaire, vous n'y mettez pas de procédure normalisée ;
- c. si votre protocole inclut au moins un commentaire ou au moins une procédure normalisée, il ne peut pas être bref.

Déduisez de ces règles que le directeur impose une propriété pour tous les protocoles de ses chercheurs en ce qui concerne « être bref », « comprendre une procédure normalisée », « contenir un commentaire » : parmi les 8 cas pour les valeurs de vérité de ces trois variables, lesquels sont admis par le directeur ? Expliquez brièvement votre réponse en donnant la table de vérité.

1.20. Un analyste impose les trois règles suivantes à ses programmeurs :

- a. si votre programme ne contient pas de commentaires, alors il doit contenir au moins une procédure ;
- b. si votre programme est bref et sans commentaire, vous n'y mettez pas de procédure ;
- c. si votre programme inclut au moins un commentaire ou au moins une procédure, il ne peut pas être bref.

Déduisez de ces règles que l'analyste impose une propriété pour tous les programmes de ses programmeurs en ce qui concerne « être bref », « comprendre une procédure », « contenir un commentaire » : parmi les 8 cas pour les valeurs de vérité de ces trois variables, lesquels sont admis par l'analyste ? Expliquez brièvement votre réponse en donnant la table de vérité.

1.21. Voici une définition récursive d'une « expression »

- a. tout nombre ou lettre (c.-à-d. variable) est une expression ;
- b. si E et F sont des expressions, alors $E + F$, $E * F$ et (E) sont encore des expressions.

Dans une telle définition récursive, il est sous-entendu que seuls les objets produits en appliquant un nombre fini de fois les deux règles ci-dessus sont des expressions.

Démontrer que dans chaque expression figurent autant de parenthèses gauches que de parenthèses droites.

1.22. Trouvez une forme explicite pour

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

et démontrez-la.

1.23. Le nombre entier $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ est-il divisible par 43 quel que soit le naturel n ?

1.24. S'il existe uniquement des timbres de 5 cents et de 9 cents, quels sont les montants entiers en cents qu'il est possible de former à l'aide de tels timbres ?

1.25. Pour quels naturels n l'inégalité $2^n > n^2$ est-elle vraie ?

1.26. S'il est vrai que « Certains x ne sont pas des y » et que « Tous les z sont des y », il résulte que

- Certains x ne sont pas des z
- Certains x sont des z
- Certains z ne sont pas des x
- Aucun z n'est un x

Pour chacune de ces affirmations, indiquez si elle est vraie ou fausse.

1.27. Laquelle des quatre propositions ci-dessous est la négation de « Tous les guichets sont ouverts tous les jours » ?

- Il y a un jour où tous les guichets sont fermés
- Il y a au moins un guichet qui est fermé au moins un jour
- Tous les guichets sont fermés tous les jours
- Chaque guichet est fermé au moins un jour

1.28. Quelle est la négation de l'affirmation « Tous les guichets sont ouverts tous les jours de la semaine » ?

- Aucun guichet n'est ouvert tous les jours de la semaine
- Un seul guichet est ouvert au moins un jour de la semaine
- Un guichet au moins est fermé tous les jours de la semaine
- Un seul guichet est ouvert tous les jours de la semaine
- Un guichet au moins est fermé au moins un jour de la semaine

1.29. Chacun des cartons représentés ci-dessous porte sur une face une lettre et sur l'autre un nombre.

A

M

3

6

Pour vérifier si la phrase suivante est vraie : « Si un carton porte une voyelle sur une face, alors il porte un nombre pair sur l'autre »,

- il faut retourner tous les cartons ;
- il suffit de retourner A et M ;
- il suffit de retourner A et 3 ;
- il suffit de retourner A et 6.

1.30. A, B, C sont des personnes apparentées. Le père de A figure parmi elles, de même qu'une fille de B et le jumeau de C . Sachant que C et son jumeau sont de sexes différents et que C n'est pas enfant de B , quelle est la personne dont le sexe diffère des deux autres ?

- A
- B
- C
- le problème posé n'admet pas de solution

1.31. La négation de $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N : |f(n)| < \epsilon$ est

- $\forall \epsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N : |f(n)| < \epsilon$
- $\exists \epsilon > 0$, tel que $\forall N, \exists n \geq N : |f(n)| \geq \epsilon$
- $\forall \epsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N : |f(n)| \geq \epsilon$
- $\exists N$ tel que $\forall \epsilon > 0, \exists n \geq N : |f(n)| \geq \epsilon$

1.32. Quatre individus, dont l'un a commis un vol, sont arrêtés par la police et font les déclarations suivantes :

- Alain : « Bernard est coupable »
- Bernard : « Daniel est coupable »
- Charles : « Je ne suis pas coupable »
- Daniel : « Bernard ment lorsqu'il dit que je suis coupable »

Sachant qu'une seule de ces déclarations est vraie, qui est coupable du vol ?

- Alain
- Bernard
- Charles
- Daniel

1.33. En admettant qu'une forêt possède un million d'arbres feuillus et qu'un arbre feuillu possède un nombre de feuilles compris entre 0 et 200.000, lesquelles des affirmations suivantes sont certainement vraies ?

- Deux arbres de cette forêt ne peuvent jamais posséder le même nombre de feuilles.
- La forêt comprend un arbre ayant une seule feuille.
- La forêt comprend au moins deux arbres ayant le même nombre de feuilles.
- La forêt comprend des arbres non feuillus.

1.34. Vous voilà capturé par des anthropophages! Leur chef vous déclare : « Tu as le droit de dire une seule phrase. Si tu as menti, tu seras bouilli. Si tu n'as pas menti, tu seras rôti ». Quelles sont, parmi les phrases suivantes celles qui vous permettraient de n'être ni bouilli ni rôti ?

- Je serai bouilli
- Je ne serai pas bouilli
- Je serai rôti
- Je ne serai pas rôti

1.35. Sachant que tous les bacilles sont des microbes et que certains bacilles sont pathogènes, vous pouvez en déduire que

- tous les microbes sont pathogènes
- aucun microbe n'est pathogène
- certains bacilles pathogènes ne sont pas des microbes
- certains microbes sont pathogènes
- aucun microbe pathogène n'est un bacille

1.36. Quelle est la négation de la proposition suivante : « Toutes les Suédoises sont blondes et ont des yeux bleus » ?

- Il existe une Suédoise qui n'est pas blonde et n'a pas les yeux bleus ;
- Il existe une Suédoise qui n'est pas blonde ou n'a pas les yeux bleus ;
- Aucune Suédoise n'est blonde et n'a les yeux bleus ;
- Aucune Suédoise n'est blonde ou n'a les yeux bleus ;
- Certaines Suédoises ne sont pas blondes et n'ont pas les yeux bleus.

1.37. L'affirmation « *s'il pleut, alors je reste à la maison* » est vraie. Parmi les propositions suivantes, laquelle est en contradiction avec cette affirmation ?

- « Il pleut et je reste à la maison »
- « Il ne pleut pas et je reste à la maison »
- « Il pleut et je sors »
- « Il ne pleut pas et je sors »
- Aucune de ces propositions.

1.38. Dans un questionnaire à choix multiple, chaque question est proposée avec 5 réponses A, B, C, D, E dont une seule est correcte. Pour l'une des questions, un candidat a remarqué que C implique B (c'est-à-dire que si la réponse C est vraie, B l'est aussi). Il peut en déduire :

- que la réponse B est incorrecte ;
- que la réponse C est incorrecte ;
- que les réponses B et C sont incorrectes ;
- que la bonne réponse est soit B, soit C ;
- aucune des affirmations ci-dessus.

1.39. « Dans toutes les prisons, il y a un détenu qui n'aime aucun gardien ». Si on suppose que cette affirmation est fautive, cela signifie que

- Dans toutes les prisons, il y a un détenu qui aime tous les gardiens
- Il existe une prison dans laquelle tous les détenus aiment tous les gardiens
- Il existe une prison dans laquelle aucun détenu n'aime tous les gardiens
- Dans toutes les prisons, aucun détenu n'aime tous les gardiens
- Il existe une prison dans laquelle chaque détenu aime au moins un gardien

1.40. En Italie, au XVI^{ème} siècle, il n'y avait que deux familles de fabricants de coffrets : Bellini et ses fils d'une part, Cellini et ses fils d'autre part. Chaque fois que Bellini ou un de ses fils avaient terminé un coffret, ils y gravaient une inscription vraie. Cellini et ses fils, eux, gravaient sur leurs coffrets une inscription fautive. Un coffret porte l'inscription : « Ce coffret n'a pas été fait par un fils de Bellini ». Qui a fabriqué ce coffret ?

- Bellini
- Cellini
- un fils de Bellini
- un fils de Cellini
- Les données ne sont pas suffisantes pour répondre à la question

1.41.

- « Louise possède au moins 100 livres », dit Charles-Edouard.
- « Non », dit Tristan, « elle en possède moins de 100 ».
- « En tout cas, elle possède au moins un livre », dit Guenièvre.

Combien de livres Louise possède-t-elle, sachant qu'une seule des trois affirmations ci-dessus est vraie ?

1.42. Les affirmations suivantes portent sur un nombre naturel n . Laquelle est fausse ?

- si n^2 est pair, alors n est pair
- si n^2 est impair, alors n est impair
- si n^2 est multiple de 3, alors n est multiple de 3
- si n^2 est un multiple de 3 plus 1, alors n est un multiple de 3 plus 1
- si n^2 est un multiple de 5 plus 1, alors n est un multiple de 5 plus 1 ou un multiple de 5 plus 4

1.43. Quelle est la négation de « Tous les élèves de la classe participent aux Olympiades mathématiques » ?

- Aucun élève de la classe ne participe aux olympiades mathématiques
- Un seul élève de la classe participe aux olympiades mathématiques
- Tous les élèves de la classe sauf un participent aux olympiades mathématiques
- Un élève de la classe au moins ne participe pas aux olympiades mathématiques
- Un élève de la classe au moins participe aux olympiades mathématiques

1.44. Voici cinq propositions concernant des nombres réels x et y

- (1) $0 \leq x$
- (2) $x \leq 2$
- (3) $0 \leq y$
- (4) $y \leq 8$
- (5) $x^3 \leq y$

Alors, pour tous x, y on a :

- (1, 2) impliquent (3,4)
- (1,2,4) impliquent (3)
- (4,5) impliquent (1)
- (4,5) impliquent (2)
- (4,5) impliquent (3)

1.45. Voici cinq propositions. Laquelle n'est logiquement équivalente à aucune des quatre autres ?

- Si tu triches, j'abandonne le jeu.
- Tu triches et je n'abandonne pas le jeu.
- Si tu ne joues pas honnêtement, j'abandonne le jeu.
- Tu ne triches pas ou j'abandonne le jeu.
- Si je continue à jouer, alors tu ne triches pas.

Chapitre 2

Nombres

2.1. Un ensemble est donné avec une opération. Vérifier si cette opération est partout définie et si elle admet dans l'ensemble un élément neutre. Chaque élément de l'ensemble possède-t-il dans l'ensemble un inverse pour l'opération? L'ensemble forme-t-il un groupe pour l'opération considérée?

- $(\mathbb{Z}, -)$;
- $(\mathbb{N}, +)$;
- $(\mathbb{N}, -)$;
- $(\mathbb{Q}, -)$;
- $(\mathbb{Q}^*, :)$;
- $(\mathbb{R}^*, +)$;
- (\mathbb{Q}^*, \cdot) ;
- $(\mathbb{Q}^{*+}, +)$;
- (\mathbb{Q}^{*+}, \cdot) ;
- $(\mathbb{Q}^{*+}, :)$;
- l'ensemble des polynômes à coefficients réels, en une indéterminée, de degré ≤ 3 , muni de l'addition (de la multiplication) ;
- l'ensemble des polynômes à coefficients réels, en une indéterminée, de degré 3, muni de l'addition (de la multiplication) ;
- l'ensemble des entiers modulo 7 muni de l'addition (de la multiplication) ;
- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la multiplication modulo 7 ;
- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ muni de la multiplication modulo 8.

2.2. Trouver les valeurs réelles x telles que

- $\frac{1}{x} = 3$
- $-1 = -2x + 3$
- $\frac{x^2 - 3x}{x + 2} = 0$
- $8 - \frac{1}{x^2} = 0$
- $x^3 - 5x^2 = -6x$
- $|x - 1| = |2 - 3x|$
- $|x^2 + 4x + 3| = 1$
- $\left| \frac{x - 1}{5x + 2} \right| = 3$

2.3. Trouver les valeurs réelles x telles que

- | | |
|---|---|
| ol type="a"> $\frac{1}{x} < 3$ $-1 < -2x + 3 \leq 2$ $\frac{x^2 - 3x}{x + 2} > 0$ $8 - \frac{1}{x^2} < 0$ | ol type="a"> $x^3 - 5x^2 < -6x$ $x - 1 < 2 - 3x$ $x^2 + 4x + 3 \geq 1$ $\left \frac{x - 1}{5x + 2} \right > 3$ |
|---|---|

2.4. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$

$$|x - y| \geq ||x| - |y||$$

2.5. Les pages d'un livre sont numérotées paires à gauche et impaires à droite. Une photocopieuse permet de reproduire deux pages à la fois (une de gauche et une de droite). Exprimez par une formule le nombre de photocopies nécessaires pour reproduire toutes les pages numérotées de m à n .

2.6. Pour quelles valeurs du nombre naturel m avons-nous

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m < 10^{-5} \quad ?$$

2.7. Ci-dessous, on suppose $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Effectuer les opérations suivantes et exprimer le résultat sous la forme (exacte) la plus simple possible sans calculatrice. Par exemple pour $\sqrt[4]{4}$ la réponse est $\sqrt{2}$, tandis que pour $\sqrt[4]{16}$ la réponse est 2. Donner la réponse sous forme de fraction plutôt que sous forme décimale.

- | | | |
|------------------------------------|--|--------------|
| a. $\frac{2}{5} = \dots$ | d. $\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}$ | h. $(2^3)^2$ |
| b. $\frac{2}{5} = \dots$ | e. $\sqrt[3]{-125}$ | i. $2(2^3)$ |
| c. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ | f. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$ | j. $2(3^2)$ |
| | g. $(2^2)^3$ | k. $(a^n)^n$ |

2.8. Ci-dessous, on suppose $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Simplifier

$$\bullet \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^5} \qquad \bullet \frac{\sqrt[4]{64a^6}}{\sqrt[4]{162a}}$$

2.9. Exprimer 16^m comme puissance de 2.

2.10. Effectuer $(2^2)^3$; $(2^3)^2$; $2(2^3)$; $2(3^2)$; $(a^n)^n$.

2.11. Que valent

$$\text{a) } \sum_{i=5}^{10} 2^i \quad ? \qquad \text{b) } \sum_{i=n_1}^{n_2} 2^i \quad ?$$

2.12. Calculer $\binom{2001}{1999}$

2.13. Prouver

$$\sum_{i=1}^n i = \binom{n+1}{2}.$$

2.14. Écrire les 5 premières lignes du triangle de Pascal.

2.15. Pour les quelques premières lignes du triangle de Pascal, calculer la somme des nombres apparaissant sur la ligne. Former une conjecture en fonction du numéro de ligne n . Prouver/justifier en faisant appel aux notions vues en cours.

2.16. Développer $(1-1)^n$ et en déduire une propriété des coefficients binomiaux.

2.17. Parmi les structures

- $\mathcal{P}E, \cup$;
- $\mathcal{P}E, \cap$;
- $\mathcal{P}E, \setminus$;
- $\mathcal{P}E, \Delta$,

quelles sont celles qui forment groupes ?

2.18. Lesquelles des égalités suivantes sont vraies pour tout choix d'ensembles A, B, C ?

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \\ A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

On se contentera d'argumenter sur un diagramme de Venn.

2.19. Soit les fonctions

- $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 5x$;
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 2^x$;
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} : x \rightarrow [x]$;
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} : x \rightarrow \lfloor x \rfloor$;
- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow [x]$;

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \sin x$;
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \rightarrow |x|$;
- $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow \frac{x}{|x|}$;
- $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \rightarrow \sqrt{x}$;
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^3$.

Déterminer celles qui sont injectives, surjectives, bijectives. Donner la fonction inverse de chacune des fonctions bijectives.

2.20. Tracer le graphe de

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow [x]$;
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow |x|$;
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{x}{|x|}$.

2.21. Soit les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies ci-dessous

$$\begin{aligned} f : x &\rightarrow x^2 + 1 & i : x &\rightarrow \sin x \\ g : x &\rightarrow x^3 - x & j : x &\rightarrow e^x \\ h : x &\rightarrow 2x \end{aligned}$$

Calculer $g \circ f$, $f \circ g$, f^2 , h^4 , $i \circ j$, $j \circ i$. Vérifier $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Que vaut $(f \circ j \circ h \circ i \circ g)(x)$?

2.22. Soit les permutations

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $a \circ b$; $b \circ a$; $a \circ a$; $a \circ b \circ c$; a^{-1} ; $a \circ b \circ a^{-1}$; c^2 ; a^2 ; a^6 .

2.23. Soit le carré de sommets a, b, c, d .

- a. Chercher toutes les permutations des sommets qui conservent globalement le carré.
- b. Établir la « table de composition » des permutations trouvées.
- c. Cet ensemble E de permutations, muni de la loi de composition des permutations, forme-t-il groupe ?
- d. Trouver des sous-ensembles de E qui ont eux-mêmes une structure de groupe.

2.24. Soit 10 boules rouges indiscernables et 3 boules vertes indiscernables. De combien de manières

- a. ces 13 boules peuvent-elles être disposées en ligne ?
- b. ces 13 boules peuvent-elles être disposées en ligne, si seulement la couleur des boules a de l'importance ?
- c. un choix de 3 boules rouges et 2 vertes peut-il être fait ?

Combien de ces 13 boules faut-il prendre au minimum pour en avoir certainement

- d. 3 rouges ?
- e. 2 vertes ?
- f. deux de couleurs différentes ?

2.25. 17 tâches doivent être assignées à 5 processeurs. De combien de manières est-ce possible

- en général ?
- si chaque processeur traite au plus 3 tâches ?
- si chaque processeur traite au moins 1 tâche ?

2.26. Combien de vecteurs de 10 bits ont exactement six 1 ? (Un « vecteur de 10 bits » est un mot de longueur 10 dont les lettres sont 0 ou 1)

2.27. Un télégraphe transmet deux types de signaux : un point et un trait. Quelle plus petite longueur faut-il prendre pour des mots formés de tels signaux de sorte à pouvoir encoder

- les 26 lettres de l'alphabet ?
- les 256 caractères ASCII ?

2.28. Une adresse IPv4 est une séquence de 4 nombres naturels, chacun de 0 à 255. Évaluez sans calculatrice (via l'approximation $1024 \approx 1000$) le nombre total de ces adresses : est-il de l'ordre du million ? du milliard ? Vérifiez avec une calculatrice.

2.29. Pour n fixé, quel est le plus grand coefficient binomial $\binom{n}{k}$? Ce plus grand coefficient est-il unique ?

2.30. Quel est le nombre de façons de distribuer r boules identiques dans n boîtes numérotées de 1 à n ?

2.31. (difficile) Quel est le nombre de solutions entières (x_1, x_2, \dots, x_n) de l'équation $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$, où de plus $x_i > 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$? Ici m est un naturel donné.

2.32. Le nombre de mots obtenus en réarrangeant les lettres du mot

est-il plus grand que le nombre similaire en partant plutôt du mot suivant ?

MISSISSIPI

- 2.33.** Montrez que $\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k}$ est égal à un certain coefficient binomial (donnez une preuve combinatoire basée sur la définition ensembliste des coefficients binomiaux).
- 2.34.** Établissez par récurrence l'égalité obtenue à l'exercice précédent.
- 2.35.** Montrez que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ est égal à un certain coefficient binomial (donnez une preuve combinatoire basée sur la définition ensembliste des coefficients binomiaux).
- 2.36.** Établissez par récurrence l'égalité obtenue à l'exercice précédent.
- 2.37.** Généralisez le théorème du binôme à un théorème du trinôme, quadrinôme, etc. :

$$(a + b + c)^n = ?$$

$$(a + b + c + d)^n = ?$$

- 2.38.** Complétez la formule pour qu'elle soit valable pour tous ensembles A, B :

$$|A| + |B| = |A \cap B| + ?$$

(Ici, si E est un ensemble, $|E|$ désigne le nombre d'éléments de E .)

- 2.39.** Combien de permutations des six lettres $ABCDEF$ contiennent le mot DEF
- avec les lettres D, E, F consécutives ?
 - sans cette restriction ?
- 2.40.** Déterminez, parmi les ensembles suivants, ceux qui sont infinis dénombrables :
- $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
 - \mathbb{N}^k , où k est un naturel fixé ;
 - l'ensemble des parties à 3 éléments de \mathbb{N} ;
 - l'ensemble de tous les mots (de longueur quelconque) sur l'alphabet usuel.
- 2.41.** La réunion de deux ensembles dénombrables est-elle toujours dénombrable ?
- 2.42.** L'ensemble des applications de \mathbb{N} vers \mathbb{N} est-il dénombrable ?
 Indice : pensez à l'argument de la diagonale

Chapitre 3

Géométrie

- 3.1.** On donne les points $a = (1, 2)$, $b = (4, 4)$ et $c = (4, 3)$ du plan. Déterminer
- les composantes des vecteurs \vec{ab} et \vec{ba} ;
 - les coordonnées du milieu du segment ab ;
 - les coordonnées du centre de gravité du triangle abc . A-t-on besoin de travailler dans un repère orthonormé pour faire ces calculs ?

- 3.2.** Soit g le centre de gravité du triangle abc ; calculer la somme vectorielle

$$\vec{ga} + \vec{gb} + \vec{gc}.$$

- 3.3.** On donne les points $a = (1, 7)$ et $b = (6, -3)$.

- Déterminer les coordonnées du point c situé sur la droite ab et tel que $\vec{ac} = \frac{2}{3}\vec{cb}$.
- Même question avec $a = (1, -8)$, $b = (8, -1)$ et $\vec{ac} = \frac{3}{4}\vec{cb}$.

- 3.4.** La longueur d'un vecteur \vec{ab} du plan euclidien est 13, son origine est le point $a = (-2, 3)$, la projection de son extrémité sur l'axe oy est le point $(0, 8)$. Déterminer les coordonnées de b et les composantes de ce vecteur.

- 3.5.** Dans le plan, donner l'équation des droites suivantes :

- l'axe ox ;
- l'axe oy ;
- la droite qui passe par les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$;
- la droite qui passe par les points $(1, 0)$ et $(0, 2)$;
- la droite qui passe par les points $(1, 4)$ et $(-1, 2)$;
- la droite parallèle à l'axe ox qui passe par $(2, -4)$;
- la droite parallèle à la droite d'équation $x + 3y = -4$ qui passe par le point $(1, 2)$.

- 3.6.** Quelle est l'équation de la droite du plan qui passe par $(2, -3)$ et qui est parallèle à la droite passant par $(4, 1)$ et $(-2, 2)$?

- 3.7.** Trouver l'équation de la droite passant par le point $(2, 1)$ et par le point d'intersection des droites d'équations respectives

$$3x - 2y + 10 = 0 \quad \text{et} \quad 4x + 3y - 7 = 0.$$

- 3.8.** Quelle est l'équation de la perpendiculaire à la droite d'équation $2x - 3y - 4 = 0$, qui passe par le point $(3, -2)$?

- 3.9.** Soit le point $p = (3, 5)$ du plan euclidien. Quelles sont les coordonnées des points symétriques de p par rapport

- à l'origine;
- à l'axe ox ;
- à l'axe oy ;
- au point $(7, -2)$;
- à la première bissectrice;
- à la droite d'équation $x + 2y = 3$.

- 3.10.** Déterminer la valeur du paramètre réel k pour que dans le plan coordonné

- la droite d'équation $3kx + 5y + k = 0$ passe par le point $(-1, 4)$;

- b. la droite d'équation $4x - ky - 7 = 0$ ait une pente 3 ;
 c. la droite d'équation $kx - y = 3k - 6$ coupe l'axe des x au point d'abscisse 5.

3.11. Considérons dans le plan coordonné le triangle formé par les droites d'équations respectives

$$x - y + 2 = 0,$$

$$2x + 3y + 9 = 0,$$

et

$$4x + y - 7 = 0.$$

- a. Déterminer les coordonnées des sommets de ce triangle.
 b. Déterminer les coordonnées des milieux de ses côtés.
 c. Écrire les équations de ses médianes.

3.12. Le point d'intersection g des médianes d'un triangle se trouve sur l'axe des abscisses. Deux des sommets coïncident avec les points $a = (2, -3)$ et $b = (-5, 1)$, le troisième sommet étant sur l'axe des ordonnées. Trouver les coordonnées des points c et g .

3.13. Démontrer que la droite d'équation $2x + y + 3 = 0$ coupe le segment limité par les points $a = (-5, 1)$ et $b = (3, 7)$.

3.14. Dans le plan coordonné, quelle est l'équation de la droite parallèle à la droite d'équation $2x + 3y - 5 = 0$ et qui passe par le point d'intersection des droites d'équations $2x - 5y + 9 = 0$ et $4x + 7y - 1 = 0$?

3.15. Dans \mathbb{R}^2 , quelle est l'équation de la droite commune aux deux faisceaux

$$\alpha_1(5x + 3y - 2) + \beta_1(3x - y - 4) = 0,$$

$$\alpha_2(x - y + 1) + \beta_2(2x - y - 2) = 0 \quad ?$$

3.16. Soit les droites $A \equiv 3x + 4y - 10 = 0$ et $B \equiv 3x - y - 5 = 0$ du plan euclidien.

- a. Quelle est l'équation générale des droites passant par $A \cap B$?
 b. Déterminer parmi ces droites celles qui sont tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ et donner l'angle de ces tangentes.

3.17. Trouver l'équation du cercle de centre $(3, -1)$, qui découpe sur la droite d'équation $2x - 5y + 18 = 0$ une corde de longueur 6.

3.18. Déterminer les équations des cercles tangents aux droites A et B d'équations $x - 2y + 2 = 0$ et $2x - y + 1 = 0$, et dont le centre se trouve sur la droite d'équation $5x - y - 11 = 0$.

3.19. Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 3x + 5y - 14 = 0.$$

3.20. Écrire les équations en coordonnées polaires des cercles d'équations :

- a. $x^2 + y^2 = R^2$;
 b. $(x - a)^2 + y^2 = a^2$;
 c. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

3.21. Écrire l'équation du cercle qui contient les points $(1, 1)$, $(2, 2)$ et $(3, 1)$.

3.22. Trouver les équations des droites tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$ et parallèles à la droite d'équation $x + y = 0$.

3.23. Dans \mathbb{R}^3 , calculer

- a. $(1, 2, 3) \times (-1, 4, 2)$
 b. $((1, 2, 3) \times (-1, 0, 2)) \times (0, -6, 1)$
 c. $(1, 2, 3) \times ((-1, 0, 2) \times (0, -6, 1))$

3.24. Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , on donne les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ de composantes respectives $(1, 2, 3)$, $(0, 3, -4)$ et $(2, 2, -2)$. On demande

- a. la longueur de \vec{v}_2 ;
 b. l'angle entre \vec{v}_1 et \vec{v}_3 ;
 c. le produit vectoriel $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3$.

- 3.25.** Dans l'espace euclidien de dimension 3, calculer l'angle entre deux diagonales d'un cube.
- 3.26.** Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , trouver l'aire du triangle de sommets $p = (1, 3, 2)$, $q = (2, -1, 1)$, $r = (-1, 2, 3)$.
- 3.27.** Soit \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} des vecteurs de l'espace euclidien \mathbb{E}^3 tels que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Montrer que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$.
- 3.28.** Montrer que l'on a $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ pour tout $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{E}^3$.
- 3.29.** Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 le triangle de sommets $a = (-1, 4, -1)$, $b = (5, 8, 5)$, $c = (11, -4, 7)$ est-il rectangle? Calculer l'aire de ce triangle.
- 3.30.** Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , calculer le volume du tétraèdre de sommets $a = (1, 1, 1)$, $b = (2, 2, 2)$, $c = (-1, -1, 0)$, $d = (1, 0, 4)$.
- 3.31.** Dans \mathbb{R}^3 , quelle est l'équation du plan
- parallèle au plan oxy et coupant l'axe oz au point $(0, 0, -3)$;
 - parallèle au plan oyz et coupant l'axe ox au point $(-4, 0, 0)$;
 - contenant l'axe oz et passant par le point $(1, 1, 1)$;
 - passant par les points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$;
 - passant par les points $(2, 0, 0)$, $(0, 6, 0)$ et $(0, 0, 5)$;
 - passant par les points $(-3, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ et $(0, 0, -1)$.
- 3.32.** Dans \mathbb{R}^3 , trouver l'équation du plan
- contenant l'origine et parallèle au plan d'équation $3x + 7y - 6z + 3 = 0$;
 - contenant le point $(-1, 2, 4)$ et parallèle au plan d'équation $3x + 7y - 6z + 3 = 0$.
- 3.33.** Quelle est l'équation du plan de \mathbb{R}^3
- passant par $a = (3, 4, -5)$ et parallèle aux vecteurs de composantes $(3, 1, -1)$ et $(1, -2, 1)$?
 - passant par $a = (2, -1, 3)$ et $b = (3, 1, 2)$ et parallèle au vecteur de composantes $(3, -1, 4)$?
- 3.34.** Dans \mathbb{R}^3 , donner des équations paramétriques et cartésiennes
- de l'axe ox ;
 - de la droite parallèle à l'axe oy qui passe par le point $a = (2, -1, 3)$;
 - de la droite qui passe par les points $a = (0, 1, 1)$ et $b = (2, 3, 0)$;
 - de la droite parallèle à la droite d'équations

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

qui passe par le point $a = (1, 2, 3)$;

- de la droite parallèle au plan d'équation $x + y - 2z = 3$, contenue dans le plan d'équation $2x - y + z = 1$ et qui passe par le point $e = (1, 1, 0)$.

- 3.35.** Quelle est l'équation du plan de \mathbb{R}^3 qui passe par le point $a = (2, -2, 1)$ et qui contient la droite D d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -5t + 2 \\ z = 2t - 3 \end{cases}$$

- 3.36.** Trouver des équations cartésiennes de la droite de \mathbb{R}^3 passant par le point $(-3, 5, 10)$ et parallèle à la droite d'équations

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

- 3.37.** Pour quelle(s) valeur(s) de a les droites de \mathbb{R}^3

$$D_1 \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{-y}{3} = \frac{z-1}{4}$$

et

$$D_2 \equiv \frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

sont-elles sécantes?

- 3.38.** Trouver l'équation du plan de \mathbb{R}^3 passant par la droite d'équations

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

et parallèle à la droite d'équations

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

3.39. Dans \mathbb{R}^3 , la droite d'équations

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

est-elle parallèle au plan d'équation $x + 2y + 2z - 6 = 0$?

3.40. Pour quelle valeur de λ la droite de \mathbb{R}^3 d'équations

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{\lambda}$$

est-elle parallèle au plan d'équation $6x - y + 3z - 5 = 0$?

3.41. Trouver les équations de la droite de \mathbb{R}^3 passant par le point $(1, -3, 2)$, parallèle au plan d'équation

$$3x + y - 5z + 8 = 0$$

et s'appuyant sur la droite d'équations

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}.$$

3.42. Etant donnés les points de \mathbb{R}^3

$$o = (0, 0, 0), p = (1, 0, 0), q = (0, 1, 0), r = (0, 0, 1), s = (1, -1, 3),$$

écrire des équations paramétriques et cartésiennes

- de la droite op ;
- de la droite qr ;
- d'une droite quelconque s'appuyant à la fois sur op et qr ;
- de la droite passant par s et s'appuyant sur op et qr . Quelles sont les coordonnées des points d'appui de cette droite ?

3.43. Soit les droites de \mathbb{R}^3 d'équations

$$D_1 \begin{cases} x + 2y = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \quad D_2 \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Donner des équations de la droite D passant par le point $p = (1, 1, 1)$ et s'appuyant sur D_1 et D_2 .

3.44. Écrire l'équation du plan de \mathbb{R}^3

- passant par $(3, -2, 4)$ et perpendiculaire à la droite d'équations $x - 2 = \frac{y - 3}{2} = \frac{z - 4}{3}$;
- passant par $(-1, 2, -3)$ et perpendiculaire à la droite joignant les points $(-3, 2, 4)$ et $(5, 4, 1)$;
- passant par $(2, -3, 4)$ et perpendiculaire à la droite joignant ce point au point $(4, 4, -1)$;
- passant par les points $(3, 2, 1)$, $(1, 3, 2)$ et $(1, -2, 3)$.

3.45. Dans \mathbb{R}^3 , trouver des équations cartésiennes de la perpendiculaire au plan $2x - y + 2z + 3 = 0$ qui passe par le point $a = (-2, -4, 3)$. Quelle est la distance de a à ce plan ?

3.46. Quelle est l'équation du plan de \mathbb{R}^3 qui passe par les points $a = (1, -1, -2)$ et $b = (3, 1, 1)$ et qui est perpendiculaire au plan d'équation $x - 2y + 3z - 5 = 0$?

3.47. Trouver l'équation du plan de \mathbb{R}^3 perpendiculaire à la droite d'équations

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3},$$

qui passe par le point $(4, -2, 1)$.

3.48. Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , soit p le point de coordonnées $(3, 5, 1)$. Déterminer les coordonnées des points symétriques de p par rapport à

- l'axe ox ;
- l'axe oz ;
- l'origine ;
- le point $(-1, 2, 3)$;
- la première bissectrice du plan Oxy ;
- la droite d'équations

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$$

- g. le plan Oyz ;
- h. le plan d'équation $x + y - 2z = 2$.

- 3.49.** Trouver la (ou les) valeur(s) de k pour que le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $x + ky - 2z - 9 = 0$
- a. passe par le point $(5, -4, -6)$;
 - b. soit parallèle au plan $6x - 2y - 12z = 7$;
 - c. soit perpendiculaire au plan $2x - 4y + z = 3$;
 - d. soit à distance 3 de l'origine ;
 - e. fasse un angle de mesure $\pi/3$ avec le plan $2x - 2y + z = 0$;
 - f. passe par le point d'intersection de la droite

$$D \begin{cases} x = y \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

avec le plan d'équation $x + y = 2$.

- 3.50.** Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , on donne les droites D_1 et D_2 d'équations

$$D_1 \equiv x - 3 = -y - 2 = \frac{z}{2}, \quad D_2 \equiv x + 2 = y - 3 = \frac{z + 5}{2}$$

et les plan α et β d'équations

$$\alpha \equiv 2x - 2y + z - 3 = 0, \quad \beta \equiv 3x - y + 2z - 1 = 0$$

On demande de calculer l'angle entre

- a) D_1 et D_2 ;
- b) D_1 et α ;
- c) D_1 et β ;
- d) D_2 et α ;
- e) D_2 et β ;
- f) α et β .

- 3.51.** Dans \mathbb{R}^3 , donner des équations de la droite du plan α d'équation $x + 2y + z = 4$ qui est perpendiculaire à la droite D d'équations

$$\begin{cases} y + 2z = 3 \\ x = y \end{cases}$$

et qui passe par le point $p = \alpha \cap D$.

- 3.52.** Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 on donne le point $p = (2, -1, 3)$ et la droite D d'équations

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 5t - 7 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$$

- a. Quelles sont les coordonnées de la projection orthogonale de p sur D ?
- b. Quelle est la distance de p à D ?

- 3.53.** Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , trouver des équations de la perpendiculaire commune aux droites D et D' d'équations

$$D \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - 4y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad D' \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

- 3.54.** Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 on donne le point $a = (1, 3, -4)$ et le plan d'équation $3x + y - 2z = 0$.

- a. Trouver des équations de la perpendiculaire abaissée de a sur α .
- b. Quelles sont les coordonnées du point a' symétrique de a par rapport à α ?
- c. Calculer de deux manières différentes la distance de a à α .

- 3.55.** Représenter les droites de \mathbb{R}^3 d'équations

$$\begin{cases} z - 1 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y - 5 = 0 \\ z + 4 = 0 \end{cases}$$

sur un dessin.

- 3.56.** Quelle sont dans \mathbb{R}^3 les équations des plans bissecteurs des plans α et β

$$\alpha \equiv 6x - 6y + 7z = -21, \quad \beta \equiv 2x + 3y - 6z = 12 ?$$

- 3.57.** Dans \mathbb{R}^3 , trouver l'angle entre les plans d'équations respectives $3x + 2y - 5z = 4$ et $2x - 3y + 5z = 8$.

- 3.58.** Donner dans \mathbb{R}^3 des équations de la projection orthogonale de la droite d'équations

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases}$$

sur le plan d'équation $2x - 3y + z = 12$.

3.59. Écrire l'équation de la sphère de \mathbb{R}^3 centrée en $(3, 6, -4)$ et tangente au plan $2x - 2y - z - 10 = 0$.

3.60. Soit a, b, c trois points quelconques de l'espace euclidien \mathbb{E}^3 . Une seule des trois expressions suivantes donne correctement le produit scalaire $\vec{ab} \cdot \vec{ac}$ en fonction des longueurs des côtés du triangle abc :

$$\begin{aligned}\vec{ab} \cdot \vec{ac} &= \frac{1}{2}(|bc|^2 - |ab|^2 - |ac|^2) \\ \vec{ab} \cdot \vec{ac} &= \frac{1}{2}(|ab|^2 + |ac|^2 - |bc|^2) \\ \vec{ab} \cdot \vec{ac} &= \frac{1}{2}(|ab|^2 + |bc|^2 - |ac|^2)\end{aligned}$$

Établissez l'expression correcte en développant le produit scalaire $(\vec{ba} + \vec{ac}) \cdot (\vec{ba} + \vec{ac})$.

Chapitre 4

Fonctions

4.1. Déterminer le plus grand domaine de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x \mapsto \sqrt{1-x^2}; & \text{b) } x \mapsto \frac{x-1}{x^2-5x+6} + \sqrt[3]{2x+1}; \\ \text{c) } x \mapsto \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}; & \text{d) } x \mapsto \sqrt{1+x} - 2\sqrt[4]{5-x}; \\ \text{e) } x \mapsto \frac{x^2+1}{1+\sqrt{x^2-9}}; & \text{f) } x \mapsto \sqrt{\sin x}; \\ \text{g) } x \mapsto 2\sqrt{x} + \sqrt{6-x}; & \text{h) } x \mapsto x\sqrt{8-x^2}; \\ \text{i) } x \mapsto \sqrt{x^2-1} - \sqrt{16-x^2}; & \text{j) } x \mapsto 4\sqrt{|x|}. \end{array}$$

4.2. Calculer $f(x)$ étant donné que

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

4.3. Calculer $f(x)$ étant donné que

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2.$$

4.4. Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont paires, impaires, périodiques. Pour les fonctions périodiques, déterminer la période. Chacune des fonctions envoie x sur le y indiqué(ou encore : $y = f(x)$) ; A, B et λ sont des constantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x^2; & \text{b) } y = x^3; \\ \text{c) } y = |\sin x|; & \text{d) } y = \sin |x|; \\ \text{e) } y = \sec x; & \text{f) } y = x^3 \cos x; \\ \text{g) } y = |x| + \sin x; & \text{h) } y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right); \\ \text{i) } y = \cos 5x + \operatorname{tg} 5x; & \text{j) } y = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x; \\ \text{k) } y = \sin^2 x; & \text{l) } y = \sin x^2; \\ \text{m) } y = 3 \cos \frac{1}{3}x + 2 \sin \frac{1}{2}x; & \text{n) } y = \sin 3x + 2 \sin 6x. \end{array}$$

4.5. Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

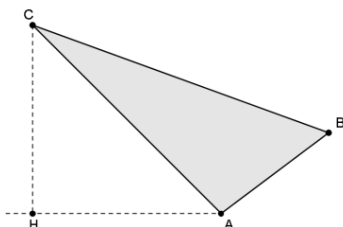
définie sur $[-1, 1]$.

- Construire le graphe de la fonction g qui prolonge f et telle que le domaine de définition de g soit \mathbb{R} et la période de g soit 2.
- Cette fonction g est-elle paire ou impaire ?

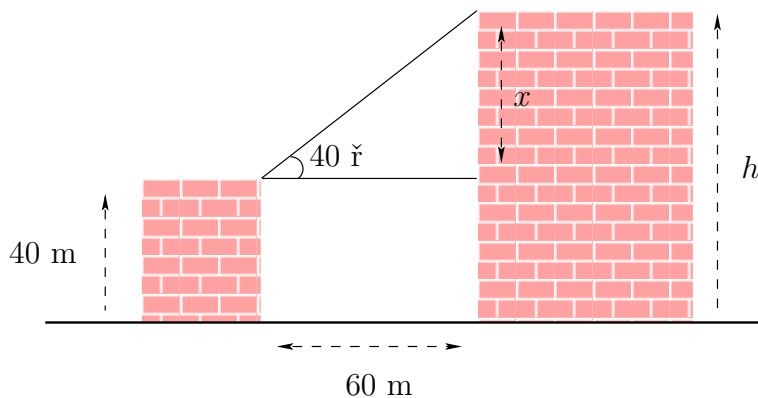
Chapitre 5

Trigonométrie

- 5.1. Quelle est la mesure en degrés d'un angle de $\frac{\pi}{10}$ radians ? À quelle fraction d'un tour complet cet angle correspond-il ?
- 5.2. Soit ABC un triangle rectangle en A . On donne $AB = 5$ cm, et $\hat{B} = \frac{\pi}{6}$ rad. Représenter la situation, et déterminer les longueurs AC et BC .
- 5.3. Si ABC est rectangle en A , que AB vaut 5 unités, BC vaut 6 unités, que vaut AC ? Quelle est la mesure de l'angle \hat{C} ?
- 5.4. On donne un trapèze $ABCD$, où AB est de longueur 3, AD est de longueur 5 et CD de longueur 6. Notons O l'intersection entre les diagonales BD et AC . Sachant que les côtés AB et AD d'une part, et AD et DC d'autres part sont perpendiculaires, quelle est la mesure de l'angle \widehat{BOA} ?
- 5.5. Soit ABC un triangle ; on donne $BC = 25$, $AC = 36$ et $\hat{B} = 72^\circ$.
- Déterminer le troisième côté et les deux autres angles en degrés.
 - Déterminer la mesure de \hat{B} en radians (sans calculatrice !)
- 5.6. Sur la figure, on donne les angles $\widehat{CAH} = 42^\circ$, $\hat{A} = 105^\circ$, $\hat{B} = 36^\circ$ et $AB = 300$ m. On demande de déterminer la longueur CH sachant que l'angle dessiné en H est droit.



- 5.7. Des naufragés abordent les côtes d'une île de l'Atlantique Sud, balayées par le vent. La plage est bien dégagée et recouverte de galets, mais une falaise barre le chemin vers l'intérieur de l'île où ils espèrent trouver du secours. Avant de se préparer pour l'escalade de cette falaise, un membre de l'équipage se propose d'en mesurer la hauteur. Pour cela, il plante une perche bien droite de 3 m de longueur, à une distance de 150 m de l'aplomb de la falaise. Ainsi fait, après avoir vérifié que la perche est bien perpendiculaire au plan de l'horizon, il recule de 5 m, distance juste nécessaire pour que, couché sur le sol, le rayon visuel parti de son oeil effleure à la fois l'extrémité de la perche et le sommet de la falaise. Dessiner une figure, puis calculer la valeur trouvée pour la hauteur de la falaise.
- 5.8. Deux édifices à toit plat sont distants de 60 m. Du toit du plus petit édifice, qui a 40 m de hauteur, l'angle d'élévation de l'arête du toit du plus grand édifice est de 40° . Calculer la hauteur du plus grand édifice.



5.9. À l'aide du cercle trigonométrique, déterminer les nombres suivants (valeur exacte) en utilisant les symétries adéquates.

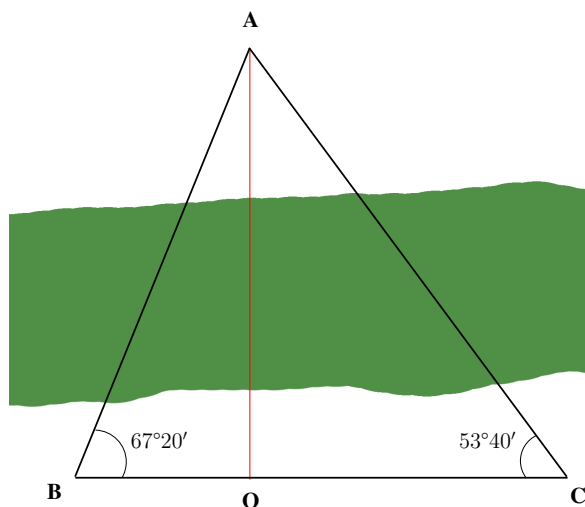
- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ | d. $\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ | g. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ |
| b. $\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ | e. $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ | h. $\cos\left(\frac{-7\pi}{6}\right)$ |
| c. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ | f. $\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right)$ | i. $\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)$ |

5.10. Déterminer les valeurs exactes des expressions suivantes : $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arctan(1)$.

5.11. Simplifier l'expression $\cos(\arcsin(x))$.

5.12. Trouver les valeurs exactes possibles de $\cos \theta$ et $\tan \theta$ sachant que $\sin \theta = \frac{7}{16}$, puis reporter les arcs correspondants sur un cercle.

5.13. Pour calculer la distance OA entre deux points situés sur les rives opposées d'un fleuve, on définit le long d'une des rives un segment BC de 300 m, passant par O avec OA perpendiculaire à BC . En mesurant les angles \hat{B} et \hat{C} , on trouve respectivement $67^\circ 20'$ et $53^\circ 40'$:



Calculer la valeur des distances AB et AC . En déduire ensuite celle de la distance OA .

5.14. Démontrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sin^4(a) - \cos^4(a) &= \sin^2(a) - \cos^2(a) \\ &= 2 \sin^2(a) - 1 \\ \tan^2(a) - \tan^2(b) &= \frac{1}{\cos^2(a)} - \frac{1}{\cos^2(b)} \\ \frac{\sin^2(\theta) - \cos^2(\phi)}{\sin^2(\theta) \sin^2(\phi)} &= 1 - \cot^2(\theta) \cot^2(\phi) \end{aligned}$$

5.15. Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Si $\sin x = -\frac{1}{5}$, que vaut la tangente de x ?
- Si $\cos x = \frac{1}{3}$, quelles sont les valeurs possibles de la tangente de x ?

5.16. Représenter les graphes des fonctions l et f définies par $l(t) = \sin(2t + \pi)$ et $f(t) = \sin(2t) + \pi$.

Chapitre 6

Limites, asymptotes et continuité

6.1. Considérons la fonction $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$ sur le domaine $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Deviner (par exemple avec une calculatrice) vers quoi tend, intuitivement, $f(x)$ lorsque x s'approche de 1.

Afin de tenter de justifier, montrer que $f(x) = x^2 + x + 1$ pour x différent de 1.

6.2. Considérons la fonction $f(x) = \sin(x)/x$ (sur le domaine \mathbb{R}_0).

Deviner (par exemple avec une calculatrice) vers quoi tend, intuitivement, $f(x)$ lorsque x s'approche de 0.

Afin de tenter de justifier cela : lorsque x est proche de 0 mais positif, justifier les inégalités $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ par un dessin dans le cercle trigonométrique, et en déduire $\cos(x) \leq f(x) \leq 1$ pour tout x proche de 0 (positif et négatif).

6.3. Considérons la fonction $g(x) = (1 - \cos(x))/x$ (sur le domaine \mathbb{R}_0).

Deviner (par exemple avec une calculatrice) vers quoi tend, intuitivement, $g(x)$ lorsque x s'approche de 0.

Afin de tenter de justifier cela, montrer que $g(x) = \tan(x/2)f(x)$ et utiliser l'inégalité montrée à l'exercice 6.2.

6.4. Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 1); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 3x - 4}{x^2 + x - 1};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}; \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2};$$

$$\text{e) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}; \quad \text{f) } \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{u^2 - u_0^2}{u - u_0};$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}; \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x - 4}.$$

6.5. Calculer les limites à gauche et à droite en 0 de

$$\text{a) } 2x + \frac{|x|}{x}; \quad \text{b) } e^{1/x}; \quad \text{c) } \frac{|x|e^{|x|}}{x}.$$

6.6. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}, \quad \text{pour } n \text{ entier } \neq 0 \text{ et } a \text{ réel } > 0.$$

6.7. Calculer pour x tendant vers $\frac{7}{2}$ les limites à gauche et à droite de

$$\frac{|2x - 7|}{2x - 7}.$$

6.8. Calculer les limites à gauche et à droite en $\frac{\pi}{2}$ de

$$\frac{1}{2 + 2^{tg x}}.$$

6.9. Si f est une fonction continue et croissante sur l'intervalle $]a, b[$, que peut-on dire des fonctions suivantes aussi sur $]a, b[$?

$$\begin{aligned} \text{a) } x &\mapsto -f(x); & \text{b) } x &\mapsto (f(x))^2; \\ \text{c) } x &\mapsto f(x+c); & \text{d) } x &\mapsto \frac{1}{f(x)}. \end{aligned}$$

6.10. Calculer les limites pour $x \rightarrow +\infty$ et pour $x \rightarrow -\infty$ des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= 5x^6 + 3x^3 - 7x^2 + 15; & \text{g) } y &= \frac{\sqrt{x^2+x}}{2x+1}; \\ \text{b) } y &= 2x^5 + 3x^4 - 6x^2 + x; & \text{h) } y &= \frac{3\sqrt{8x^3-1}}{x+4}; \\ \text{c) } y &= \frac{x^3-27}{x^2-9}; & \text{i) } y &= \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}; \\ \text{d) } y &= \frac{x-4}{x^2-6x+8}; & \text{j) } y &= \sqrt{2x^2-3x-5} - \sqrt{2x^2+3x-5}; \\ \text{e) } y &= \frac{x^2+3x-10}{2(x^2+x-20)}; & \text{k) } y &= x(\sqrt{x^2+1}-x); \\ \text{f) } y &= \frac{x^3-3x+1}{2x^3-6x+x}; & \text{l) } y &= \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}. \end{aligned}$$

6.11. Sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, que valent les limites pour $x \rightarrow 0$ des quantités

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\operatorname{tg} x}{x}; & \quad \text{d) } \frac{x+\sin 4x}{2x-\sin 7x}; \\ \text{b) } \frac{\sin 7x}{3x}; & \quad \text{e) } \frac{\sqrt{3-\sin 2x}-\sqrt{3+\sin 2x}}{x}; \\ \text{c) } \frac{x \sin x}{1-\cos x}; & \quad \text{f) } \sqrt{\frac{\sin 2x}{x}}. \end{aligned}$$

6.12. Trouver les asymptotes aux graphes des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= x + \frac{1}{x}; & \text{e) } y &= \frac{3x^2+4}{x}; \\ \text{b) } y &= 2x + 7 + \frac{1}{x-5}; & \text{f) } y &= x - \sqrt{x^2+4x}; \\ \text{c) } y &= \frac{1-2x}{3x+4}; & \text{g) } y &= \sqrt{9x^2-x+4}; \\ \text{d) } y &= \frac{2x}{x^2-5x+4}; & \text{h) } y &= x - 2 + \frac{x^2}{x^2+9}. \end{aligned}$$

6.13. Pour chacune des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= e^x; & \text{c) } y &= x; \\ \text{b) } y &= \sqrt{x}; & \text{d) } y &= \sqrt{\frac{2x+1}{3(x-1)}}, \end{aligned}$$

déterminer le plus grand domaine et la fonction réciproque si elle existe. Représenter la fonction, sa fonction réciproque et la première bissectrice sur le même graphique.

6.14. Soit la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{pour } x < 0, \\ x^2 & \text{pour } 0 \leq x \leq 2, \\ x+4 & \text{pour } 2 < x. \end{cases}$$

- Calculer $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(3)$.
- Tracer le graphe de f .
- Déterminer le plus grand domaine de définition et l'image de f .
- Calculer les limites à gauche et à droite de f en 0, en 1 et en 2.
- En quels points f est-elle continue?

6.15. Soit la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{pour } x < 1, \\ 3 & \text{pour } x = 1, \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{pour } 1 < x \leq 2, \\ 2 - (x-2)^2 & \text{pour } 2 < x. \end{cases}$$

- Calculer $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(3)$.
- Tracer le graphe de f .
- Déterminer le plus grand domaine de définition et l'image de f .
- Calculer les limites à gauche et à droite de f en 0, en 1 et en 2.
- En quels points f est-elle continue?

6.16. Formulez en termes de $\varepsilon > 0$ une condition nécessaire et suffisante pour que

- la droite d'équation $x = a$ soit asymptote verticale au graphe de f ;
- la droite d'équation $y = b$ soit asymptote horizontale au graphe de f .

6.17. Montrer en termes de ε et δ que si les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, il en va de même de la fonction $f \cdot g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. À cette fin, utilisez

$$(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0) = (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0)).$$

Déduisez une nouvelle preuve de la continuité de l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ (c'est-à-dire, un choix de δ différent de celui proposé dans l'exemple 2 de la section 6.4).

6.18. Considérons la fonction

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto [x] - \sqrt{x}.$$

- En quels points de \mathbb{R} cette fonction est-elle continue?
- Étudier la croissance de cette fonction.

6.19. Parmi les fonctions suivantes de \mathbb{N} vers \mathbb{R}^+ , lesquelles sont asymptotiquement du même ordre que la fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ : n \mapsto n^{3/2}$?

$$\begin{aligned} f_1 : n \mapsto 3n^2 + 2; & \quad f_2 : n \mapsto \sqrt{n^5 + 6}; \\ f_3 : n \mapsto \sqrt[3]{n^2 + 7}; & \quad f_4 : n \mapsto \sqrt{n^3 + 1}; \\ f_5 : n \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^n; & \quad f_6 : n \mapsto \sqrt[3]{n^2} + (-1)^n; \\ f_7 : n \mapsto 1; & \quad f_8 : n \mapsto \sqrt[3]{n^2}(1 + \sin n). \end{aligned}$$

6.20. Si deux fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sont asymptotiquement du même ordre, la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|}$$

existe-t-elle nécessairement?

6.21. Voici des fonctions de \mathbb{N} vers \mathbb{R} , appliquant n sur

$$\begin{aligned} f_1(n) &= \sqrt{n}, & f_2(n) &= 2n^2 + 1, \\ f_3(n) &= 7n + 8, & f_4(n) &= 2n^3 + 5, \\ f_5(n) &= \frac{1}{2}\sqrt{n} - 8, & f_6(n) &= 3n + 2. \end{aligned}$$

Trouvez toutes les comparaisons du type « f est $O(g)$ » entre ces fonctions. Montrez que ces fonctions peuvent être rangées par ordre asymptotique de grandeur.

6.22. Soit f et g deux fonctions de \mathbb{N} vers \mathbb{R}^+ . Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0,$$

est-il possible que

- a. f soit $O(g)$?
- b. g soit $O(f)$?

Chapitre 7

Fonctions trigonométriques

7.1. Résoudre les équations suivantes en x :

- a) $2 \sin x - 1 = 0$; f) $\sin 2x - \cos 2x = 1$;
b) $\sin x - \sin 2x = 0$; g) $\sin x = \sqrt{3} \cos x$;
c) $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$; h) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$;
d) $\sin^2 2x - \sin^2 x = 0$; i) $\arccos 2x = \arcsin x$;
e) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; j) $\arccos(2x^2 - 1) = 2 \arccos \frac{1}{2}$.

7.2. Déterminer la valeur de chacune des expressions suivantes :

- a) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$; f) $\sin(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2})$;
b) $\arccos \frac{1}{2}$; g) $\cos(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$;
c) $\arctan 1$; h) $\operatorname{cosec}(\arcsin \frac{1}{2})$;
d) $\operatorname{arccotg}(-1)$; i) $\operatorname{cotg}(\arctan 1)$;
e) $\operatorname{arccosec} 2$; j) $\operatorname{sec}(\operatorname{arccotg} \sqrt{3})$.

7.3. Déterminer la valeur (en fonction de x) de chacune des expressions suivantes :

- a) $\sin(2 \arccos x)$; d) $\sin(2 \arccos 4x)$;
b) $\operatorname{cotg}(\arccos x)$; e) $\sin(\arctan x)$;
c) $\cos(2 \arcsin x)$; f) $\operatorname{tg}(\arcsin 5x)$.

7.4. Déterminer les domaines de définition des fonctions $x \mapsto y = y(x)$ suivantes :

- a) $\operatorname{arccotg} 3x$; e) $y = \sin(\arccos \frac{x}{3})$;
b) $y = \arcsin 5x$; f) $y = \arccos \frac{2x}{x+1}$;
c) $y = \arctan(\sin 3x)$; g) $y = \arccos(\operatorname{tg} 2x)$;
d) $y = \arccos \frac{3x}{x-2}$; h) $y = \arcsin(\operatorname{cotg} 3x)$.

7.5. Pour chacune des fonctions y de x suivantes déterminer un domaine où celle-ci est inversible, et donner la fonction réciproque correspondante.

- a) $y = 1 + 2 \sin x$; d) $y = \arcsin(2x + 1)$;
b) $y = 1 + \sin 2x$; e) $y = \cos^2 x - \sin x$.
c) $y = \operatorname{tg}^2 x$;

7.6. Calculer les dérivées premières des fonctions $y = y(x)$ suivantes (où $a, b \in \mathbb{R}$) :

- a) $y = \sin(x^2 + 1)$; j) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$;
 b) $y = \cos \sqrt{1 - 2x}$; k) $y = \cos(\sin x)$;
 c) $y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$; l) $y = \frac{\sin(a - x)}{\sin(a + x)}$;
 d) $y = \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$; m) $y = \arcsin 5x$;
 e) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$; n) $y = \arccos\left(\frac{3x}{x - 2}\right)$;
 f) $y = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$; o) $y = \arctan(\sin 3x)$;
 g) $y = \sin nx \cdot (\sin x)^n$; p) $y = \arccos \frac{b + a \cos x}{a + b \cos x}, \quad |a| > |b|$;
 h) $y = \sqrt{a \sin^2 x + b \cos^2 x}$; q) $y = \sin(\arccos \frac{x}{3})$.
 i) $y = \operatorname{cosec}^4 x$;

7.7. Calculer les valeurs des dérivées première, deuxième et troisième des fonctions $y = y(x)$ suivantes aux points indiqués :

- a) $y = \sin x \cos x$, pour $x = \frac{\pi}{3}$;
 b) $y = 4 \sin x - 3 \cos x$, pour $x = 0$;
 c) $y = \sin 3x \cos x$, pour $x = \frac{\pi}{4}$.

7.8. Prouver que la dérivée d'ordre $n \geq 3$ de la fonction $x \mapsto y = \arctan x$ satisfait la formule de récurrence

$$y^n = \frac{-2(n-1)xy^{n-1} - (n-1)(n-2)y^{n-2}}{1+x^2}$$

Calculer la valeur de la cinquième dérivée de $\arctan x$ au point $x = 1$.

7.9. Tracer le graphique de la fonction $x \mapsto y = \sin x$. Déduire les graphiques des courbes $y = \sin 2x$, $y = \frac{1}{2} \sin 2x$.

Chapitre 8

Fonctions logarithmes

8.1. Calculer sans faire usage de tables ou de machines :

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| a. $\log_2(32)$; | f. $\log_{1/2}(4)$; |
| b. $\log_3(27)$; | g. $\ln(e^{-7})$; |
| c. $\log_{10}(0,0000001)$; | h. $\log_{10}(10^4)$; |
| d. $\log_5(125)$; | i. $\log_{\sqrt{32}}(32)$; |
| e. $\log_8(16)$; | j. $\log_{16}(8)$. |

8.2. Sachant que $\log_{10} 2 \approx 0,30103\dots$, évaluer le nombre de chiffres de 2^{56} .

8.3. Calculer x tel que

- | | |
|------------------------|--|
| a) $\log_x 5 = 0,5$; | d) $\log_x a = a$ ($a > 0$ et $a \neq 1$); |
| b) $\log_x 8 = -1,5$; | e) $\log_x a = -a$ ($a > 0$ et $a \neq 1$); |
| c) $\log_x 2 = -2$ | f) $\log_x a = \frac{1}{a}$ ($a > 0$ et $a \neq 1$). |

8.4. Pour quelles valeurs de a et b réels avons-nous $\log_a b < 0$?

8.5. Démontrer les identités

- a) $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c = 1$;
- b) $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} = \frac{1}{\log_{ab} x}$.

8.6. Calculer en fonction de $a = \log_{10} 2$:

- a) $\log_{10} 5$; b) $\log_{10} 125$; c) $\log_{10} 2,5$.

8.7. Le logarithme d'un nombre vaut 3 dans une certaine base. Ce logarithme vaut 4 si l'on double la base. Quel est ce nombre? Quelle est cette base?

8.8. Pour quelle valeur de x la quantité $\log_x 5$ est-elle d'une unité plus grande que $\log_x 4$?

8.9. Simplifier l'expression $\log_a (\log_a a^{a^x})$.

8.10. Résoudre les équations suivantes :

- a) $\log_3(x+2) + 1 = \log_3(x^2 + 4x)$;
- b) $\log x + \log(x^2 + 2x - 1) = -\log 2$;
- c) $\log_5(5^x - 7) = \log_{25} 324 + 2 - x$;
- d) $2\log_2 x + \log_x 2 = 3$;
- e) $4\log x = \log(x^2 - 2) + \log 8$;
- f) $\frac{1}{\log_{3x} 30x} + \frac{1}{\log_{2x} 30x} + \frac{1}{\log_{x-2} 30x} = 1$;
- g) $(\log_4 x)^2 - \log_x x + 1 = 0$.

8.11. Trouver toutes les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x^y = 10, \\ 2y - \log_{10} x = 1. \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de a avons-nous $x = y$?

8.12. Résoudre le système

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2, \\ 4x + \frac{y}{100} = 5. \end{cases}$$

8.13. Soit la courbe de \mathbb{R}^2 d'équation $y = \log_a x$.

- a) Quelle est la valeur de l'abscisse du point de la courbe où la tangente passe par l'origine ?
 b) Quelle valeur doit prendre a pour que cette tangente soit inclinée à 45° sur l'axe des x ?

8.14. Déterminer les plus grands domaines de définition des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

a) $y = \ln \left(\frac{3-2x}{3+2x} \right)$; b) $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$.

8.15. Résoudre les équations exponentielles suivantes :

- a) $2^x + 2^{x+1} = 3$; e) $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} = 27$;
 b) $3^{2x+1} + 9^x = 324$; f) $2^{x+1} + 4^x = 80$;
 c) $e^x + e^{-x} = 2$; g) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$;
 d) $\left(\frac{9}{4}\right)^x - \frac{8}{27} = 0$; h) $2(e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x}$.

8.16. Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles l'équation

$$e^{2x} - 2e^x + a = 0$$

admet des solutions. Pour les valeurs trouvées, résoudre l'équation.

8.17. Pour quelles valeurs du paramètre m le système

$$\begin{cases} e^{2x} - 7e^x + 12 = 0 \\ e^{2x} - 3e^x + m = 0 \end{cases}$$

admet-il des solutions ? Quelles sont les solutions correspondantes ?

8.18. Déterminer les coordonnées du point de contact de la tangente menée par l'origine au graphe de la fonction $x \mapsto y = 2^x$.

8.19. Pour quelles valeurs du paramètre a les courbes d'équations $y = e^{2x} + 1$ et $y = 2ae^x$ ont-elles des points d'intersection ? Pour quelle(s) valeur(s) de a n'ont-elles qu'un seul point d'intersection ? Montrer qu'elles sont alors tangentes en ce point et écrire l'équation de la tangente commune.

8.20. Calculer la valeur de chacune des fonctions suivantes au point indiqué :

- a) $y = 2 \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$, pour $x = \frac{1}{2} \ln 3$;
 b) $y = 3 \operatorname{ch} x - 2 \operatorname{sh} x$, pour $x = \frac{1}{2} \ln 2$;
 c) $y = \operatorname{ch} 2x + 2 \operatorname{sh} 2x$, pour $x = \frac{1}{2} \ln 5$.

8.21. Calculer les dérivées premières des fonctions $x \mapsto y$ suivantes :

- a) $y = \ln(x^2 + 1)$; h) $y = \operatorname{sh} x \sin x$;
 b) $y = \ln(\ln x)$; i) $y = \operatorname{argsh} \sqrt{x+1}$;
 c) $y = \log_5 \frac{x^2+1}{x^2-1}$; j) $y = \operatorname{argth} \frac{x}{3}$;
 d) $y = 2^{\sqrt{x}}$; k) $y = \operatorname{argch} e^{3x}$;
 e) $y = 5^{\operatorname{tg} 2x}$; l) $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$;
 f) $y = x^{1/x}$; m) $y = \ln[(2x^2+3)^{1/4}(x^3-6)^{1/3}(3x^4+7)^{1/2}]$;
 g) $y = x^{\ln x}$; n) $y = e^{\frac{1+x}{1-x}}$.

8.22. Vérifier que si $y = e^{x^2}$, alors

$$y^{(n)} = 2(n-1)y^{(n-2)} + 2xy^{(n)}$$

pour $n > 1$. Calculer la cinquième dérivée de e^{x^2} en $x = 1$.

8.23. Démontrer les identités suivantes :

- a) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$;

b) $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}$;
 c) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$.

8.24. Pour chacune des fonctions suivantes déterminer :

- a) son domaine de définition ;
 b) sa fonction réciproque ;
 c) le domaine de définition de la fonction réciproque.
 1^o $y = \ln(\arccos x)$;

2^o $y = \arctan \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$;

3^o $y = 10^{\frac{1-x}{1+x}}$;

4^o $y = e^{\sin 3x}$;

5^o $y = \arccos e^{x+1}$.

8.25. Tracer le graphe de la fonction cosécante. Cette fonction est-elle périodique, continue ? Quelle est sa dérivée ?

8.26. Considérons la fonction sécante appliquant x sur $\operatorname{séc} x = \frac{1}{\cos x}$.

- a) Esquisser son graphe.
 b) Déterminer les asymptotes.
 c) Proposer une définition de la fonction $x \mapsto \operatorname{arcséc} x$. Quel domaine a-t-elle ? Quelle est son image ?
 d) Tracer le graphe de la fonction arc sécante.
 e) Calculer la dérivée de la fonction arc sécante.

8.27. En vue d'étudier des temps d'exécution d'algorithmes, on définit parfois la *taille* α d'un nombre naturel m comme étant

$$\alpha = 1 + \lceil \log_2(|m| + 1) \rceil.$$

a) Que vaut la taille de

7 ? 9 ? - 11 ? 1 ? - 1 ? 0 ?

b) Soit deux nombres m et n de tailles respectives α et β . Trouver une « bonne » majoration de la taille du produit mn .

8.28. Le passage par les logarithmes aide également au calcul des dérivées. Par exemple, soit $f(x) = x^x$; de

$$\ln f(x) = x \ln x,$$

nous déduisons en dérivant par rapport à x

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln x) + \frac{x}{x},$$

donc

$$f'(x) = (1 + \ln x)f(x)$$

et

$$f'(x) = (1 + \ln x)x^x.$$

En utilisant la même méthode, calculer la dérivée de chacune des fonctions f données par

- a) $f(x) = x^r$, avec $r \in \mathbb{R}$;
 b) $f(x) = \sqrt[5]{(x-3)^3(x+1)^2}$;
 c) $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x)$, où f_1, f_2, f_3 sont des fonctions dérivables ;
 d) $f(x) = a^x$, avec $a \in \mathbb{R}$;
 e) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$;
 f) $f(x) = (\sin x)^{\ln \operatorname{tg} x}$.

8.29. Le graphique semi-logarithmique d'une fonction $x \mapsto f(x)$ s'obtient en portant x en abscisse et $\ln f(x)$ en ordonnée (lorsque $f(x) > 0$).

a) Tracer le graphique semi-logarithmique des fonctions f_i données pour $i = 1, 2, 3$ par

$$f_1(x) = 5e^{3x};$$

$$f_2(x) = e^3 \sqrt[5]{x^3};$$

$$f_3(x) = 2^x.$$

b) Quelles sont les fonctions dont les graphiques semi-logarithmiques sont des droites ?

c) Tracer dans un même système d'axes les graphiques semi-logarithmiques donnés pour $i = 4, 5, 6$ par

$$f_4(x) = 5 \cdot 3^x;$$

$$f_5(x) = 4^x;$$

$$f_6(x) = 10 \cdot 2^x.$$

d) Si au lieu de porter en ordonnée $\ln f(x)$ on décide plutôt de porter $\log_{10} f(x)$, comment se modifie le graphique semi-logarithmique ?

8.30. Le graphique logarithmique d'une fonction $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto f(x)$ s'obtient en portant $\ln x$ en abscisse et $\ln f(x)$ en ordonnée.

a) Tracer le graphique logarithmique des fonctions f_i données pour $i = 1, 2, 3$ par

$$f_1(x) = e^3 \sqrt[5]{x^3};$$

$$f_2(x) = 3^x;$$

$$f_3(x) = e^{e^x}.$$

b) Quelles sont les fonctions dont les graphiques logarithmiques sont des droites ?

c) Tracer dans un même système d'axes les graphiques logarithmiques des fonctions f_i données pour $i = 4, 5, 6$ par

$$f_4(x) = x^2;$$

$$f_5(x) = x^{3/2};$$

$$f_6(x) = 10x^{3/2}.$$

8.31. Tracer dans un même système d'axes les graphes des fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique. Déterminer les asymptotes.

8.32. Tracer le graphe de la fonction sinus hyperbolique. Admet-il des asymptotes ? La fonction est-elle paire, impaire, périodique ?

8.33. Tracer le graphe de la fonction argsh. Admet-il des droites asymptotes ? Établissez la formule qui donne la dérivée de la fonction argsh.

8.34. Pour quelle(s) valeur(s) de x réel avons-nous

a) $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$?

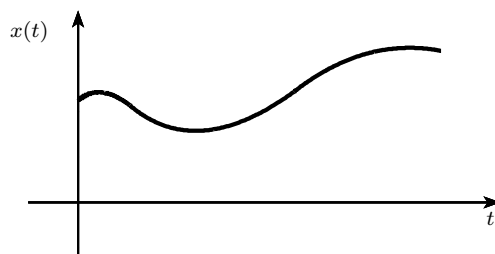
b) $\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$?

c) $\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$?

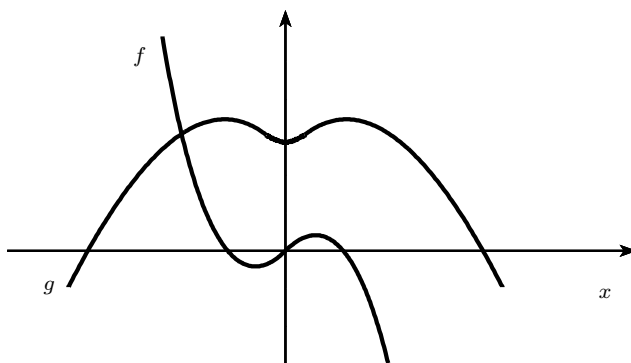
Chapitre 9

Dérivées

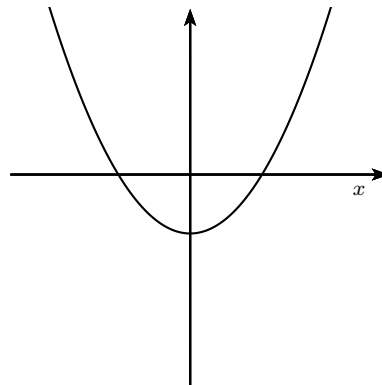
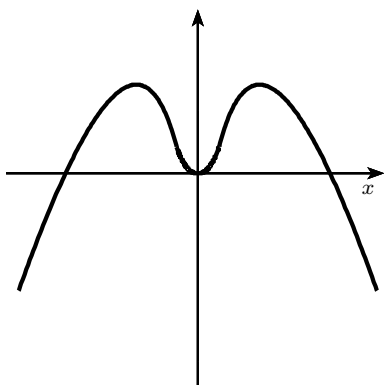
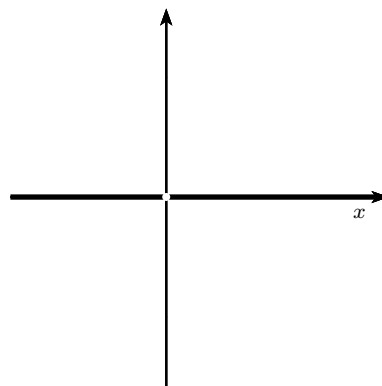
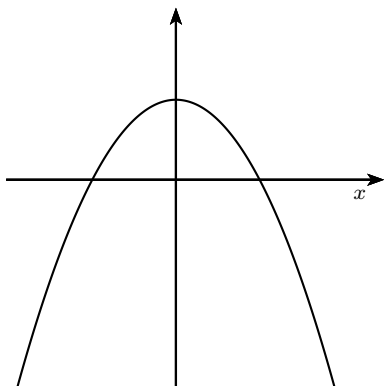
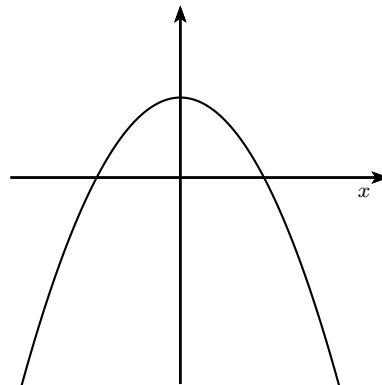
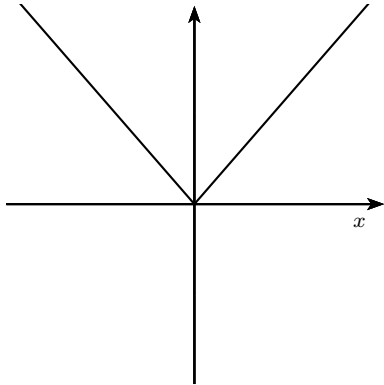
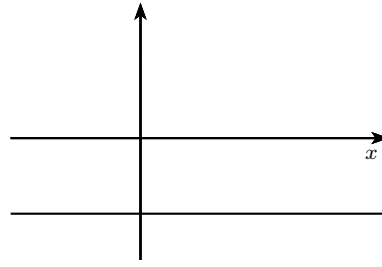
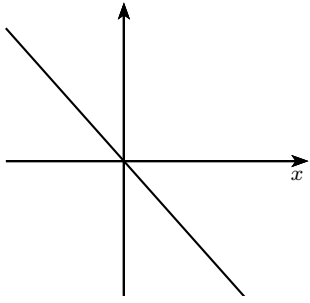
9.1. L'abscisse x d'un objet sur un axe est donnée en fonction du temps t par le graphe ci-dessous. Esquisser le graphe donnant la vitesse de cet objet en fonction du temps.

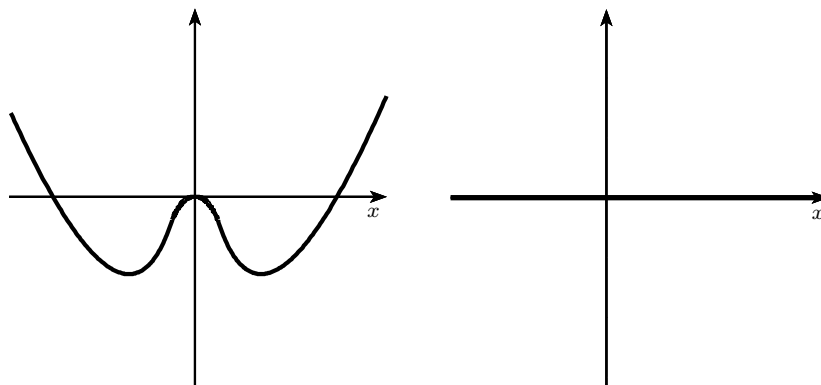


9.2. Voici, dans le même système d'axes, les graphes de deux fonctions f et g . Laquelle de ces deux fonctions est la dérivée de l'autre ?



9.3. Voici dans la colonne de gauche les graphes de cinq fonctions. La colonne de droite donne, dans le désordre, les graphes des dérivées secondes. Rétablissez l'ordre.





9.4. Donner, pour chacune des fonctions $x \mapsto y$ suivantes, le domaine de définition et la nature des points où la dérivée première s'annule ou devient infinie :

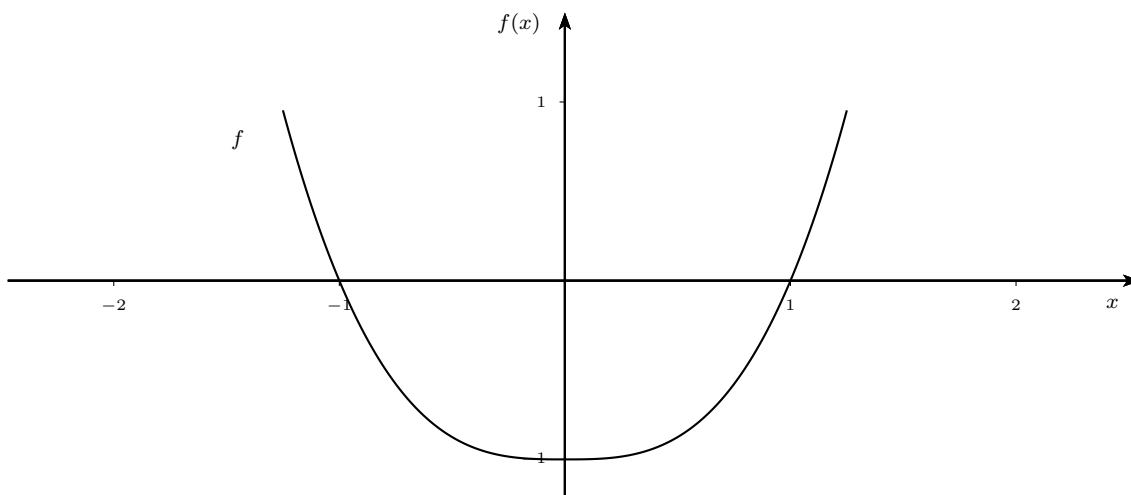
a) $y = \sqrt{x^2(x+1)}$; b) $y = (x^3 - 3x + 2)^{1/3}$; c) $y = 2 + \sqrt[3]{x^2}$.

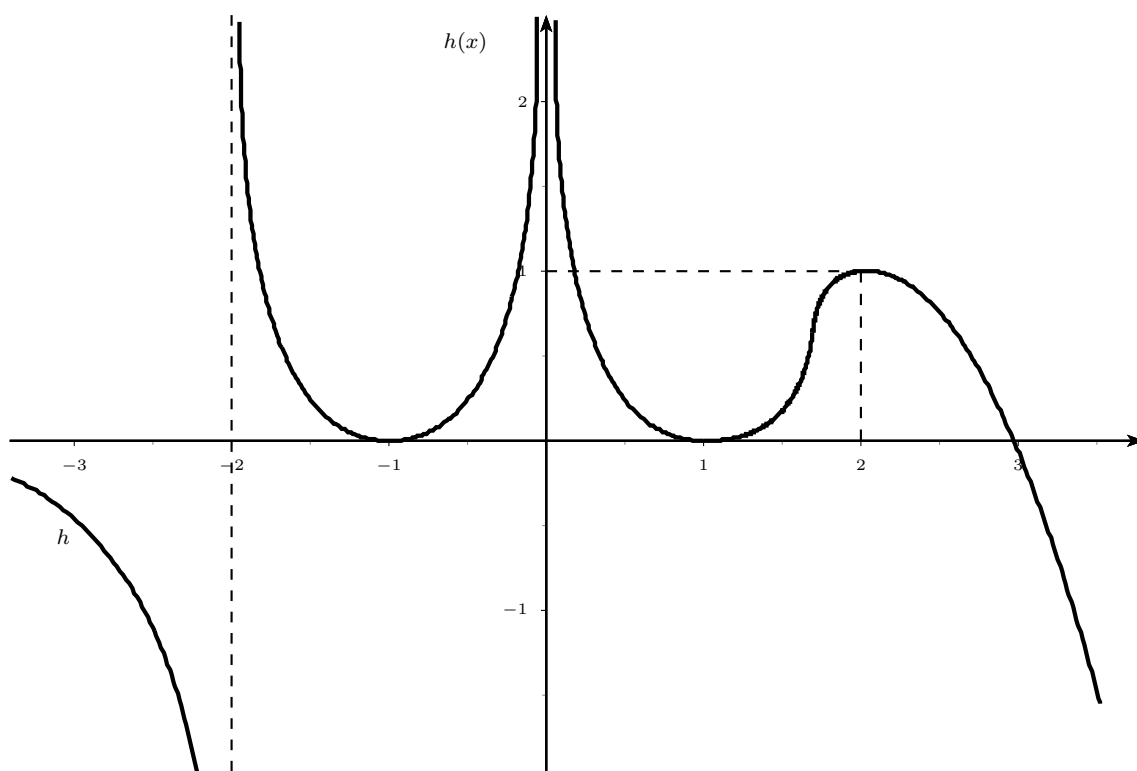
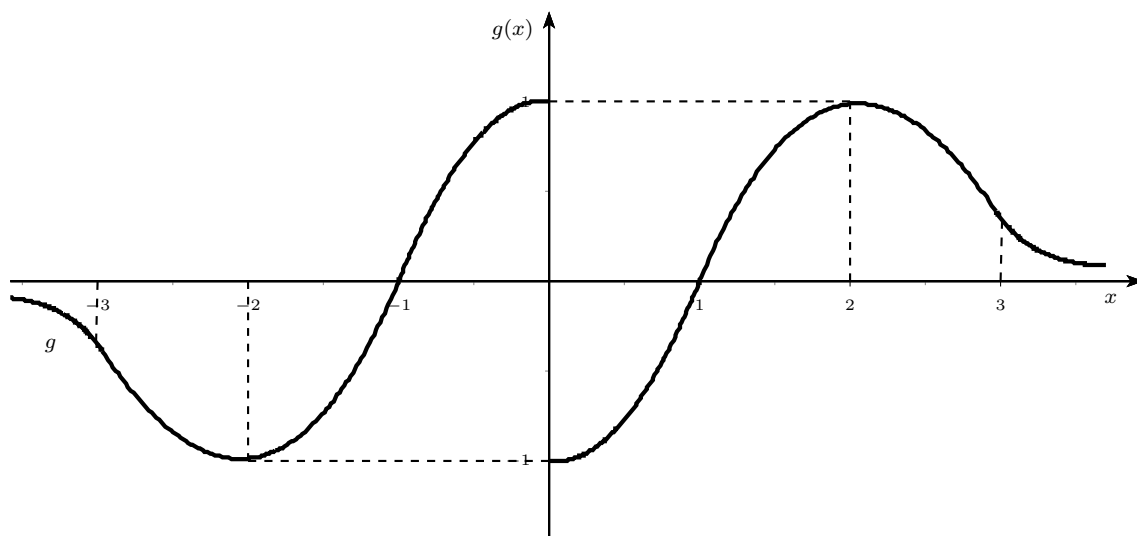
9.5. Dans un même système de coordonnées, tracer les graphes de la fonction $y = y(x)$ donnée et de sa dérivée, pour :

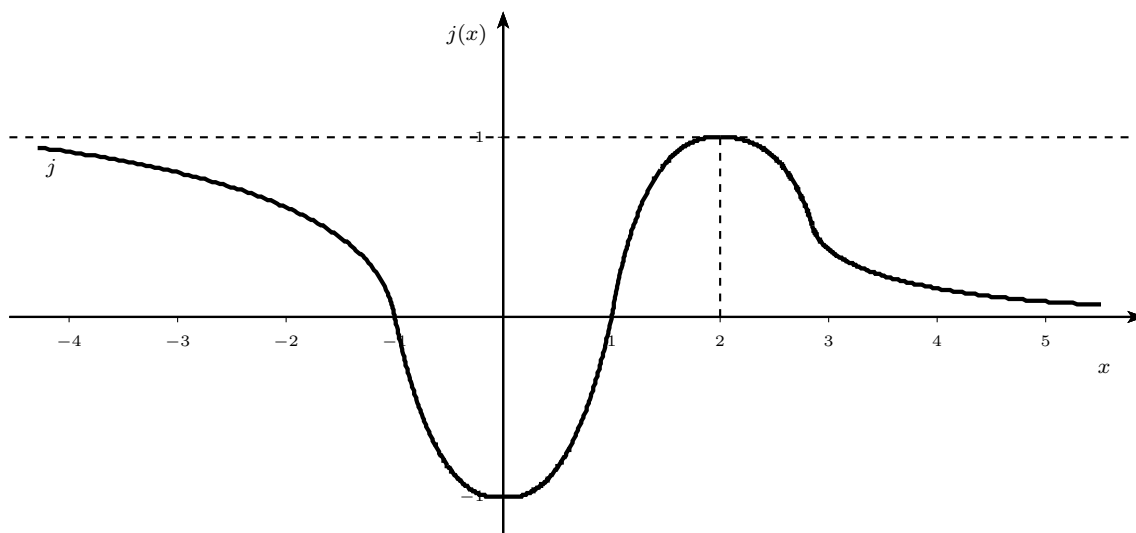
a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$; b) $y = \sin^2 x$.

9.6. On donne le graphe d'une fonction f (ou g , etc.). On demande de dessiner (allure grossière)

- a) le graphe de la fonction dérivée f' de f ;
- b) le graphe de la fonction $\frac{1}{f}$;
- c) le graphe de la fonction dérivée $\left(\frac{1}{f}\right)'$ de la fonction $\frac{1}{f}$.

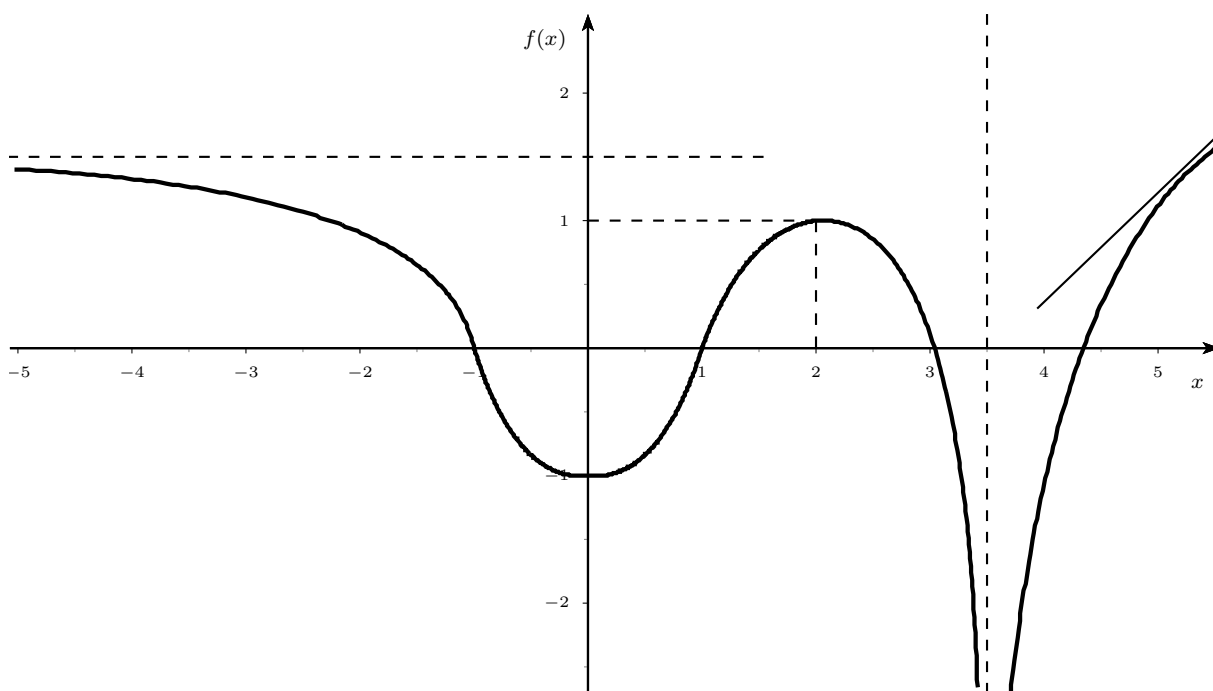






9.7. On donne le graphe d'une fonction $x \mapsto f(x)$. On demande de dessiner (allure grossière)

- a) le graphe de la fonction $x \mapsto f(-x)$;
- b) le graphe de la fonction $x \mapsto |f(x)|$;
- c) le graphe de la fonction $x \mapsto f(|x|)$;
- d) le graphe de la fonction $x \mapsto -f(x)$;
- e) le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$;
- f) le graphe de la fonction $x \mapsto f'(x)$.



9.8. Calculer, en utilisant la définition, les dérivées premières des fonctions appliquant x sur

a) $y = x^2$; b) $y = \sqrt{x}$; c) $y = \frac{1}{2x+1}$.

9.9. Soit la fonction appliquant x sur $f(x) = (x-1)^2$. Calculer l'accroissement Δf de f et la différentielle df de f , en $x = 3$ pour

a) $\Delta x = 0,1$; b) $\Delta x = 0,01$.

9.10. Calculer les dérivées premières des fonctions $y = y(x)$ suivantes (où a, b et c sont des constantes) :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x^6 - 3x^4 + 19x^3 - 8x + 4; & \text{h) } y = (2-x)(1-5x); \\ \text{b) } y = \frac{x^8}{8(1-x^2)^4}; & \text{i) } y = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}; \\ \text{c) } y = (2x+1)(3x+2)\sqrt[3]{3x+2}; & \text{j) } y = \frac{1}{8}(1+x^3)^{8/3} - \frac{1}{5}(1+x^3)^{5/3}; \\ \text{d) } y = \frac{x(3x+2x^2)}{3\sqrt{1+x^2}^3}; & \text{k) } y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}; \\ \text{e) } y = \frac{x^2-6x+8}{x^2-2x+1}; & \text{l) } y = \frac{x^2+1}{x^2-1}; \\ \text{f) } y = \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}; & \text{m) } y = \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}; \\ \text{g) } y = \sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}; & \text{n) } y = \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{\sqrt{1-x+x^2}}. \end{array}$$

9.11. Calculer les valeurs des dérivées première, deuxième et troisième des fonctions $y = y(x)$ suivantes aux points indiqués.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x^4 + 6x^4 - x^3, & x = 2; \\ \text{b) } y = x^{3/2}, & x = 0; \\ \text{c) } y = x + \frac{1}{x}, & x = \frac{1}{2}; \\ \text{d) } y = \frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^3+3}}, & x = 0; \\ \text{e) } y = \frac{1+x^2-x^4}{\sqrt{1+x^2+x^2}}, & x = 1. \end{array}$$

9.12. Calculer la dérivée première par rapport à x de

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = t^2 - 4t, & \text{si } t = \sqrt{2x^2+1}; \\ \text{b) } y = t - 3t^2, & \text{si } t = \sqrt{x^2-6x+3}; \\ \text{c) } y = \sqrt{3t^2-5t+4}, & \text{si } t = x^2. \end{array}$$

9.13. Soit la courbe de \mathbb{R}^2 d'équation $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$. Quelles sont les pentes de ses tangentes aux points d'abscisse 1 et 2 ?

9.14. Former les équations des tangentes et des normales à la courbe d'équation $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ dans \mathbb{R}^2 , aux points d'intersection avec l'axe des abscisses.

9.15. Déterminer les points où les tangentes à la courbe d'équation $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ dans \mathbb{R}^2 sont parallèles à l'axe des abscisses.

9.16. Déterminer le(s) point(s) où la tangente à la courbe de \mathbb{R}^2 d'équation

$$y = \frac{x}{1-x^2}$$

fait un angle de 45° avec ox .

9.17. Vérifier que les courbes d'équations respectives $x^2 - y^2 = 1$ et $y = \frac{1}{x}$ dans \mathbb{R}^2 sont orthogonales.

9.18. Soit la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Tracer le graphe de la fonction périodique g qui prolonge f , telle que le domaine de définition de g soit \mathbb{R} et la période de g soit 2. Définir analytiquement cette fonction, donner son image, le domaine de définition de la fonction dérivée première. Cette fonction g est-elle paire ou impaire ? Et sa dérivée ?

9.19. Un voyage a été effectué à la vitesse moyenne de 60 km/h. Est-il vrai que la vitesse instantanée fut, à un certain instant, 60 km/h ? Justifiez votre réponse.

9.20. Supposons que la température, à la surface de la terre, varie de façon différentiable. Existe-t-il au moins 2 points de l'équateur ayant même température ? Justifiez votre réponse.

9.21. Soit la courbe de \mathbb{R}^2 d'équation $y = x^2 + px + 5$. Déterminer p pour que la tangente au point a d'abscisse -1 soit parallèle à la première bissectrice. Écrire les équations de la tangente et de la normale en a .

9.22. On considère la courbe d'équation $y = x^2 + px + q$ dans \mathbb{R}^2 . Déterminer p et q pour que cette courbe soit tangente à la droite d'équation $y = x - 1$ au point $(3,2)$.

9.23. Déterminer le(s) point(s) où la normale à la courbe $y = x^3 + x$ est parallèle à $x + 4y + 6 = 0$. Pour chaque point, donner l'équation de la normale.

9.24. Déterminer les coordonnées du point de contact et l'équation de la tangente menée par l'origine à la courbe d'équation $y = e^x$ dans \mathbb{R}^2 (la dérivée de e^x vaut e^x).

9.25. Déterminer b et c pour que les courbes de \mathbb{R}^2 d'équations $y = \frac{1-x}{1+x}$ et $y = x^2 + bx + c$ se coupent perpendiculairement au point $(0,1)$.

9.26. Sachant que le rayon d'une surface circulaire plane augmente à la vitesse constante de 0,1 cm/sec, quelle est la vitesse à laquelle augmente l'aire de cette surface lorsque

- a) le rayon mesure 10 cm ;
- b) le rayon mesure 20 cm.

9.27. Le rayon d'une sphère augmente de 0,25 m/sec. Lorsque le rayon vaut 3 m, quelle est la vitesse de variation

- a) de la surface de la sphère ?
- b) du volume ?

9.28. Si f est une fonction paire (impaire), montrer que sa dérivée f' est impaire (paire). La réciproque est-elle vraie ?

9.29. Pour les fonctions suivantes, $f(a) = f(b) = 0$ et pourtant f' ne s'annule pas sur l'intervalle $]a, b[$. Pourquoi le théorème de Rolle ne s'applique-t-il pas ?

- a) $y = \operatorname{tg} x$, sur $(0, \pi)$;
- b) $y = 3^{|x|} - 9$, sur $(-2, 2)$;
- c) $y = 1 - x^{2/3}$, sur $(-1, 1)$.

9.30. Montrer que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

satisfait aux conditions du théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0, 2]$ et déterminer toutes les valeurs de c prévues par ce théorème. Faire le graphique.

9.31. Appliquer la formule des accroissements finis sur $[x, x+h]$ à chacune des fonctions $x \mapsto y$ suivantes (où $a, b, c \in \mathbb{R}$) :

- a) $y = ax^2 + bx + c$;
- b) $y = a \sin(bx + c)$.

Dans le premier cas, déterminer la valeur de θ .

9.32. Une plaque circulaire de métal se dilate sous l'influence de la chaleur de telle sorte que son rayon grandit à la vitesse de 0,01 cm/s. À quelle vitesse grandit la surface de cette plaque au moment où le rayon atteint 2 cm ?

9.33. Une fonction réelle d'une variable réelle est définie par

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

- a) Quel est le plus grand domaine de définition de la fonction f ?
- b) Étudier la croissance de la fonction f .
- c) Déterminer toutes les asymptotes au graphe de la fonction f .
- d) Tracer le graphe de la fonction f .

e) Soit g la fonction inverse ou réciproque de la fonction f (définie de sorte que son domaine soit aussi grand que possible). Calculer une expression de la dérivée $g'(t)$ sous forme de quotient de deux polynômes en t .

9.34. Donnez une autre notation, sans limite, pour

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

(f étant supposée suffisamment régulière).

9.35. Esquisser, dans un système d'axes, les graphes des fonctions $f, f', f^{-1}, (f^{-1})'$ si

- a) $f(x) = x^{1/3}$;
- b) $f(x) = x^{3/8}$, pour $x \geq 0$.

9.36. Vérifier que

$$(x^2 e^x)^{n/} = [(n-1)n + 2nx + x^2]e^x.$$

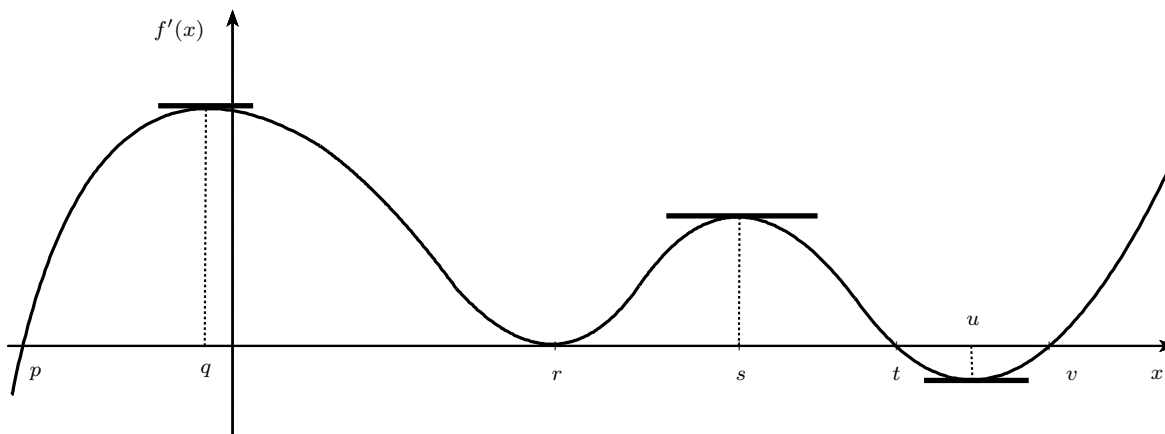
Calculer la 200ème dérivée de $x^2 e^x$ en $x = 1$.

Chapitre 10

Utilisation des dérivées

Dans tout ce Chapitre, l'expression « Développement de MacLaurin » désignera le développement de Taylor en 0.

10.1. Si le graphe ci-dessous est celui de la fonction dérivée f' , pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction $x \mapsto f(x)$ admet-elle



- a) un minimum local ?
- b) un maximum local ?
- c) un point d'inflexion à tangente horizontale ?
- d) un point d'inflexion ?

Sur quel sous-ensemble de l'intervalle $[a, h]$ la fonction f est-elle

- e) croissante ?
- f) décroissante ?

10.2. Si les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possèdent en tout point une dérivée seconde, lesquelles des assertions suivantes sont vraies ?

- a) Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x réel, $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout x réel.
- b) Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x réel, $f''(x) \leq g''(x)$ pour tout x réel.
- c) Si $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout x réel, $f(x) \leq g(x)$ pour tout x réel.
- d) Si $f(0) \leq g(0)$ et $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout x réel positif, $f(x) \leq g(x)$ pour tout x réel positif.

10.3. Déterminer les maximums et minimums de la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^9 e^{-x^2}.$$

Recherchez des approximations de points d'inflexion du graphe de f . Tracez ensuite le graphe de f .

10.4. Déterminer les extrémums des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

- a) $y = 2 \sin x + \cos 2x$;
- b) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$;
- c) $y = x^2 + \frac{250}{x}$.

10.5. Si la somme de deux nombres réels est 12, quelle est la plus grande valeur atteinte par leur produit ?

10.6. Prouver qu'un rectangle de périmètre donné a toujours une aire inférieure ou égale à celle du carré de même périmètre.

10.7. Un fermier désire clôturer un champ rectangulaire par du fil métallique sur trois côtés et par une haie sur le quatrième. S'il possède 2400 m de fil, quelle est la plus grande surface qu'il peut clôturer ?

10.8. Un carton publicitaire doit contenir 54 cm² de texte imprimé. Si on laisse une marge de 1 cm en haut et bas de page, et de 1,5 cm de chaque côté, trouver les dimensions les plus économiques du carton. (NB : Le prix du carton est directement proportionnel à sa superficie!).

10.9. La somme de deux nombres est 12. Trouver ces nombres si

- a) la somme de leurs carrés est minimal ;
- b) le produit de l'un avec le carré de l'autre est maximal ;
- c) le produit de l'un avec le cube de l'autre est maximal.

10.10. Dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 , on considère le point $c = (3, 5)$. Par ce point on trace une droite D qui couple l'axe ox en un point a d'abscisse positive et l'axe oy en un point b d'ordonnée positive. Comment doit être la droite D pour que le triangle oab ait une aire minimum ?

10.11. Pour quelles valeurs de k la fonction $x \mapsto y$ avec

$$y = \cos 2x + k \cos x$$

admet-elle un extrémum d'abscisse $x = \frac{\pi}{3}$?

10.12. Déterminer la fonction sinusoïdale $y = C \sin(x + \varphi)$ qui atteigne le maximum 2 pour $x = 1$ et applique 0 sur 0.

10.13. Déterminer n pour que la fonction

$$y = (x - 6)^n e^x$$

admette un extrémum en $x = 4$. Quelle est la nature de cet extrémum ?

10.14. Déterminer les valeurs de p et q telles que la fonction appliquant x sur

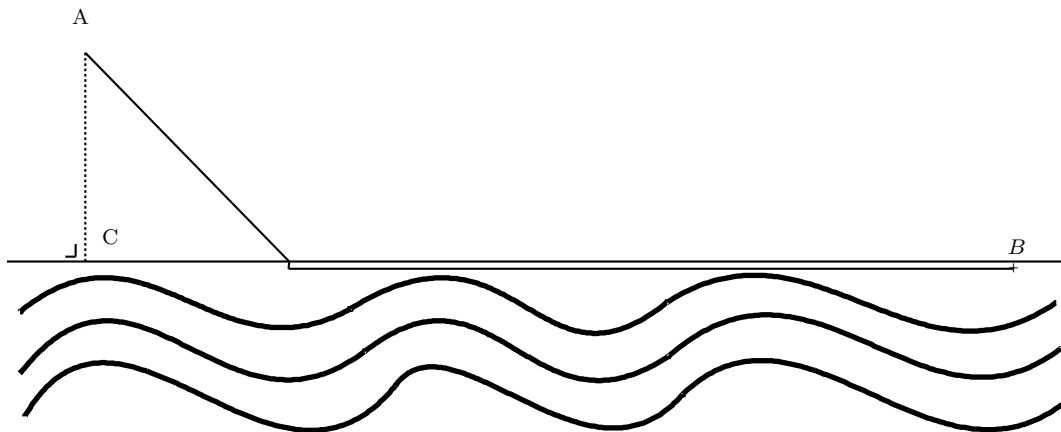
$$y = \frac{x^2 + px + q^2}{x}$$

ait deux extrémums de valeurs respectivement 0 et 4. Quelles valeurs de x donnent ces extrémums ? Quelles sont les natures de ces extrémums ?

10.15. Déterminer les points d'inflexion des courbes de \mathbb{R}^2 d'équation

- a) $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$;
- b) $y = e^{-x^2}$;
- c) $y = \frac{\sin x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}$.

10.16. Une personne doit se rendre de A en B sur la figure, d'abord en marchant à la vitesse v_1 , puis en nageant dans le canal à la vitesse v_2



Déterminez en fonction de v_1, v_2 et de la longueur $|CB|$ en quel point la personne doit se mettre à l'eau pour minimiser son temps de déplacement de A à B . Le bord du canal est supposé rectiligne.

10.17. Soit la fonction qui applique x sur

$$y = 2a \sin bx - a \sin bx.$$

Déterminez les constantes a et b pour que cette fonction applique 0 sur 0 et atteigne le maximum $y = 2$ en $x = 1$.

10.18. Donner pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition et la nature des points où la dérivée première s'annule ou devient infinie :

- a) $y = \sqrt{x^2(x + 1)}$;

- b) $y = (x^3 - 3x + 2)^{1/3}$;
 c) $y = 2\sqrt[3]{x^2}$.

10.19. Soit la fonction f spécifiée par

$$f(x) = \frac{x^2 + (m-2)x - 10}{x^2 - 2x - 3}$$

où m est un paramètre réel ;

- a) donner son domaine de définition ;
 b) pour quelles valeurs de m la fonction f est-elle partout croissante ?
 c) pour quelles valeurs de m la fonction f possède-t-elle un maximum et un minimum ?
 d) les graphes de ces fonctions f passent-ils tous par un même point ? Si oui, lequel ?

10.20. Esquisser, dans un même système de coordonnées, le graphe de la fonction $y = y(x)$ donnée et de sa dérivée :

- a) $y = e^{x/2}$; b) $y = \ln|x^2 - 1|$.

10.21. Représenter dans un même système d'axes et sur le domaine $[-2, 2]$ les fonctions f spécifiées par

- a) $f(x) = 2^x$, $f(x) = 2^{x-1}$;
 b) $f(x) = 2^{|2x|}$, $f(x) = 2^x - 1$.

10.22. Faire le graphe des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

- a) $y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$; b) $y = \frac{x^3 - x + 1}{x^2}$;
 c) $y = 3x^{2/3} - 2x$; d) $y = \sqrt{x^2(x+1)}$;
 e) $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; f) $y = \frac{x^3 - x + 1}{x^2}$;
 g) $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$; h) $y = \frac{x}{1+x^2}$;
 i) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$; j) $y = \frac{x^2}{x-1}$;
 k) $y = \frac{x}{1+x^2}$; l) $y = \sqrt{-x^2-1}$;
 m) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; n) $y = \left| \frac{(x+2)(x-1)}{x-2} \right|$;
 o) $y = x^2(x-3)^{1/3}$; p) $y = \frac{(x+1)^2}{x^3}$;
 q) $y = x^2 \arctan \frac{1}{1-x}$; r) $y = xe^{1/x}$;
 s) $y = xe^{-x^2}$; t) $y = x^2e^{-x}$;
 u) $y = \frac{\ln x}{x}$; v) $y = x \ln x$;
 w) $y = x \ln^2 x$; x) $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$;
 y) $y = \frac{1}{x} + 2 \ln x$; z) $y = \sqrt{x} \log x$;
 aa) $y = 2 \ln x - 1 + \frac{1}{x}$; bb) $y = 2^{1/x}$;
 cc) $y = \frac{e^x}{x}$; dd) $y = \sqrt{x}e^x$.

10.23. Soit $f(x) = \sin(x)$. Esquisser les graphes de f et de ses polynômes de Taylor à l'ordre 0, 1, 2 et 3 en 0.

10.24. Écrire le polynôme de Taylor de degré n centré en 0 pour les fonctions

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

10.25. Approcher e avec une erreur inférieure au millième (10^{-3}) en utilisant le développement de Taylor de l'exponentielle.

10.26. Développer en série de Taylor au voisinage du point indiqué chacune des fonctions suivantes :

- a) $y = x \ln x$, pour $x_0 = 1$, jusqu'au terme en x^6 , écrire R_7 ;
 b) $y = 3^x$, pour $x = 2$, jusqu'au terme en x^3 , écrire R_4 ;
 c) $y = e^{3x}$, pour $x = \frac{1}{3}$, jusqu'au terme en x^3 , écrire R_4 ;
 d) $y = \cos x$, pour $x = \frac{\pi}{4}$, jusqu'au terme en x^3 . En se limitant au terme en x^2 , en déduire la valeur de $\cos 46^\circ$

$$\left(\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} \approx 0,70711\right);$$

- e) $y = \frac{\ln x}{x^2}$, pour $x = 1$, jusqu'au terme en x^3 , écrire R_4 ;
- f) $y = \ln x$, pour $x_0 = 1$, jusqu'au terme en x^5 , écrire R_6 ;
- g) $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$, pour $x = 2$;
- h) $y = e^{\frac{x}{2}}$, pour $x = 2$, écrire le terme général et le reste;
- i) $y = e^{\sin x}$, pour $x = \frac{\pi}{2}$, jusqu'au terme en x^2 , écrire R_3 .

10.27. Écrire le développement de Taylor à l'ordre 3, avec le reste, de la fonction $y = \sqrt[3]{x}$ dans le voisinage de $x = 27$. Utiliser ce développement pour calculer $\sqrt[3]{29}$ et estimer l'erreur commise.

10.28. Calculer en utilisant le développement de Taylor de $y = \sin x$ au voisinage de $x = \pi/6$ une valeur approchée de $\sin 32^\circ$ (se limiter au terme du second degré).

10.29. Calculer en utilisant le développement de MacLaurin de $y = 3^{-x}$ une valeur approchée de $\frac{1}{e}$. Evaluer l'erreur si on se limite au terme en x^4 .

10.30. Calculer une valeur approchée de $\ln 1,02$ en utilisant le développement de MacLaurin de $\ln(1+x)$. Déterminer le nombre de termes à prendre pour que l'erreur soit inférieure à $5 \cdot 10^{-8}$.

10.31. Calculer une valeur approchée de $\sqrt{4,02}$ en utilisant le développement de MacLaurin de $y = \sqrt{4+x}$. Se limiter au terme en x^2 . Evaluer l'erreur.

10.32. Calculer $e^{0,1}$ en utilisant le développement de MacLaurin de $y = e^x$.

- a) Déterminer le nombre de termes à prendre pour que l'erreur soit inférieure à 10^{-3} .
- b) Représenter la courbe e^x et ses développements d'ordre 1, 2 et 3 sur le même graphique.

10.33. Dédire des développements de MacLaurin de e^x , $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ ceux des fonctions suivantes :

- a) $y = e^{-x^2/2}$;
- b) $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$;
- c) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

10.34. Donner le développement de MacLaurin de

- a) $y = 2^x$, jusqu'au terme en x^3 et écrire R_4 ;
- b) $y = \operatorname{sh} x$, jusqu'au terme en x^n et écrire R_{n+1} ;
- c) $y = \frac{1}{1-x}$, jusqu'au terme en x^n et écrire R_{n+1} ;
- d) $y = e^{-x} \cos x$, avec les 4 premiers termes non nuls;
- e) $y = e^x \sin x$, avec les 4 premiers termes non nuls;
- f) $y = xe^{-x}$, jusqu'au terme en x^n et écrire le reste.

10.35. En partant du développement de MacLaurin de e^x , donner

- a) les 4 premiers termes non nuls, le terme général et le reste du développement de MacLaurin de e^{-x^2} ;
- b) les 3 premiers termes non nuls et le terme général du développement de MacLaurin de $\operatorname{sh} x^2$.

10.36. En partant des développements en série de MacLaurin, vérifier que $2 \sin x \cos x = \sin 2x$.

10.37. En supposant que toutes les opérations effectuées soient permises, démontrer (en se servant des développements en séries de MacLaurin) que

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x; \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x. \end{aligned}$$

10.38. En partant du développement en série de MacLaurin de $y = \ln(1+x)$, déduire par dérivations successives le développement de

$$y = \frac{1}{(1+x^3)}$$

(la dérivation terme à terme étant supposée licite).

10.39. Écrire les développements de MacLaurin restreints aux 4 premiers termes non nuls des fonctions suivantes, en utilisant les développements des facteurs :

- a) $y = \operatorname{tg} x (= \frac{\sin x}{\cos x})$;
- b) $y = \sin 2x (= 2 \sin x \cos x)$;
- c) $y = (\sin x)\sqrt{1+x}$.

10.40. Écrire, à l'aide d'autres développements de MacLaurin, les 4 premiers termes non nuls du développements de $\sqrt{1+\sin x}$.

10.41. Écrire le développement de MacLaurin de $y = \sin^2 x$

- a) par $(\sin x)^2$ (jusqu'au terme en x^6);
- b) par $\frac{1}{2}(-\cos 2x)$ (donner le terme général).

10.42. On considère les développements de MacLaurin des fonctions appliquant x sur

$$\begin{aligned} y_1 &= e^x, \\ y_2 &= \frac{1+ax}{1+bx} \quad (a, b \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

- a) Déterminer a et b pour que les deux développements aient le plus grand nombre de termes identiques.
 b) Compte tenu des valeurs trouvées pour a et b , écrire l'approximation du quatrième ordre de la différence $y_1 - y_2$.
 c) Evaluer cette approximation en $x = 0,1$.

10.43. Utiliser les développements de MacLaurin pour évaluer

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$;
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{4}{e^{4x} - 1} \right)$;
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{x^2}$.

10.44. Calculer les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 - \operatorname{tg} x) - \operatorname{séc} 2x$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{coséc} x - \operatorname{cotg} x)$;
 e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{séc} x}{\operatorname{tg} x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$.

10.45. Déterminer le domaine de définition de la fonction qui applique x sur $y = \frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x$. Calculer ensuite sa « vraie valeur » en $x = 0$ (c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0} y$).

10.46. Calculer les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{cotg} x}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{x}}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{1}{x-1}}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2x}$;
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + 1 \right)^x$;
 g) $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \cos x - e^x)^{\ln x}$; h) $\lim_{x \rightarrow 1} (\log_2 x)^{x-1}$;
 i) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\sin x}$; l) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{cotg} x) \frac{1}{\ln x}$;
 m) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$; n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{x} + \beta \sin \frac{x}{x} \right)^x$;
 o) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$; p) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$.

10.47. Calculer la limite à gauche et la limite à droite pour $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ de la fonction

$$y = \cos x \cdot e^{\operatorname{tg} x}.$$

La fonction est-elle continue en $x = \frac{\pi}{2}$?

10.48. Calculer la limite à gauche et la limite à droite pour $x \rightarrow 0$ de la fonction

$$y = x e^{\frac{1}{x}}.$$

10.49. Déterminer toutes les relations du type « f est $O(g)$ » entre les fonctions de \mathbb{N} vers \mathbb{R} appliquant n sur

- $f_1(n) = 3n + 2$; $f_5(n) = n \log n$;
 $f_2(n) = 2n^3 + 5$; $f_6(n) = 2^n$;
 $f_3(n) = n^2 \log(n^2 + 2)$; $f_7(n) = 3^n$;
 $f_4(n) = n \log \log n$; $f_8(n) = 2^{\lfloor \log n \rfloor}$.

10.50. Voici le graphe d'une fonction f et une valeur particulière x_0 . En appliquant la méthode de Newton pour la recherche d'une racine de l'équation $f(x) = 0$ avec la valeur initiale x_0 , obtiendra-t-on une telle racine ?

10.51.

En partant de

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{1 + (a - 1)}$$

trouvez une approximation de $\sqrt[n]{a}$, où $a > 0$ (écrivez le développement de MacLaurin de $\sqrt[n]{1+x}$ au premier ordre).

Chapitre 11

Primitives

11.1. Soit f une fonction admettant comme primitive la fonction appliquant x sur $2\sin^2 x$. Déterminer parmi les expressions suivantes celles qui représentent aussi une primitive de f :

- a) $-\cos 2x$; c) $\cos x^2$;
b) $-\cos^2 x$; d) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

11.2. Donner, par intégration immédiate, une primitive de la fonction envoyant la valeur réelle x sur

- a) $\cos x$; n) $\frac{1}{\sin^2(x)}$;
b) $\sin(3x - 2)$ o) $\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$;
c) x^5 ; p) $(\operatorname{ch} x)(\operatorname{sh} x)$;
d) $\frac{1}{6x + 11}$; q) $\frac{x}{5x^2 - 1}$;
e) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$; r) $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$;
f) $\frac{1}{\cos^2 9x}$; s) $\cot(x)$;
g) e^{-x+5} ; t) 0;
h) $e^{\sin x} \cos x$; u) 1993;
i) 2^x ; v) $e^x \cos(e^x)$;
j) $\operatorname{sh}(-x + 6)$; w) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ (où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$);
k) $\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x + 1)}$; x) $\frac{1}{a^2 - x^2}$ (où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$);
l) $\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$; y) $\frac{\arctan x}{1 + x^2}$.
m) $\frac{1}{a^2 + x^2}$ (où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$);

11.3. Calculer, en décomposant l'intégrande :

- a) $\int (x + \sqrt{x}) dx$; c) $\int \cos^2(x - 2) dx$;
b) $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}\right) dx$; d) $\int \tan^2 x dx$.

11.4. Calculer, par changement de variable :

- | | |
|---|---|
| a) $\int e^{5x-3} dx;$ | i) $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$ |
| b) $\int x^2(1-x^3)^2 dx;$ | j) $\int 2^{x^2} x dx;$ |
| c) $\int x \operatorname{tg} 2x dx;$ | k) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}};$ |
| d) $\int \sin^2 x \cos x dx;$ | l) $\int \frac{e^{x/2}}{\sqrt{e^x - 2}} dx;$ |
| e) $\int \frac{x}{a^2 - x^2} dx;$ | m) $\int \frac{x^4 + 1}{\cos^2(x^5 + 5x)} dx;$ |
| f) $\int \frac{\cos x}{5 + \sin^2 x} dx;$ | n) $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx;$ |
| g) $\int \frac{dx}{x \ln x};$ | o) $\int \frac{1 - \arctan x}{1 + x^2} dx;$ |
| h) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}};$ | p) $\int (\cotg x)(\ln \sin x) dx.$ |

11.5. Calculer

$$\int \frac{2e^{1/x}}{x^2} dx,$$

puis déterminer toutes les fonctions $x \mapsto f(x)$ telles que

$$f'(x) = \frac{2e^{1/x}}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

11.6. Intégrer par parties la fonction appliquant x sur

- | | |
|---------------------------------------|-----------------------------|
| a) $x e^x;$ | i) $\sqrt{x^2 - 1};$ |
| b) $x^2 \ln x;$ | j) $x\sqrt{1+x};$ |
| c) $\arcsin x;$ | k) $e^{\arcsin x};$ |
| d) $x \arctan x;$ | l) $x^2 \ln(x^6 - 1);$ |
| e) $e^x \sin x;$ | m) $\ln x;$ |
| f) $\frac{1}{x} \ln(\ln x);$ | n) $\arctan x;$ |
| g) $x^n \ln x$ où $n \in \mathbb{N};$ | o) $\frac{\arcsin x}{x^2};$ |
| h) $x \operatorname{tg}^2 x;$ | p) $\frac{x}{\cos^2 x}.$ |

11.7. Calculer les intégrales indéfinies (de la forme $\int \frac{dx}{Q}$ avec Q trinôme du second degré en x) :

- | | |
|--|--|
| a) $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 4}$; | h) $\int \frac{3x - 1}{x^2 + 2x + 5} dx$; |
| b) $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}$; | i) $\int \frac{x + 4}{x^2 + 6x + 5} dx$; |
| c) $\int \frac{dx}{4 + 16x^2}$; | j) $\int \frac{7x + 1}{6x^2 + x - 1} dx$; |
| d) $\int \frac{dx}{2 - x^2}$; | k) $\int \frac{dx}{4x - x^2}$; |
| e) $\int \frac{dx}{4x^2 - 12x + 10}$; | l) $\int \frac{(2 - x)dx}{4x^2 + 4x - 3}$; |
| f) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x - 7}$; | m) $\int \frac{(2x - 3)dx}{4x^2 - 11}$; |
| g) $\int \frac{3x + 1}{1 - 4x^2} dx$; | n) $\int \frac{1}{b - t^2} dt$ où $b \in \mathbb{R}$. |

11.8. Calculer les intégrales indéfinies (de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{Q}}$, où Q est un trinôme du second degré en x) :

- | | |
|---|--|
| a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$; | d) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x - x^2}}$; |
| b) $\int \frac{dx}{\sqrt{15 + 2x - x^2}}$; | e) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - x - 1}}$; |
| c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x + 5)}}$; | f) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + x + 1}}$. |

11.9. Calculer les intégrales indéfinies (de la forme $\int \frac{L}{Q} dx$ ou $\int \frac{L}{\sqrt{Q}} dx$, avec L et Q polynômes en x de degrés 1 et 2 respectivement) :

- | | |
|---|--|
| a) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 66x - 11x^2}}$; | d) $\int \frac{3x + 5}{\sqrt{x(2x - 1)}} dx$; |
| b) $\int \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} dx$; | e) $\int \frac{x - 1}{x^2 + 2x + 1} dx$; |
| c) $\int \frac{x + 3}{\sqrt{3 + 4x - 4x^2}} dx$; | f) $\int \frac{6x + 5}{\sqrt{9x^2 + 1}} dx$. |

11.10. Décomposer en fractions simples les fonctions rationnelles de x données par :

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\frac{2x - 1}{x^2 - 1}$; | b) $\frac{2x - 1}{(x - 2)(x + 3)}$; | c) $\frac{x - 1}{(x + 1)^2(x^2 + x + 1)}$; |
| d) $\frac{2x + 1}{(x - 2)^3}$; | e) $\frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2}$; | f) $\frac{6}{x^3 - 1}$; |
| g) $\frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^3 + 1}$; | h) $\frac{x^2 + x + 2}{(x^2 + 2x + 3)^2}$; | i) $\frac{1}{x^4 - 1}$. |

11.11. Calculer les intégrales indéfinies de fonctions rationnelles :

- | | |
|---|---------------------------------------|
| a) $\int \frac{dx}{x^2+4}$; | i) $\int \frac{t^5 dt}{(t^2+4)^2}$; |
| b) $\int \frac{2x^2-x+2}{2x+3} dx$; | j) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$; |
| c) $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$; | k) $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^2}$; |
| d) $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$; | l) $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2-5x+6}$; |
| e) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$; | m) $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-2x+5}$; |
| f) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$; | n) $\int \frac{(2x+1)dx}{(x-2)^3}$. |
| g) $\int \frac{x^2 dx}{x^4+1}$; | |
| h) $\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$; | |

11.12. Calculer les intégrales indéfinies de fonctions rationnelles :

- | | |
|--|--|
| a) $\int \frac{2x^2-x+2}{2x+3} dx$; | i) $\int \frac{t^5 dt}{(t^2+4)^2}$; |
| b) $\int \frac{4x^2+5x+3}{x^3+x^2+x} dx$; | j) $\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$; |
| c) $\int \frac{4x^4-x^2-2}{x^5+x^3} dx$; | k) $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^2}$; |
| d) $\int \frac{x^5+x^4+5x^2-5x}{x^3-x^2+x-1} dx$; | l) $\int \frac{x^4-2x^3+6x^2-x-8}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx$; |
| e) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$; | m) $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2-5x+6}$; |
| f) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$; | n) $\int \frac{(2x+1)dx}{(x-2)^3}$; |
| g) $\int \frac{dx}{x^2-4}$; | o) $\int \frac{4dx}{x^3+4x}$; |
| h) $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$; | p) $\int \frac{5x^6+5x^5-x^2+x+1}{x^4+x^3-x-1}$. |

11.13. Calculer les intégrales indéfinies (de fonctions rationnelles en puissances rationnelles d'une fonction homographe de x) :

- | | |
|---|--|
| a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; | c) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$; |
| b) $\int \frac{x-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[4]{1+x}} dx$; | d) $\int \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^{5/2} dx$. |

11.14. Calculer :

- | | |
|---|--|
| a) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx;$ | m) $\int \frac{x^{1/2}}{x^{3/4} + 1} dx;$ |
| b) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx;$ | n) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 2}};$ |
| c) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x - x^2}};$ | o) n) $\int \frac{x dx}{(5 - 4x - x^2)^{3/2}};$ |
| d) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 1}};$ | p) $\int \frac{1 - \sqrt{3x + 2}}{1 + \sqrt{3x + 2}};$ |
| e) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{2 + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}} dx;$ | q) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}};$ |
| f) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}};$ | r) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 + x^2}} dx;$ |
| g) $\int \frac{dx}{(1 - x)\sqrt{x}};$ | s) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} dx;$ |
| h) $\int \frac{dx}{x - 4\sqrt{x}};$ | t) $\int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x} dx;$ |
| i) $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^4} dx;$ | u) $\int x^3 \sqrt{4 - x^2} dx;$ |
| j) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 - 4}};$ | v) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x - x^2}};$ |
| k) $\int \frac{x dx}{(\sqrt{x^2 + 3x})^3};$ | w) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}};$ |
| l) $\int \sqrt{x^2 - 16} dx;$ | x) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$ |

11.15. Calculer les intégrales indéfinies (de fonctions rationnelles en x et \sqrt{Q} , avec Q polynôme en x du second degré) :

- | | |
|--|---|
| a) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 + x^2}} dx;$ | f) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{2 + \frac{4}{3\sqrt{x}}} dx;$ |
| b) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$ (où $a \in \mathbb{R}\{0\}$); | g) $\int \frac{dx}{x - 4\sqrt{x}} dx;$ |
| c) $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$ (où $a \in \mathbb{R}\{0\}$); | h) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x}};$ |
| d) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x - x^2}};$ | i) $\int \frac{dx}{x^{1/2} - x^{1/4}} dx$ |
| e) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 1}} dx;$ | j) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} dx.$ |

11.16. Calculer les intégrales indéfinies (de fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$) :

a) $\int \cos^3 x \, dx$;

b) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \, dx$;

c) $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$;

d) $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$,
avec $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

e) $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$;

f) $\int \sin 5x \cos 3x \, dx$;

g) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$;

h) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$;

i) $\int \operatorname{sh}^3 x \, dx$;

j) $\int \frac{dx}{a + b \cos x}$;

(distinguer plusieurs cas
suivant les valeurs de a et b réels)

k) $\int \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \, dx$;

l) $\int \frac{\cos^2 x}{\cos 2x} \, dx$;

m) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x} \, dx$;

n) $\int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^4 x}$;

o) $\int \cos^3 x \sin^3 x \, dx$;

p) $\int \cos^2 x \, dx$;

q) $\int (\cos x + \sin x)^5 \, dx$;

r) $\int \operatorname{ch}^4 x \, dx$;

s) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x}$;

t) $\int \frac{dx}{\cos x}$;

u) $\int \frac{dx}{\sin x}$;

v) $\int \sqrt{1 - \cos x} \, dx$;

w) $\int \frac{1 + \operatorname{cosec} x}{\sin^3 x} \, dx$;

x) $\int \cos^2 \frac{x}{2} \, dx$;

y) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$;

z) $\int \frac{\cos^3 x \, dx}{1 - \sin x}$;

aa) $\int \operatorname{tg} x \frac{1}{\sqrt{\cos x}} \, dx$;

bb) $\int (\cos x)^{-3} \, dx$;

cc) $\int \frac{dx}{1 + \sin x \cos x}$;

dd) $\int \frac{dx}{2 \cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x}$;

ee) $\int \operatorname{tg}^3 3x \, dx$;

ff) $\int \frac{dx}{\operatorname{séc} 3x + 1}$;

gg) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{séc} x}} \, dx$;

hh) $\int \cos^6(1 - x) \, dx$;

ii) $\int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \, dx$;

jj) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} \, dx$;

11.17. Calculer les intégrales indéfinies (de fonctions rationnelles en $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$) :

a) $\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} \, dx$;

c) $\int \frac{1 + \operatorname{ch} x}{1 - \operatorname{sh}^2 x} \, dx$;

b) $\int \frac{1}{1 - \operatorname{sh}^2 x} \, dx$;

d) $\int \frac{1 + \operatorname{ch}^2 x}{1 - \operatorname{ch}^2 x} \, dx$;

11.18. Calculer

a) $\int \sin(\ln x) dx;$

b) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx;$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}};$

d) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x};$

e) $\int x\sqrt{2+3x} dx;$

f) $\int (3x^2+1)^4 x dx;$

g) $\int x^2 e^{3x} dx;$

h) $\int \operatorname{ch} x \sin x dx;$

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3-x^2}};$

j) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}};$

k) $\int x \arcsin x dx;$

l) $\int x^2 \cos(2x+1) dx;$

m) $\int \frac{1-x\sqrt{1-x^2}}{x+1} dx;$

n) $\int 3^{\sqrt{2x+1}} dx;$

o) $\int \frac{\ln 2x dx}{\ln 4x x};$

p) $\int e^{ax} \operatorname{ch} x dx;$

q) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}};$

r) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ où $a \in \mathbb{R}\{0\};$

s) $\int \frac{x \arctan x dx}{(x^2+1)^2};$

t) $\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x} dx;$

u) $\int x^5 \sqrt[4]{1+2x^3} dx;$

v) $\int \sqrt{-x^2+x+1} dx;$

w) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} dx;$

x) $\int 4x^3 (\ln x)^2 dx;$

y) $\int \frac{dx}{x^4-1};$

z) $\int \arctan x dx.$

Chapitre 12

Intégrale de Riemann

12.1. Calculer

a) $\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{4x}{1+x^2} dx;$

b) $\int_0^{\pi/4} t(\arctan t)^2 dt;$

c) $\int_1^{7/4} \frac{dx}{9+16(x-1)^2};$

d) $\int_0^e \ln(1+2x) dx;$

e) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 8}} dx;$

f) $\int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x dx;$

g) $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt;$

h) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2+6x-7};$

i) $\int_1^2 \frac{2-x}{4x^2+4x-3} dx;$

j) $\int_2^1 x^3 \ln x dx;$

k) $\int_{-5}^{-4} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$

l) $\int_{-1}^1 \operatorname{sh}^3 x dx;$

m) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx;$

n) $\int_{-1}^1 x^2 \arctan x dx.$

12.2. Que vaut

a) $\int_0^{\pi/4} x(\arctan x)^2 dx ?$

b) $\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{4x}{1+x^2} dx ?$

c) $\int_0^e \ln(1+2x) dx ?$

d) $\int_1^{7/4} \frac{dx}{9+16(x-1)^2} ?$

e) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 8}} ?$

f) $\int_0^1 \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}} dx ?$

12.3. Un gaz se dilate de sorte que sa pression P et son volume V sont liés par la relation

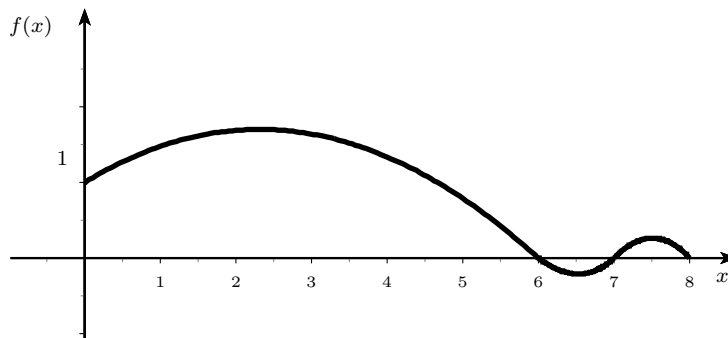
$$P = a - bV,$$

où a et b sont des constantes. Sachant que le travail W fourni en passant du volume V_0 au volume V_1 est donné par

$$W = \int_{V_0}^{V_1} P dV,$$

trouver en fonction de a et b le travail fourni si la mesure de V passe de 3 à 8.

12.4. À partir du graphe de la fonction f , supposée deux fois dérivable,



répondez aux questions suivantes sur la fonction $F : [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

éventuellement en donnant une valeur exacte ou approchée, et en discutant votre réponse :

- a) que vaut $F(0)$?
- b) donnez deux bornes entres lesquelles est compris $F(6)$;
- c) quel est le maximum de la fonction F ? en quel(s) point(s) de $[0, 8]$ ce maximum est-il atteint ?
- d) idem pour le minimum de F ;
- e) idem pour le minimum de F' ;
- f) idem pour le minimum de F'' .

12.5. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable avec $a < b$. Donner une expression sans signe d'intégration égale à

- a) $\int_a^b f'(x)dx$;
- b) la dérivée au point t_0 de $]a, b[$ de la fonction F appliquant le point t de $[a, b]$ sur

$$F(t) = \int_a^t f'(x)dx;$$

- c) la dérivée à gauche au point b de cette même fonction F ;
- d) la dérivée à droite de F au point a ;
- e) la dérivée au point t_0 de $]a, b[$ de la fonction G appliquant le point t de $[a, b]$ sur

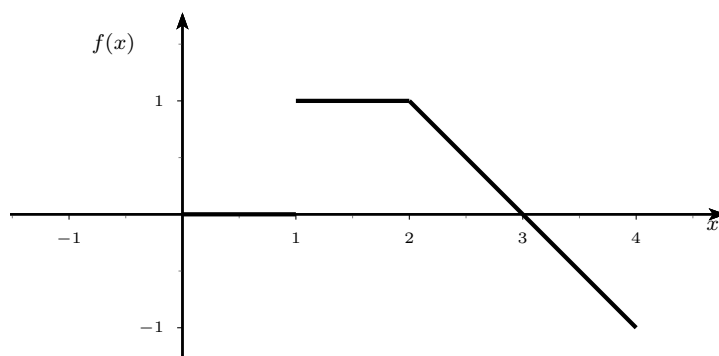
$$G(t) = \int_a^t f'(x)dx;$$

- f) la dérivée à gauche au point b de cette même fonction G ;
- g) la dérivée à droite de G au point a .

12.6. Soit f une fonction continue de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . Que vaut

$$\frac{d}{dx} \int_5^x (f(t))^2 dt ?$$

12.7. Voici le graphe d'une fonction $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Tracez (à la même échelle) le graphe de la primitive F de f telle que $F(0) = 2$.



- b) $f(0)g(0) + \int_0^1 f(t)g(t)dt$?
 c) $\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 dt$?
 d) $\int_0^1 f'(t)g'(t)dt$?
 e) $f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$?

12.17. L'égalité suivante a-t-elle lieu ?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sin \frac{x}{n} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{x}{n} dx$$

12.18. Considérons pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n dont voici le graphe

- a) La suite (f_n) de fonctions a-t-elle une limite au sens de la convergence simple ?
 b) Avons-nous

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx ?$$

- c) La suite (f_n) de fonctions a-t-elle une limite au sens de la convergence uniforme ? Répondez
 - grâce au b),
 - par une illustration graphique,
 - à partir de la définition même.

12.19. Pourquoi les intégrales suivantes sont-elles dites « généralisées » ? Calculez la valeur chaque fois qu'elle existe, sinon donnez des informations sur la divergence.

- | | |
|---|--|
| a) $\int_3^4 \frac{1}{x-3} dx$; | d) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$; |
| b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$; | e) $\int_1^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$; |
| c) $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$; | f) $\int_0^1 \frac{dt}{t^2-1}$. |

12.20. Calculer les deux intégrales (attention !)

$$\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{t^3}{1-t^2} dt.$$

12.21. Soit la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt.$$

Quelles affirmations parmi les suivantes sont vraies ?

- a) F est croissante ;
 b) F est décroissante ;

- c) F n'est ni croissante, ni décroissante ;
- d) F ne s'annule jamais ;
- e) F est strictement positive ;
- f) F est impaire ;
- g) F est paire ;
- h) F admet un maximum local en 0 ;
- i) F admet un minimum local en 0 ;
- j) le graphe de F admet un point d'inflexion en 0.

12.22. En utilisant $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1)$ ainsi que l'interprétation graphique de l'intégrale définie, convainquez-vous de l'exactitude des inégalités

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$$

pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; donnez ensuite des arguments plus formels. Déduisez de ces inégalités que la série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

diverge vers $+\infty$. Montrez ensuite que cette divergence vers $+\infty$ est très lente : si le nombre n de termes est doublé, de quelle quantité approximativement augmente la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$?

12.23. Pour quelles valeurs du nombre réel β l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} x^\beta dx$$

existe-t-elle ?

12.24. Pour quelles valeurs du nombre réel α l'intégrale

$$\int_0^1 x^\alpha dx$$

existe-t-elle ? Même question pour

$$\int_a^b (x-b)^\alpha dx,$$

où $a \neq b$.

Chapitre 13

Fonctions vectorielles d'une variable réelle

13.1. Parmi les applications suivantes, déterminer

- celles qui sont continues ;
- celles qui sont dérivables.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^3 e^t, \operatorname{ch} t + \sin t); \\ g &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\operatorname{arctg} t, e^{|t|}); \\ h &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\operatorname{tg} t, \sqrt[3]{t}); \\ j &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto ([t], t^2, t^3); \\ k &: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t, \operatorname{th} t); \\ l &: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (1, 2, 3). \end{aligned}$$

13.2. Un point $p(x, y)$ se meut dans le plan \mathbb{R}^2 suivant la loi

$$\begin{cases} x = 3t^2 - 5t + 6, \\ y = t^3 + 5t - 1, \end{cases}$$

où t désigne le temps. Calculer les composantes des vecteurs vitesse et accélération en $t = 0$; en $t = 1$; en $t = 5$. Déterminer ensuite le nombre vitesse en ces mêmes instants.

13.3. Dans le plan \mathbb{R}^2 muni de la base orthonormée canonique \vec{e}_1, \vec{e}_2 , le vecteur

$$\vec{op} = \cos \omega t \vec{e}_1 + \sin \omega t \vec{e}_2$$

donne la position du point p en fonction du temps t (avec ω constante réelle non nulle). Montrer que

- à chaque instant, le vecteur vitesse est perpendiculaire au vecteur position ;
- le vecteur accélération est dirigé vers l'origine de \mathbb{R}^2 , et est de norme constante.

Quel est le mouvement du point ?

13.4. Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2, \cos t).$$

- donnez la différentielle de f pour la valeur $t = \frac{\pi}{4}$. Que vaut $df\left(\frac{\pi}{4}\right)(\vec{v})$, si \vec{v} est le vecteur lié en $t = \frac{\pi}{4}$ et de composante $+3$?
- décrivez géométriquement l'image de la différentielle $df\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
- pour quelle(s) valeur(s) de t_0 la différentielle $df(t_0)$ est-elle une application linéaire de rang 1 ? En l'autre (ou les autres) valeur(s) de t_0 , quel est le rang de $df(t_0)$?

13.5. Le mouvement d'un point $p = (x, y)$ dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 est donné en fonction du temps t par

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

- Ce mouvement est-il périodique ? Si oui, quelle est sa période ?

- b. En éliminant le paramètre t , trouver une équation satisfaite par les coordonnées de toutes les positions prises par le point au cours du temps. Ces positions forment la trajectoire du point ; décrivez géométriquement cette trajectoire.
- c. Quel est le vecteur vitesse pour $t = 0$? pour $t = \frac{\pi}{20}$? pour $t = \frac{\pi}{10}$? pour $t = \frac{2\pi}{5}$?
- d. Faites, dans le systèmes d'axes, le schéma de la trajectoire. Dessinez quelques vecteurs vitesse.
- e. Le point progresse-t-il constamment à la même allure sur sa trajectoire ?
- f. Quel est le vecteur accélération à l'instant t ?
- g. Ce vecteur accélération est-il de norme constante ? est-il toujours orthogonal à la trajectoire du point considéré ?

13.6. Si l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (x, y, z)$ décrit le mouvement du point $p = (x, y, z)$ en fonction du temps t , quel lien voyez-vous entre

- a. trajectoire de p et image de f ?
- b. vecteur vitesse de p à l'instant t_0 et différentielle $df(t_0)$ de f pour la valeur t_0 de l'argument ?
- c. tangente à la trajectoire à l'instant t et différentielle de f en t ?
- d. vitesse numérique de p à l'instant t et rang de la différentielle de f en t ?
- e. vecteur vitesse et lissité de la paramétrisation $t \mapsto f(t)$ de la trajectoire ?

13.7. Soit C la courbe paramétrée du plan \mathbb{R}^2 définie par

$$\begin{cases} x = e^{2t} \cos(t^2) \\ y = e^{2t} \sin(t^2) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- a. Le point $(1, 0)$ est-il un point de C ? si oui, est-il un point multiple de C ?
- b. Cette paramétrisation est-elle lisse ?
- c. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point $(1, 0)$.
- d. Donner l'équation de la normale à la courbe au point $(1, 0)$.

13.8. Considérons la courbe C de \mathbb{R}^2 donnée par la paramétrisation

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (5 + \operatorname{ch} t, -2 - \operatorname{sh} t).$$

- a. Cette paramétrisation est-elle lisse ?
- b. En quel(s) point(s) de C la tangente à C est-elle parallèle à la droite d'équation $x = 0$? à celle d'équation $y = 0$?
- c. Montrer que le point $(6, -2)$ appartient à C .
- d. La courbe C coupe-t-elle l'axe ox ?
- e. Donner l'équation de la tangente à C au point image de t_0 .
- f. Décrivez géométriquement la courbe C ; faites-en un schéma dans le système d'axes.

13.9. Un cycliste roule « éternellement » « dans » le plan \mathbb{R}^2 . Sa position à l'instant t est donnée par

$$\begin{cases} x = t^3 + t, \\ y = t^2. \end{cases}$$

- a. Combien de fois passe-t-il à l'origine ?
- b. Combien de fois, sans être à l'origine, se dirige-t-il vers l'origine ?

13.10. Un point mobile dans \mathbb{R}^3 est à l'instant t au point (x, y, z) défini par

$$\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = 2 \cos 3t, \\ z = 2 \sin 3t. \end{cases}$$

- a. Déterminer son vecteur vitesse à l'instant t .
- b. Déterminer sa vitesse numérique à l'instant t .
- c. Déterminer son vecteur accélération à l'instant t .

13.11. Montrer que toutes les tangentes à l'hélice de \mathbb{R}^3 d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt. \end{cases}$$

coupent le plan oxy sous le même angle.

13.12. Trouver le vecteur tangent, les équations de la tangente et l'équation du plan normal au point $(3, 9, 27)$ de la courbe paramétrée de \mathbb{R}^3 donné par

$$\vec{op} = t\vec{e}_1 + t^2\vec{e}_2 + t^3\vec{e}_3$$

(où $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ est la base canonique).

13.13. Considérons le point mobile de \mathbb{R}^3 donné en fonction du temps t par

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(t^2 + 1), \\ z = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

À quel(s) instant(s) la vitesse de ce point mesure-t-elle 1 ?

13.14. Considérons la courbe paramétrée C de \mathbb{R}^3 d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \\ z = t^4. \end{cases}$$

- Cette courbe paramétrée C possède-t-elle des points doubles ?
- Cette courbe C est-elle plane ?
- Montrer que C est située sur la surface d'équation $z = x^2$.
- Donner des équations de la tangente à C au point $(1, 1, 1)$.
- Donner l'équation du plan normal à C au point $(1, 1, 1)$.

13.15. Le mouvement d'un point $p = (x, y)$, mobile dans le plan oxy , est donné par

$$\begin{cases} x = \cos\left(\frac{\pi}{12}(t^3 - t + 6)\right) \\ y = \sin\left(\frac{\pi}{12}(t^3 - t + 6)\right) \end{cases} \quad -2 \leq t \leq 2.$$

Expliquez en quoi les deux concepts suivants diffèrent, et calculer leurs valeurs :

- longueur du parcours total effectué par le point p ;
- longueur de l'arc de courbe formé par les points de la trajectoire de p .

13.16. Soit C la courbe paramétrée de \mathbb{R}^3 de paramétrisation

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right).$$

- Montrer que cette paramétrisation f est lisse.
- Déterminez la fonction $t \mapsto s = s(t)$ qui donne l'abscisse curviligne du point $f(t)$ (quelle origine choisissez-vous pour mesurer cette abscisse curviligne?).
- Donnez $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{dt}{ds}$, tous deux en fonction de t .
- Donnez en fonction de t un vecteur tangent normé à C au point $f(t)$.

13.17. Calculer le rayon de courbure en un point

- de la parabole de \mathbb{R}^2 paramétrée par $t \mapsto (t, t^2)$;
- d'un cercle de rayon r ;
- d'une droite;
- de la courbe de \mathbb{R}^3 d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{-t}, \\ z = \sqrt{2t}. \end{cases}$$

13.18. Par intégration, calculer la longueur des arcs de courbes paramétrés lisses suivants :

- $[6, 7] \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (3t - 1, 2t, -7t + 3)$;
- $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (2 - \cos 6t, 3 + \sin 6t)$.

Vérifiez vos résultats en déterminant la nature géométrique de ces arcs de courbe.

13.19. Calculer la longueur de l'arc de courbe donné par

- $[0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (e^t \cos t, e^t \sin t)$;

- b. $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\frac{3}{2} \cos^3 t, 3 \sin^3 t)$;
 c. $[0, 5] \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (t, 3t^2, 6t^3)$.

13.20. Calculer la longueur du chemin conduisant du point $(1, -1)$ au point $(1, 1)$ le long de la courbe de \mathbb{R}^2 d'équation $y^2 = x^3$.

13.21. Considérons la cycloïde définie dans les exercices du chapitre 19, d'équations paramétriques n

$$\begin{cases} x = rt - r \sin t \\ y = r - r \cos t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- a. Trouver la paramétrisation normale directe de cette cycloïde, en prenant l'origine pour $t = 0$.
 b. Quelle est la longueur de cette cycloïde ?
 c. Donner, en fonction de t , le vecteur tangent unitaire.

13.22. Calculer l'intégrale curviligne, le long de l'arc de courbe C de \mathbb{R}^2 défini par la paramétrisation

$$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, t^2),$$

de la fonction qui associe au point (t, t^2) de C le nombre $3t$.

13.23. Considérons l'arc de courbe C de \mathbb{R}^3 défini par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 \\ z = \ln t \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 2.$$

Calculer l'intégrale curviligne le long de C de la fonction qui applique le point (x, y, z) sur $\sqrt{1+2y}$.

13.24. Calculer l'intégrale curviligne le long du segment de \mathbb{R}^3 joignant le point $(1, 2, 3)$ au point $(0, 2, 5)$, de la fonction envoyant le point (x, y, z) sur $y^2 - z^2$.

13.25. Calculer dans \mathbb{R}^2 l'intégrale curviligne de la fonction appliquant (x, y) sur xy le long de l'arc de courbe joignant le point $(a, 0)$ au point $(0, b)$ en suivant un quart de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ouf, quelle phrase!).

13.26. Appelons C l'arc de courbe de \mathbb{R}^2 qui commence au point $(1, 1)$ et se termine en ce même point après avoir suivi dans le sens trigonométrique le bord du carré de sommets $(\pm 1, \pm 1)$. Calculer l'intégrale curviligne le long de C des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2; \\ g & : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy; \\ h & : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

13.27. Un expérimentateur mesure la température en chaque point d'une spire d'hélice C paramétrée par

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 2\pi.$$

Déterminer la température moyenne, donnée par

$$\frac{\int_C T(x, y, z) ds}{\int_C ds},$$

lorsque

- a. $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;
 b. la température T est proportionnelle à la hauteur du point par rapport au plan oxy ; appelez k le facteur de proportionnalité.

13.28. Déterminer le poids d'un fil circulaire si sa densité linéaire de masse est

- a. constante de valeur k ;
 b. égale à $k\theta^2$ au point p , où k est une constante et θ la mesure en radians de l'angle au centre déterminé par p et un point o fixé sur le fil ;
 c. égale à $k\theta^4$ (avec les mêmes conventions qu'en b)).

13.29. Déterminer la masse de la spire d'hélice

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin 3t \\ z = 3t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

si sa densité linéaire de masse est donnée au point $p(x, y, z)$ par

a) z^6 ; b) $x^2 + y^2$; c) xyz .

Chapitre 14

Matrices

14.1. Soit les matrices réelles

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice D telle que $A + B - D = 0$.

14.2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ sont deux matrices réelles, montrer que $(A + B)^2 = A^2 + B^2$. Ce résultat est-il vrai pour tout choix de deux matrices réelles ?

14.3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice réelle ; trouver toutes les matrices X telles que $AX = A$.

14.4. Démontrer que si les matrices réelles A et B sont telles que $AB = A$ et $BA = B$, alors $A^2 = A$ et $B^2 = B$. Le résultat reste-t-il vrai si \mathbb{R} est remplacé par un champ quelconque F ?

14.5. Montrer, pour $n \in \mathbb{N}_0$ et a pris dans un champ F ,

$$\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

14.6. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les matrices réelles A et B pour que

a) $(A - B)^2 = A^2 + B^2$; b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

Vos résultats s'étendent-ils à des matrices A et B sur un champ quelconque ?

14.7. Deux matrices A et B commutent si $AB = BA$. Montrer que si A et B sont deux matrices inversibles qui commutent, il en est de même pour A et B^{-1} , pour A^{-1} et B et pour A^{-1} et B^{-1} .

14.8. Soit A une matrice complexe $n \times n$ qui vérifie l'équation $A^2 + 2A + 3I = 0$. Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1} en fonction de A .

14.9. Soit A et B des matrices réelles telles que $A^t = A^{-1}$ et $B^t = B^{-1}$. Les affirmations suivantes sont-elles correctes ?

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| a) $A^t A = B^t B = I$ | f) $A = A^t$; |
| b) $\det A = 1$ | g) $(A + B)^t = (A + B)^{-1}$; |
| c) $(AB)^t = (AB)^{-1}$ | h) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; |
| d) $AA^t A = A$ | i) $(A^2)^t = (A^2)^{-1}$; |
| e) $\det A = \pm 1$ | j) $AB = BA$. |

Remarque : il convient de justifier votre réponse, c'est-à-dire de démontrer les affirmations correctes et d'infirmar par un contre-exemple celles qui sont fausses.

14.10. Soit f l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x - y - 3z, y + 5z).$$

- Déterminer les images des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 ?
- Munissons plutôt \mathbb{R}^2 de la base $(1, 1), (1, 2)$. Quelle est alors la matrice de f ?

14.11. Écrire la matrice associée à l'opérateur linéaire sur \mathbb{R}^3 qui applique les vecteurs de base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sur respectivement les vecteurs $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ définis par

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \vec{b}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$$

14.12. Considérons l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 : (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x, y - x).$$

- Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^4 .
- Posons

$$\vec{b}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \vec{b}_2 = (1, 0, 0, 0), \quad \vec{b}_3 = (0, 1, 0, 0), \quad \vec{b}_4 = (0, 0, 1, 0).$$

Montrer que $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ est une base de \mathbb{R}^4 .

- Quelle est la matrice de f dans les bases canonique de \mathbb{R}^3 et $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ de \mathbb{R}^4 ?

14.13. Dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 muni de la base canonique, voici des opérateurs linéaires. Ecrivez leur matrice.

- Rotation de $\frac{\pi}{3}$ autour de l'origine.
- Homothétie centrée à l'origine et de rapport 3.
- Symétrie par rapport à l'origine.
- Symétrie par rapport à Ox .
- Symétrie par rapport à Oy .
- Symétrie par rapport à $y = x$.
- Symétrie par rapport à $y = -x$.
- Symétrie par rapport à $y = 4x$. (! ceci semble assez calculatoire!)
- La composée des transformations 4 et 5.
- La composée des transformations 6 et 8.

(Dans ces deux derniers cas, indiquer la nature de la transformation résultante).

14.14. Dans la base canonique de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , quelles sont les matrices associées aux transformations linéaires suivantes ?

- Rotation de $\frac{\pi}{3}$ autour de Ox .
- Rotation de $\frac{\pi}{6}$ autour de Oy .
- Rotation de $\frac{\pi}{4}$ autour de Oz .
- Symétrie par rapport à l'origine.
- Symétrie par rapport à Ox .
- Symétrie par rapport à Oy .
- Symétrie par rapport à Oz .
- Symétrie par rapport à Oxy .
- Symétrie par rapport à Oxz .
- Symétrie par rapport à Oyz .
- Symétrie par rapport au plan $2x + 2y + z = 0$.
- Symétrie par rapport à la droite $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z$.
- La composée des transformations 5 et 9.
- La composée des transformations 6 et 7.
- La composée des transformations 7 et 8.
- La composée des transformations 11 et 12.

(Dans les quatre derniers cas, indiquer la nature de la transformation résultante).

14.15. Dans l'espace euclidien centré \mathbb{E}_0^3 muni d'une base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, fixons le vecteur $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Déterminez la matrice M de l'application linéaire qui à tout vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ fait correspondre le vecteur $y = (y_1, y_2, y_3)$ tel que

$$\vec{y} = \vec{x} \times \vec{v}.$$

Montrer que $M^3 = \alpha M$ où α est un scalaire que l'on déterminera.

14.16. Dans un plan vectoriel réel V muni d'une base \vec{b}_1, \vec{b}_2 , soit f la transformation linéaire de V vers V dont la matrice est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculer A^3 puis A^6 . En déduire la nature de f^3 et f^6 . Soit $\vec{u} = (x, y)$ un vecteur de V . Montrer que l'expression $x^2 + y^2$ est invariante par f .

14.17. Soit la matrice A d'une application linéaire de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^4 (écrite dans les bases canoniques)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}.$$

- déterminer tous les vecteurs \vec{x} de \mathbb{R}^3 tels que $A\vec{x} = \vec{d}$;
- vérifier que ces vecteurs forment un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 ;
- quelle est la dimension de ce sous-espace vectoriel ? Donner une base de ce sous-espace.
- quelle est l'image de cette application linéaire A ? Quel est son rang ?

14.18. Soit f l'opérateur linéaire sur \mathbb{R}^3 tel que

$$f(1, 0, 0) = (1, -2, 0),$$

$$f(0, 1, 0) = (-1, 1, 1),$$

et

$$f(0, 0, 1) = (1, 0, 0).$$

- Ecrivez la matrice de f dans la base $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.
- Recherchez les vecteurs de \mathbb{R}^3 qui sont fixés par f .
- Vérifiez que $\{(0, 1, 1), (-1, 2, 1), (1, 1, -1)\}$ est une base de \mathbb{R}^3 et écrivez la matrice de f dans cette base. Interprétez géométriquement le résultat obtenu.

14.19. Existe-t-il un opérateur linéaire f de \mathbb{R}^3 qui applique

$$\begin{array}{ll} (1, 2, -1) & \text{sur} \quad (1, 0, 0), \\ (1, 1, 2) & \text{sur} \quad (1, 1, 0), \\ (-1, -3, 4) & \text{sur} \quad (1, 1, 1) ? \end{array}$$

14.20. Un opérateur linéaire α sur \mathbb{R}^3 transforme les vecteurs $(1, 0, 1), (1, -1, 1), (1, 2, -1)$ en respectivement les vecteurs $(2, 3, -1), (3, 0, -2), (-2, 7, -1)$. Déterminer les images des vecteurs de la base canonique et écrire la matrice de l'opérateur dans cette base.

14.21. Un opérateur linéaire sur \mathbb{R}^3 est représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Quelle est l'image \vec{b} du vecteur $\vec{a} = (1, 1, 1)$?
- Quel est le vecteur \vec{c} dont l'image est le vecteur $\vec{d} = (8, 7, 9)$?

14.22. L'ensemble $\mathbb{R}_4[x]$ des polynômes à coefficients réels, de degré ≤ 4 , a une structure naturelle d'espace vectoriel réel.

- Les familles $B_1 = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ et $B_2 = (24, 6 + 24x, 2 + 6x + 12x^2, 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3, 1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$ sont-elles des bases de $\mathbb{R}_4[x]$?
- La fonction $D : \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}_4[x]$ qui applique tout polynôme sur son dérivé est-elle un opérateur linéaire de $\mathbb{R}_4[x]$? Si oui, écrivez sa matrice dans la base B_1 ; dans la base B_2 .
- Si M_1 est la matrice de A dans la base B_1 , quelle est la transformation linéaire de $\mathbb{R}_4[x]$ qui est représentée par la matrice M_1^2 dans la base B_1 ?

14.23. Etant donnés, dans \mathbb{R}^3 muni de la base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, deux vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ et $\vec{v}_2 = (-1, a, 1)$ tels que $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -2$, construire à partir de ces vecteurs une base orthonormée $\vec{Z}_1, \vec{Z}_2, \vec{Z}_3$, avec \vec{v}_1 proportionnel à \vec{Z}_1 et \vec{Z}_2 situé dans le plan \vec{v}_1, \vec{v}_2 . Trouver la matrice donnant les composantes d'un vecteur dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ en fonction de ses composantes dans la base $\vec{Z}_1, \vec{Z}_2, \vec{Z}_3$.

14.24. Si l'opérateur f sur \mathbb{R}^2 est représenté par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique, quelle matrice représente f dans la base $(-2, 3), (1, 2)$?

14.25. Déterminer le noyau et l'image (en particulier leurs nombres respectifs d'éléments) de l'application linéaire

$$f : (\mathbb{Z}_2)^3 \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^2 : (x, y, z) \mapsto (x + y, y + z).$$

14.26. L'ensemble des matrices triangulaires à coefficients dans un champ F forme un espace vectoriel sur F . Expliquez cela, et donnez la dimension de cet espace.

14.27. Pour E un ensemble non vide et F un champ, considérons l'espace vectoriel F^E formé des applications de E vers F . Montrer, pour un élément e fixé dans E , que l'application

$$f : F^E \rightarrow F : \phi \mapsto \phi(e)$$

est une forme linéaire.

Chapitre 15

Systèmes d'équations linéaires

15.1. Parmi les systèmes suivants, déterminez ceux qui sont résolus puis décrivez économiquement l'ensemble des solutions des systèmes résolus :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} x + 5y = 7 \\ 2x + 3y = 5 \end{array} \right. & \text{sur } \mathbb{C}^2; \\ \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_1 = 4 \\ x_2 = 9 \end{array} \right. & \text{sur } (\mathbb{Z}_{13})^2; \\ \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 9 \end{array} \right. & \text{sur } (\mathbb{Z}_{13})^3; \\ \text{d)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 9 \\ x_5 = 2 \end{array} \right. & \text{sur } (\mathbb{Z}_{13})^5; \\ \text{e)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_4 = 1 \end{array} \right. & \text{sur } (\mathbb{Z}_{13})^5; \\ \text{f)} & 3x + 4y + z + 2t = 3 \text{ sur } (\mathbb{R})^4. \end{array}$$

15.2. Résoudre les systèmes réels suivants par la méthode de Gauss (toutes les inconnues apparaissent dans au moins une équation).

$$\begin{array}{ll} \text{a.} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 5 \end{array} \right. & \text{f.} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{array} \right. \\ \text{b.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. & \text{g.} \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 3z - t = 1 \\ x - 4y + 3z + 4t = -4 \end{array} \right. \\ \text{c.} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z - 3t = 2 \\ x - 2y + 2z + 15t = -3 \\ x + y - z - 9t = 0 \end{array} \right. & \text{h.} \left\{ \begin{array}{l} -2x + y - z = 0 \\ 5x + 2y - 11z = 18 \end{array} \right. \\ \text{d.} \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - 3z + t = 1 \\ x - y - 2t = 1 \end{array} \right. & \text{i.} \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ x + z = 0 \\ 3x + 4y = 3 \end{array} \right. \\ \text{e.} \left\{ \begin{array}{l} x + 4y + z = 12 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y = 4 \\ x + z = 4 \end{array} \right. & \text{j.} \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

15.3. En vous basant sur la théorie des systèmes d'équations linéaires, chercher des conditions analytiques nécessaires et suffisantes

- pour que 3 droites de \mathbb{R}^2 soient concourantes ;
- pour que 3 points de \mathbb{R}^2 soient alignés ;
- pour que 3 points de \mathbb{R}^3 soient alignés ;
- pour que 3 plans de \mathbb{R}^3 aient une droite commune.

15.4. Écrire l'équation d'un plan de \mathbb{R}^3 passant par 3 points sous forme de déterminant.

15.5. Soit a un nombre réel et soit :

- π_1 le plan passant par l'origine et perpendiculaire à $\vec{v}_1 = (1, 2, 0)$,
- π_2 le plan passant par $(1, 1, -1)$ et parallèle à $\vec{v}_2 = (1, 0, a)$ et $\vec{v}_2' = (0, 1, 3)$,
- π_3 le plan passant par $(\frac{4}{3}, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ et $(0, 2 + a, 1)$.

Discuter en fonction de a la nature de l'intersection des 3 plans π_1, π_2, π_3 .

15.6. Un problème italien de TARTAGLIA (16e siècle)

« Trois joyeux compagnons qui avoient deniers en bourse, s'entrefrent quelques questions, et dist le premier aux deux

autres, si vous me donnez la moitié de vos ducats, j'aurai ensemble avec ceux que je peux avoir de présent 20 ducats : le second dist aux deux autres, si vous me donnez le tiers de vos ducats, j'aurai ensemble, avec ceux que je peux avoir 20 ducats ; mais dist le troisième aux deux autres, donnez-moi le quart de ceux que vous avez, et avec ceux que j'ai, j'aurai 20 ducats aussi bien que vous : combien avait de ducats un chacun d'eux ? ».

15.7. Un problème de BACHET (17e siècle)

« Trois hommes ont chacun certaine somme d'écus. Le premier donne des siens aux deux autres autant qu'ils en ont chacun ; en après le second en donne aux deux autres autant qu'ils ont chacun ; finalement le troisième en donne aux deux autres autant qu'ils en ont chacun : cela fait, chacun se trouve 8 écus. On demande combien chacun en avait du commencement » (extrait des « Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres », publié en 1612).

15.8. Un problème stupide (20e siècle)

Un père a 25 ans de plus que son fils. Dans 7 ans, il aura 5 fois l'âge de son fils. Que fait le père ?

15.9. Déterminer les inverses des matrices réelles suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 16

Matrices : déterminants et inverses

16.1. Calculer les déterminants des matrices réelles suivantes, et leur matrice inverse quand elle existe :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}; & \text{b)} \quad & \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}; \\ \text{c)} \quad & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}; & \text{d)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}; & \text{e)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

16.2. Montrer, sans développer de déterminant, les égalités :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \det \begin{pmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ca & bc \\ ca & bc & ab \end{pmatrix}; \\ \text{b)} \quad & \det \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ c_1 + a_1 & c_2 + a_2 & c_3 + a_3 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}; \\ \text{c)} \quad & \det \begin{pmatrix} 1 & a & b + c \\ 1 & b & c + a \\ 1 & c & a + b \end{pmatrix} = 0; \\ \text{d)} \quad & \det \begin{pmatrix} a^2 & bc & ab \\ ba & c^2 & b^2 \\ ca & ab & bc \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

16.3. Calculer, le plus simplement possible, pour des matrices complexes :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \det \begin{pmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & a - b & a & \dots & a \\ a & a & 2a - b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & na - b \end{pmatrix}; \\ \text{b)} \quad & \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{pmatrix}; & \text{c)} \quad & \det \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & & & 1 & a \end{pmatrix}}_{n \text{ colonnes}}. \end{aligned}$$

16.4. Déterminer, si elle existe, la matrice inverse de la matrice donnée :

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ sur } \mathbb{R}; \quad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \text{ sur } \mathbb{C}; \quad \text{c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sur } \mathbb{Z}_2;$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sur } \mathbb{Z}_2; \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sur } \mathbb{Z}_3.$$

16.5. Montrer que \mathbb{Z}_6 n'est pas un champ. Généralisez votre raisonnement à beaucoup de \mathbb{Z}_n , où $n \in \mathbb{N}$.

Chapitre 17

Fonction réelles de plusieurs variables

17.1. Faites un schéma du plus grand domaine de la fonction et de quelques-unes des lignes de niveau (n et R sont des constantes) :

$$\begin{aligned} f : (x, y) &\mapsto 2x - 3y + 1; & k : (x, y) &\mapsto \sqrt{16 - x^2 - y^2}; \\ g : (x, y) &\mapsto \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}; & l : (x, y) &\mapsto \ln(x \cdot y); \\ h : (x, y) &\mapsto xy; & m : (P, V) &\mapsto T = \frac{1}{nR} PV; \\ j : (x, y) &\mapsto 5; & n : (P, T) &\mapsto V = nR \frac{T}{P}. \end{aligned}$$

17.2. Décrivez le plus grand domaine et les surfaces de niveau de la fonction (où a, b, c sont des constantes strictement positives) :

$$\begin{aligned} f : (x, y, z) &\mapsto \ln(x \cdot y); & j : (x, y, z) &\mapsto \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}; \\ g : (x, y, z) &\mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}; & k : (x, y, z) &\mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}; \\ h : (x, y, z) &\mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}; & l : (x, y, z) &\mapsto \ln(x \cdot y \cdot z). \end{aligned}$$

17.3. En représentant le système d'axes $oxyz$, faites un schéma du graphe, de quelques lignes de niveau dans \mathbb{R}^2 et des lignes correspondantes sur le graphe pour la fonction

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto 2x - 3y + 1; & \text{d) } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto \sin \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \text{b) } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}; & \text{e) } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto \sin \frac{x}{y}. \\ \text{c) } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : (x, y) &\mapsto z = xy; \end{aligned}$$

17.4. La fonction suivante, considérée sur son plus grand domaine dans \mathbb{R}^2 , est-elle continue ?

$$\begin{aligned} \text{a) } f : (x, y) &\mapsto x^2 y^3 - \sin(x + y); & \text{c) } h : (x, y) &\mapsto \frac{x^2 + y^2}{x}. \\ \text{b) } g : (x, y) &\mapsto [x + y]; & \text{d) } j : (x, y) &\mapsto [x]^x \cdot [y]. \end{aligned}$$

17.5. La fonction suivante est-elle continue sur son plus grand domaine ? Peut-on étendre le domaine à \mathbb{R}^2 tout en gardant une fonction continue ?

$$\begin{aligned} \text{a) } (x, y) &\mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}; & \text{b) } (x, y) &\mapsto \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}; & \text{c) } (x, y) &\mapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

17.6. Donner le plus grand domaine de la fonction et calculer les dérivées partielles premières :

$$\begin{aligned} f : (x, y) &\mapsto e^x \sin y; & j : (x, y, z) &\mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ g : (x, y) &\mapsto (x^2 + y^2)e^{-xy}; & k : (x, y, z, t) &\mapsto x^2 - y^2 + z^2 - t^2. \\ h : (x, y) &\mapsto e^{\cos(x/y)}; \end{aligned}$$

17.7. Si $f(x, y) = \cos^2(x + 3y)^2$, que valent

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)? & & \text{b) } \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)? & & \text{c) } \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{16}\right)? \end{aligned}$$

17.8. Si $PV = nRT$ avec n, R constantes, que valent

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial T}{\partial P}? & & \text{b) } \frac{\partial T}{\partial V}? & & \text{c) } \frac{\partial P}{\partial T}? & & \text{d) } \frac{\partial V}{\partial P}? & & \text{e) } \frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P}? \end{aligned}$$

17.9. Considérons la fonction

$$\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}.$$

En quel(s) point(s) de \mathbb{R}^2 s'annule la dérivée partielle $\frac{\partial \rho}{\partial x}$? Même question pour $\frac{\partial \rho}{\partial y}$. Donnez une interprétation géométrique de vos résultats.

17.10. Pour $f(x, y) = \int_{3\pi}^{x+3y} \cos t^2 dt$, déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

17.11. Calculer toutes les dérivées partielles du second ordre des fonctions appliquant x sur

a) $\frac{x-y}{x+y}$; b) y^x ; c) $\arctan \frac{x}{y}$; d) $y^2 \sin \frac{x}{y}$.

17.12. L'équation d'onde en la fonction inconnue $(x, t) \mapsto u(x, t)$ est de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

avec c une constante. Montrer que pour des choix judicieux des constantes A, α et β , la fonction $(x, t) \mapsto A \sin(\alpha x) \sin(\beta t)$ est solution de cette équation. Faites de même pour la fonction $(x, t) \mapsto A \cos(\alpha x - \beta t)$.

17.13. Après injection d'un produit, la concentration $c(x, t)$ à l'instant t en un point situé à une distance x du point d'injection satisfait, d'après un certain modèle,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = k \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

où k est une constante. Pour quelle(s) valeur(s) des constantes a et b (exprimées en fonction de k) la fonction $c(x, t) = t^a e^{bx^2/t}$ est-elle conforme au modèle?

17.14. Déterminer quelles fonctions parmi les suivantes sont harmoniques :

a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \ln \sqrt{x^2 + y^2}$;

b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}$;

c) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x e^x \cos y - y e^x \sin y$;

d) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto -123$;

e) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3x^2 y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$.

17.15. Calculer toutes les dérivées partielles quatrièmes de la fonction

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^{x^2 + y^2}$$

(utilisez la symétrie en x, y de la fonction).

17.16. Donner l'image, par la différentielle en $(2, 3)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 e^{x-y}$, des vecteurs liés en $(2, 3)$ et de composantes

a) $(1, 0)$; b) $(0, 1)$; c) $(5, 6)$; d) $(-5, -6)$.

17.17. Soit f la fonction

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x y^2 z^3,$$

p le point de \mathbb{R}^3 de coordonnées $(3, 2, 1)$ et \mathbf{v} le vecteur de \mathbb{R}^3 lié en p et de composantes $(1, -1, 2)$. Calculer $df(p)(\mathbf{v})$.

17.18. Calculer les dérivées premières et les dérivées partielles secondes des fonctions :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 2y^2;$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2;$$

$$h : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \ln(xy^2);$$

$$j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \cos(xy^2);$$

$$k : \mathbb{R} \times \{y \in \mathbb{R} \mid \forall k \in \mathbb{Z} : y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \operatorname{tg} \frac{x}{y};$$

$$l : (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x \ln y + y \ln x;$$

$$m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3 y + e^{xy^2}.$$

17.19. Soit la fonction

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto z = x^2 y - 3y.$$

Si des accroissements donnés à x et y sont notés respectivement Δx et Δy , exprimer l'accroissement Δz de z ainsi que la valeur de la différentielle $dz(x, y)(\Delta x, \Delta y)$.

17.20. Démontrer que la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est différentiable en tout point (x, y) , mais que ses dérivées partielles premières ne sont pas continues en $(0, 0)$.

17.21. Pour $p = (\frac{\pi}{4}, 1)$ et le vecteur \mathbf{v} de \mathbb{R}^2 lié en p de composantes $(3, 5)$, calculer la dérivée selon \mathbf{v} de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (\cos(x \cdot y))^2.$$

17.22. Soit la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - xy - y^2$$

et en chaque point (x, y) du plan le vecteur \mathbf{v} de norme 1 lié en ce point et faisant avec le demi-axe positif ox^+ un angle mesurant $\frac{\pi}{3}$ radians. Calculer $D_{\mathbf{v}}f(x, y)$.

17.23. Considérons la fonction

$$\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

et le point $p = (x, y)$ de \mathbb{R}^2 , dont les coordonnées polaires sont ρ et θ ; nous supposons $\rho \neq 0$.

a) Donnez la dérivée directionnelle de la fonction ρ au point p dans la direction qui fait un angle orienté de mesure φ avec le demi-axe positif ox^+ .

b) Montrez que cette dérivée directionnelle ne dépend que de θ et de φ .

c) En un point p fixé, dans quelle direction cette dérivée directionnelle est-elle maximum? minimum? Interprétez géométriquement votre résultat.

17.24. Si f est une fonction de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} et \mathbf{v} un vecteur de \mathbb{R}^2 lié au point (x_o, y_o) , quelle relation avons-nous entre la dérivée de f selon \mathbf{v} , que nous notons $D_{\mathbf{v}}(f)(x_o, y_o)$, et la dérivée de f dans la direction de \mathbf{v} au point (x_o, y_o) ?

17.25. Soit la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer à partir de sa définition même que $D_{\mathbf{v}}(f)(0, 0)$ existe pour tout vecteur \mathbf{v} lié au point $(0, 0)$. En considérant une suite de points sur la parabole d'équation $x = y^2$ montrer ensuite que la fonction f n'est pas continue à l'origine.

17.26. Calculer la dérivée de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - xy - 2y^2$$

au point $p = (1, 2)$ dans la direction orientée formant avec l'axe ox un angle orienté mesurant 60° .

17.27. Calculer au point $(1, 2, 1)$ la dérivée de la fonction

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (u, v, w) \mapsto u^2 - 3vw + 5$$

dans la direction orientée faisant le même angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$ avec chacun des demi-axes positifs de coordonnée.

17.28. Soit f la fonction

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto e^{xz} \sin(x + y).$$

Déterminez le gradient de f au point $(2, -2, 1)$.

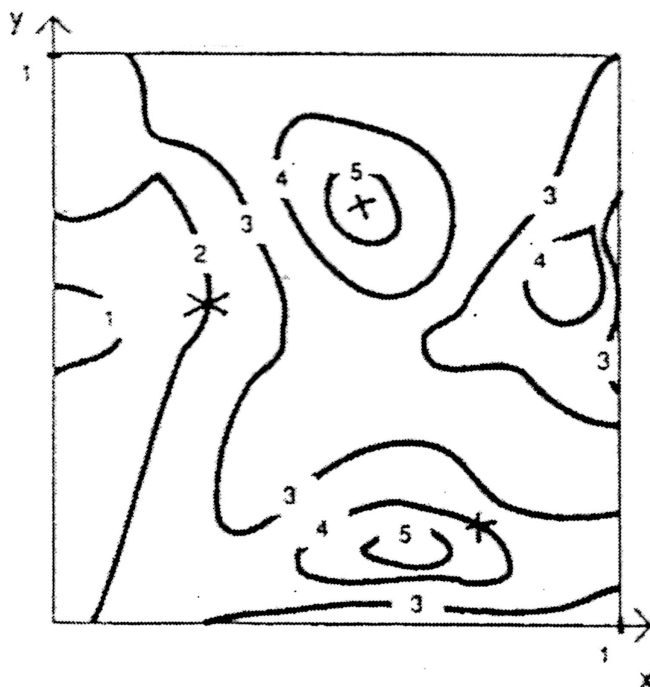
17.29. Décrivez le gradient, en un point quelconque de \mathbb{R}^2 , de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto 5; \\ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto 2x; \\ h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto 2x + 3y; \\ j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

17.30. Faites un schéma dans un système d'axes de quelques courbes de niveau et quelques gradients de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy.$$

17.31. Voici des lignes de niveau d'une fonction de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} , avec mention des valeurs de la fonction. Dessinez une estimation du gradient de la fonction aux trois points marqués.



17.32. Soit la fonction f appliquant (x, y) sur $\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}$. Après avoir déterminé le domaine de f et la nature du graphe de f , faites un schéma dans un système d'axes $oxyz$

- du graphe de f ;
- de quelques lignes de niveau de f dans le plan oxy ;
- des lignes correspondantes sur le graphe de f ;
- de quelques gradients de f .

17.33. Donner l'équation du plan tangent au graphe de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (3 + \text{ch}(x + y))(1 - 5x + x^2)$$

au point $(0, 0, 0)$.

17.34. Montrez que les plans tangents à la surface de \mathbb{R}^3 d'équation

$$z^2 = (x - 2)^2 + (y + 5)^2$$

passent tous par un même point : donnez une preuve analytique et une preuve géométrique (cette dernière considérera la nature de la surface).

17.35. Au point indiqué, dans quelle direction orientée la fonction augmente-t-elle le plus ?

- a) $f : \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \cos(x \cdot y)$ au point $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$;
- b) $f : \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto 3x - 2y + 5z$ au point $(6, 7, 8)$;
- c) $f : \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto 4x^2 - y^2 + 3z^2$ au point $(1, -2, 5)$;

17.36. Déterminer l'erreur commise dans le raisonnement suivant. Soit $f(x, y) = (x + y)^2$. Posons $x = u - v$ et $y = u + v$. Alors

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -1, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x + y),$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = -2(x + y) + 2(x + y) = 0. \tag{*}$$

D'autre part, par la définition de f , il vient $f(u, v) = (u + v)^2$ et donc

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 2(u + v) = 2y. \tag{**}$$

La comparaison de (*) et (**) prouve que la variable y est toujours nulle.

17.37. Pour le champ \vec{v} de vecteurs sur \mathbb{R}^2 défini par

$$\vec{v}(x, y) = \cos(x - y^2)\vec{e}_x + e^{xy}\vec{e}_y,$$

calculer

- a) $(\text{rot } \vec{v})(\frac{\pi}{2}, 0)$; c) $(\vec{\nabla} \times \vec{v})(1, 0)$;
 b) $(\text{div } \vec{v})(0, 0)$; d) $(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})(0, -1)$.

17.38. Dans \mathbb{R}^2 , calculer l'intégrale curviligne

a) $\int_{C^+} x dy + y dx$, où C^+ est l'arc de cubique défini par $y = x^3 + x^2 + x + 1$ et $0 \leq x \leq 1$;

b) $\int_{C^+} ((x^2 - 2xy)\vec{e}_x + (2xy + y^2)\vec{e}_y) \cdot \vec{ds}$, où C^+ est l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$, joignant le point $(1, 1)$ au point $(2, 4)$;

c) $\int_{C^+} (2a - y) dx + x dy$, où a est une constante réelle strictement positive et C^+ est l'arc de cycloïde de paramétrisation

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$$

d) $\int_{C^+} (x^2 + y) dx + (2x + y^2) dy$, où C^+ est le carré de sommets $(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)$ parcouru une fois dans le sens anti-trigonométrique. Quel serait le résultat si ce même carré était parcouru deux fois dans le sens trigonométrique ?

17.39. Calculer le travail de la force \vec{F} lorsque le cercle de \mathbb{R}^2 centré à l'origine et de rayon R est parcouru une fois dans le sens trigonométrique, si

- a) $\vec{F}(x, y) = (x + y)\vec{e}_x + (x - y)\vec{e}_y$;
 b) $\vec{F}(x, y) = xy\vec{e}_x + (x + y)\vec{e}_y$;
 c) $\vec{F}(x, y) = 1.000.000\vec{e}_x - 0,000.000.1\vec{e}_y$.

17.40. Dans le plan \mathbb{R}^2 , soit T le triangle de sommets $(0, 0), (1, 0)$ et $(0, 1)$, et C^+ son bord orienté dans le sens trigonométrique. Soit le champ de vecteurs \vec{v} sur \mathbb{R}^2 , défini par

$$\vec{v}(x, y) = xy\vec{e}_x - x\vec{e}_y.$$

Calculer l'intégrale circulaire $\oint_{C^+} \vec{v} \cdot \vec{ds}$.

17.41. Soit D le disque de rayon 3 centré à l'origine de \mathbb{R}^2 et C^+ son bord orienté dans le sens trigonométrique. Soit le champ de vecteur \vec{v} sur \mathbb{R}^2 , défini par

$$\vec{v}(x, y) = x^2y\vec{e}_x - e^y\vec{e}_y.$$

Calculer l'intégrale circulaire $\oint_{C^+} \vec{v} \cdot \vec{ds}$.

17.42. Calculer le champ de gradients de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x - y^2$. Dessiner les lignes de niveau $-1, 0, 1$ et 2 de f , ainsi que les gradients de f en quelques points, par exemple $(1, 1), (0, 1), (1, 0), (3, 1), (3, -1)$. Donner de manière très simple la valeur de l'intégrale curviligne $\int_{C^+} (\text{grad } f) \cdot \vec{ds}$ si C^+ est la courbe orientée de paramétrisation

$$\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\sin t, -\cos t).$$

Même question si le domaine de γ est plutôt $[0, \pi]$.

17.43. Considérons le champ de vecteurs \vec{v} sur \mathbb{R}^2 donné par

$$\begin{cases} v^x(x, y) = x - y \\ v^y(x, y) = x + y \end{cases}$$

Calculer l'intégrale curviligne de \vec{v} le long des trois courbes orientées de \mathbb{R}^2 définies par les paramétrisations

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, t^2), \\ \gamma_2 &: [1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2 : u \mapsto (1 - u, (1 - u)^2), \\ \gamma_3 &: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 : v \mapsto (\sqrt{v - 1}, v - 1). \end{aligned}$$

17.44. Dans \mathbb{R}^2 , calculer l'intégrale circulaire

a) $\oint_{C^+} 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$, où C^+ est le parcours simple du triangle de sommets $a = (1, 1), b = (2, 2), c = (1, 0)$ dans ce sens;

b) $\oint_{C^+} xy^2 dx - x^2y dy$, où C^+ est la circonférence d'équation $x^2 + y^2 = 16$ parcourue trois fois dans le sens trigonométrique;

c) $\oint_{C^+} \vec{F} \cdot \vec{ds}$, où $\vec{F}(x, y) = (x + y, y - x)$ et C^+ est obtenu en suivant du point $a = (1, 0)$ au point $b = (2, 3)$ une parabole d'axe oy , puis la droite de b à a ;

d) $\oint_{C^+} dx + x dy$ où C^+ est la courbe refermée fabriquée à partir des paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $x = y^2$;

e) $\oint_{C^+} \vec{F} \cdot \vec{ds}$, où $\vec{F}(x, y) = x^3 \vec{e}_x - y^3 \vec{e}_y$ et C^+ est la circonférence d'équation $x^2 + y^2 = 1$ parcourue 5 fois dans le sens trigonométrique.

17.45. Dans \mathbb{R}^2 , calculer à l'aide d'une intégrale circulaire l'aire de la région délimitée par

a) l'ellipse d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

b) la courbe d'équation $x^{2/5} + y^{2/5} = 1$.

17.46. Dans \mathbb{R}^2 , montrer que la valeur I de l'intégrale curviligne

$\int_{C^+} (6x + 2y) dx + (6y + 2x) dy$ est indépendante de la courbe orientée joignant le point $(0, 0)$ au point $(1, 1)$. Trouver deux fois cette valeur I en prenant d'abord C^+ rectiligne, puis C^+ situé sur la parabole d'équation $y = x^2$. Déterminer une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dont le gradient au point (x, y) est le vecteur de composantes $(6x + 2y, 6y + 2x)$. Combien existe-t-il de telles fonctions f ? Expliquer comment elles permettent toutes d'obtenir très simplement la valeur I .

17.47. L'intégrale curviligne suivante est-elle dépendante de la courbe orientée C^+ choisie pour se rendre dans \mathbb{R}^2 d'un point p à un point q ? Dans l'affirmative, déterminez deux points p et q et deux courbes orientées joignant p à q sur lesquelles l'intégrale diffère. Dans la négative, trouvez un champ scalaire f sur \mathbb{R}^2 tel que la valeur de l'intégrale soit $f(p) - f(q)$.

- | | |
|--|---|
| a) $\int_{C^+} (x^2 \vec{e}_x + y^2 \vec{e}_y) \cdot \vec{ds}$; | c) $\int_{C^+} y \cos dx + \sin x dy$; |
| b) $\int_{C^+} (y^2 \vec{e}_x + x \vec{e}_y) \cdot \vec{ds}$; | d) $\int_{C^+} e^y dx + e^x dy$. |

17.48. Soit C^+ une courbe orientée lisse refermée de \mathbb{R}^2 , sans point multiple. Supposons que C^+ constitue le bord d'un sous-ensemble compact D de \mathbb{R}^2 tel que la formule de Green soit valable pour tout champ de vecteurs de classe C^2 sur un certain ouvert U contenant D . Considérons deux fonctions f et g de classe C^2 sur U .

a) Prouvez

$$\iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_{C^+} f(x, y) dy - g(x, y) dx.$$

b) Déduisez du a) que l'aire de D vaut à la fois

$$\int_{C^+} x dy \quad \text{et} \quad \int_{C^+} y dx.$$

c) Notons \vec{n} le vecteur normal unitaire à C^+ , orienté vers l'extérieur de D . Déduisez du a) la formule suivante pour tout champ de vecteurs de classe C^2 sur U :

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{v} dx dy = \oint_{C^+} \vec{v} \cdot \vec{ds}.$$

17.49. Soit \vec{v} le champ de vecteurs sur \mathbb{R}^2

$$\vec{v}(x, y) = 3x^2y \vec{e}_x + (x^3 + y^5) \vec{e}_y.$$

a) Si C^+ est le carré de sommets $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique, que vaut $\oint_{C^+} \vec{v} \cdot \vec{ds}$?

b) Prouver que pour toute courbe refermée C^+ de \mathbb{R}^2

$$\oint_{C^+} \vec{v} \cdot \vec{ds} = 0.$$

c) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} 3x^2y & = & \frac{\partial f}{\partial x} \\ x^3 + y^5 & = & \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases} ?$$

Chapitre 18

Équations différentielles

18.1. Pour quelle(s) valeur(s) réelle(s) de a l'équation différentielle en la fonction inconnue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto y(t)$

$$\frac{dy}{dt}(t) = (t - a)y(t)$$

admet-elle la solution

$$y(t) = C e^{r(t-1)^2}$$

où C et r sont des constantes réelles données avec $C \neq 0$?

18.2. Trouver une équation différentielle du premier ordre admettant pour solutions les fonctions $x \mapsto y = ax$, où a est n'importe quel nombre réel.

18.3. Trouver une équation différentielle du premier ordre admettant pour solutions au moins toutes les fonctions $y = y(x)$ satisfaisant

$$x + a = e^x y$$

pour une certaine constante réelle a .

18.4. D'après un météorologiste, la température T dans une certaine masse d'air est liée à l'altitude h : le taux de changement de T par rapport à h est proportionnel à h et au logarithme de T . Faut-il préciser en quelle base est pris le logarithme? Exprimer l'hypothèse du météorologiste par une équation différentielle.

18.5. Sans résoudre l'équation, déterminer le lieu des points (x, y) où la solution $y = y(x)$ de l'équation différentielle $y' = xy - 1$ atteint un minimum ou un maximum. Montrer que toutes les solutions ont un graphe dans \mathbb{R}^2 qui coupe les axes sous un angle constant.

18.6. Dans quelle région du plan \mathbb{R}^2 les graphes des fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = \sin(x^2 + y^2)$ ont-ils une pente strictement positive?

18.7. Quelle équation différentielle caractérise la famille des courbes d'équation $y = C_1 x + C_2 x^2$, où C_1 et C_2 varient dans \mathbb{R} ?

18.8. Soit l'équation différentielle $(x + y)dx + x dy = 0$. Quel est le lieu des points appartenant aux courbes représentant les solutions y de cette équation différentielle et en lesquels y' vaut 2?

18.9. Résoudre les équations différentielles du premier ordre à variables séparables :

a) $y' \sqrt{1 - x^2} + xy = 0$;

b) $(1 - y^2)dy - y dx = 0$;

c) $(1 + y^2)x + (1 + x^2)y' = 0$;

pour les équations suivantes donner de plus la solution particulière satisfaisant $y_0 = y(x_0)$:

d) $(x - 4)xy' + y = 0$, $x_0 = 5$, $y_0 = -1$;

e) $(1 + y)dx - (1 + x)dy = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

18.10. Quelle est la courbe de \mathbb{R}^2 qui représente une solution de l'équation différentielle $y' = \ln^2 x$ et qui coupe la première bissectrice au point d'ordonnée égale à 1?

18.11. Montrer que la substitution $y = \frac{t}{x}$ réduit l'équation différentielle $y(1 - xy)dx = x(1 + xy)dy$ à une équation à variables séparables. Résoudre l'équation donnée.

18.12. Une capacité se décharge au travers d'une résistance. Sa charge q , fonction du temps t , satisfait

$$\frac{dq}{dt} = i$$

où l'intensité i du courant est donnée comme suit en fonction du temps :

$$i = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC}.$$

Dans cette expression, q_0 , R et C sont des constantes (q_0 désigne la charge à l'instant initial $t = 0$, R la résistance et C la capacité).

- a) Exprimer q en fonction du temps et des constantes de l'énoncé.
- b) Les trois constantes q_0 , R et C étant positives, la charge augmente-t-elle ?
- c) Pour t tendant vers l'infini, la charge a-t-elle une valeur limite ?

18.13. Trouver la solution $y = y(x)$ de l'équation différentielle

$$y' = (1 + y^2)x^2$$

satisfaisant la condition initiale $y(0) = 1$.

18.14. Résoudre les équations différentielles du premier ordre à fonction homogène :

- a) $(x^3 + y^3) - 3xy^2y' = 0$;
- b) $(2x + 3y)dx + (y - x)dy = 0$;
- c) $4y dx + x dy = 0$;
- d) $y\sqrt{x^2 + y^2} dx - x\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dy = 0$;
- e) $\left(x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x}\right) + x \left(\cos \frac{y}{x}\right) y' = 0$.

18.15. Résoudre les équations différentielles du premier ordre en les ramenant à une équation à fonction homogène :

- a) $(3x + 3y - 4)y' + (x + y) = 0$;
- b) $(2x - 5y - 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0$;
- c) $y' = (2x + 3y + 5)^2$;
- d) $(3x + 2y + 1)dx - (3x + 2y - 1)dy = 0$.

18.16. Résoudre les équations de Bernoulli :

- a) $y' + 2xy + xy^4 = 0$;
- b) $xy' + y = x^3y^4$;
- c) $y' - y = xy^2$;
- d) $yy' - xy^2 - x = 0$;
- e) $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$.

18.17. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$y' = -\frac{x + y}{x + 6},$$

ainsi que toutes les solutions particulières prenant la valeur 3 pour $x = 2$.

18.18. Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre :

- a) $y' + 2xy = 4x$;
- b) $(x - 2)y' = y + 2(x - 2)^3$;
- c) $y' + y \cotg x = 5e^{\cos x}$, et donner la solution particulière par le point $\left(\frac{\pi}{2}, -4\right)$;
- d) $x dy - 2y dx = (x - 2)e^x dx$;
- e) $\frac{dr}{d\theta} + 3r = 2$.

18.19. Considérons l'équation différentielle

$$(x^2 + 2x + 5)y' - (x + 1)y = x + 1.$$

- a) Déterminer la solution générale de cette équation différentielle.
- b) Combien de solutions particulières passent par le point $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$? Déterminer toutes ces solutions particulières.

18.20. Résoudre les équations différentielles suivantes : lorsque des conditions initiales sont données, trouver les solutions qui satisfont de plus ces conditions.

- a) $(1 + x^2)xy dy = (1 + y^2)dx$;
- b) $y' - 3\frac{y}{x} = \frac{x + 1}{x}$;
- c) $y' - 2\frac{y}{x + 1} = (x + 1)^3$;
- d) $y' = 0$;
- e) $y' = \frac{2x - 1}{x^2}y + 1$;
- f) $y' + \frac{y}{2x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 4$, $y_0 = 4$;
- g) $(1 - x)dy - y^2 dx = 0$;
- h) $d\rho + \rho \operatorname{tg} \theta d\theta = 0$;
- i) $x^3y' + (2 - 3x^2)y = x^3$;
- j) $\sqrt{1 - 4x^2} dy + 2\sqrt{1 - y^2} dx = 0$.

18.21. Résoudre l'équation différentielle $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$, où $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

18.22. L'équation différentielle

$$y' + yx = \frac{x^3}{2y}$$

admet-elle une solution passant par le point $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$? Si oui, déterminer une telle solution ; est-elle unique ?

18.23. Résoudre les équations différentielles suivantes, en tenant compte des conditions initiales (CI) données :

- | | |
|---|---|
| a) $y' - xy = x^3$; | j) $y'(x+1) - 2y = x+1$
(CI : $x_0 = y_0 = 0$); |
| b) $y' - \frac{a}{x}y = \frac{x+1}{x}$
où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; | k) $y' + \frac{y}{2x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$
(CI : $x_0 = y_0 = 4$); |
| c) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$; | l) $x^3y' + (2-3x^2)y = x^3$; |
| d) $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$; | m) $y' + y \cotg x = 5e^{\cos x}$
(CI : $x_0 = \frac{\pi}{2}, y_0 = -4$); |
| e) $y' \cos x + y \sin x = 1$; | n) $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$
(CI : $x_0 = y_0 = 2$); |
| f) $y' + y = e^{-x}$; | o) $yy' - xy^2 - x = 0$. |
| g) $y' - y \tg x = \cos x$; | |
| h) $y' - \frac{2y}{x} = x^2e^x$; | |
| i) $xy' + 4y = x$; | |

18.24. Déterminer la solution générale et, lorsque des conditions initiales sont données, la solution correspondante des équations différentielles suivantes :

- | | |
|--|---|
| a) $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$,
$x_0 = y_0 = 2$; | j) $y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n$, où $n \in \mathbb{N}$; |
| b) $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$; | k) $x(1-x^2)dy + (2x^2-1)y dx = ax^3 dx$,
où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; |
| c) $y - y' \cos x = y^2(1 - \sin x) \cos x$; | l) $y' + 2y - 4y^3 = 0$; |
| d) $y' = \frac{7x+x+2}{3x+5y+6}$; | m) $\sin y \frac{dy}{dx} = (1-x \cos y) \cos y$; |
| e) $y' + y \cotg x = \sin x$; | n) $ye^{2x} dx - (1+e^{2x})dy = 0$; |
| f) $y' + \frac{y}{x} - ay^2 \ln x = 0$ (où $a \in \mathbb{R}^*$); | o) $(x^2y - 2xy^2)dx = (x^3 - 3x^2y)dy$; |
| g) $y' + y \tg x = \sec^2 x$; | p) $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$; |
| h) $y' - y \sec x = 1$; | q) $\tg x \sin^2 y dx + \cos^2 x \cotg y dy = 0$; |
| i) $x(x^2+1)y' + (x^2-1)y = \frac{x^3}{1+x^2}$; | r) $3e^x \tg y dx + (1-e^x) \sec^2 y dy = 0$. |

18.25. Résoudre l'équation différentielle en la fonction inconnue $t \mapsto y(t)$

$$\frac{dy}{dt}(t) + y(t) = \max(\sin 3t, 0).$$

18.26. Soit l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + y f(x) = \sin x.$$

a) Déterminer la fonction f pour que cette équation admette comme solution la fonction cosinus. Dans la suite, nous travaillons avec cette fonction f .

b) Quelle est la solution générale de l'équation différentielle ?

c) Quelle est la solution particulière qui admet un extrémum pour $x = \frac{\pi}{4}$?

18.27. Quelle est la fonction solution de l'équation différentielle $(x^2 + y^2)dx = 2xy dy$ et dont le graphe coupe la droite d'équation $y = x + 3$ au point d'abscisse égale à -2 ?

18.28. Un certain mélange est formé d'un composant qui résiste au temps, et d'un autre composant qui se volatilise à une vitesse proportionnelle à la quantité de mélange présente à l'instant considéré. Si C_1 est la quantité présente du composant constant, C_2 celle du deuxième composant à l'instant t et k le facteur de proportionnalité, exprimez C_2 en fonction du temps t et des constantes $C_1, C_2(0)$ et k . Représenter graphiquement C_2 en fonction du temps.

18.29. Lorsque deux certains produits chimiques A et B entrent en réaction, une molécule de A se lie à une molécule de B . Notons a le nombre de molécules de A présente à l'instant initial, et pareillement b celui de B . Nous désignerons encore par $y(t)$ le nombre de molécules du nouveau produit formées après t unités de temps.

a) Admettons que l'accroissement de y par « petit » intervalle de temps soit proportionnel au nombre de molécules de A présentes à ce moment, ainsi qu'au nombre de molécules de B présentes à ce moment. Quelle équation différentielle en la fonction inconnue $t \mapsto y(t)$ traduit cette hypothèse ?

b) Résolvez cette équation différentielle en supposant le facteur de proportionnalité constant.

c) Si $a > b$, quelle est la valeur asymptotique de y pour t tendant vers $+\infty$? Que signifie votre réponse en termes des produits chimiques?

18.30. Désignons par $C(t)$ la quantité d'un certain médicament présente dans le sang d'un patient à l'instant t . Ce médicament est éliminé par l'organisme. Admettons que la diminution de la quantité $C(t)$, sur l'intervalle de temps $[t, t + h]$, c'est-à-dire $C(t + h) - C(t)$, soit approximativement égale à $-kC(t)h$, où k est une constante dépendant du médicament.

Supposons d'abord qu'une seule injection soit faite au patient, disons à l'instant $t = 0$, d'une dose C_0 du médicament.

a) Le modèle considéré conduit à un problème de Cauchy sur la fonction $C = C(t)$. Résolvez-le et faites un graphique de C en fonction du temps.

b) Montrez qu'à l'instant $t = \frac{1}{k}$, environ 63% du médicament a été éliminé, et au temps $t = \frac{2}{k}$ environ 87%.

Imaginons ensuite plutôt que le patient reçoive la même dose qu'à l'instant 0 aux instants $T, 2T, 3T, \dots$. Désignons par C_1 la concentration du médicament immédiatement après la deuxième injection, par C_2 cette concentration immédiatement après la troisième injection...

c) Calculer C_1, C_2 puis en général C_{n-1} .

d) Montrer que la suite (C_n) est croissante et convergente. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$.

e) Représenter graphiquement la quantité $C(t)$ en fonction du temps t .

18.31. La transformation du trypsinogène en trypsine est catalysée par la trypsine, et de ce fait la réaction s'emballe. En notant $[A]$ la quantité de trypsinogène et $[B]$ la quantité de trypsine au même instant, l'évolution de ces deux quantités obéit à la loi

$$-\frac{d[A]}{dt} = k[A][B],$$

où k est constante. Notons A_0 et B_0 les quantités initiales; il faut aussi $[A] + [B] = A_0 + B_0$ car toute la trypsinogène se transforme en trypsine.

Établissez une expression donnant $[A]$ en fonction du temps.

Étudiez $[A]$ en fonction du temps.

18.32. Considérons l'équation différentielle en la fonction inconnue $U = U(t)$:

$$\frac{d^3U}{dt^3} - 3\frac{d^2U}{dt^2} + 2\frac{dU}{dt} = 0.$$

a) Combien de constantes d'intégration comporte la solution générale de cette équation?

b) Pour quelle(s) valeur(s) des constantes α et β la fonction $t \rightarrow \alpha t + \beta$ est-elle solution de l'équation?

c) Pour quelle(s) valeur(s) de la constante γ la fonction $t \rightarrow e^{\gamma t}$ est-elle solution de l'équation?

d) Quelle est la solution générale de l'équation?

e) Cette équation admet-elle une solution qui soit une fonction périodique?

18.33. Quelle est la solution générale de l'équation différentielle

$$ppy'' - 6y' + 9y = x + e^x?$$

Déterminez toutes les solutions particulières y telles que $y(0) = 2$.

18.34. Déterminer toutes les fonctions $x \mapsto y(x)$ solutions de l'équation différentielle

$$y^{5/} - y^{3/} = 0$$

avec de plus $y^{2/}(0) = 4$ et $y^{3/}(0) = 1$.

Ces fonctions forment-elles un sous-espace vectoriel de $C^4(\mathbb{R})$, l'espace de toutes les fonctions cinq fois dérivables de \mathbb{R} vers \mathbb{R} ? Ces mêmes fonctions forment-elles un sous-espace affine de $C^4(\mathbb{R})$? Si oui, quelle est la dimension de ce sous-espace?

18.35. Résoudre les équations différentielles :

a) $y^{5/} - y^{2/} = 0$;

b) $y^{2/} - y = \sin x$;

c) $y^{4/} - y^{2/} = x + \sin x$.

18.36. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

a) $y''' - 4y'' + 3y' = x^2$;

b) $xy'' - y' = x$;

c) $y''' - 4y'' = 5$;

d) $y''' - y'' + 3y' - 9y = 0$;

e) $y''' - 4y' = x$;

f) $y'''' - 3y'' - 4y = e^x$.

18.37. Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 2y' = 0$;

b) $y'' - 4y' + 4y = 0$;

c) $y'' - 4y' + 3y = 0$;

d) $2y'' - y' = 0$;

e) $y'' - 4y' = 0$;

f) $y'' + y' - 12y = 0$;

g) $y'' + 4y = 0$;

h) $y'' + y' + y = 0$;

i) $y'' + 2y' + y = 0$;

j) $y'' - 2y' - 8y = 0$;

k) $y'' - 7y' + 10y = 0$;

l) $y'' + 4y' + 5y = 0$;

m) $y'' - 4y' + 13y = 0$;

n) $y'' - 4y' + 3y = 0$.

18.38. Déterminer la solution particulière des équations différentielles suivantes répondant aux conditions initiales indiquées :

- a) $y'' + 10y' + 16y = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 12$;
 b) $y'' - 6y' + 10y = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 4$;
 c) $y'' + 9y = 0$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 1$.

18.39. Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

- a) $y'' - 6y' + 13y = 39$;
 b) $y'' + 2y' + 8y = 4x^2 - 6x - 3$;
 c) $y'' - 2y' - 3y = 2x + 1$;
 d) $y'' + 9y = 9e^{3x}$;
 e) $y'' - 2y' + y = 6e^x$;
 f) $y'' - 5y' + 6y = e^{-x}$;
 g) $y'' - y' - 3y = e^{2x}$;
 h) $y'' - 16y = 2e^{-4x}$;
 i) $y'' - 2y' + 5y = 10 \sin x$;
 j) $y'' - 5y' + 6y = -3 \sin x$;
 k) $y'' - 5y' + 4y = -2 \cos x + 8 \sin x$;
 l) $y'' - 2y' + 2y = \cos 2x$;
 m) $y'' + y = \cos 2x$;
 n) $y'' + 4y = \sin 2x - \cos 2x$;
 o) $y'' + y' = x^2$;
 p) $y'' - y = \sin x - \cos x$;
 q) $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$;
 r) $y'' + 2y' + 2y = x^2 + \sin x$;
 s) $y'' - 9y = x + e^{2x} - \sin 2x$;
 t) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1 + e^x$;
 u) $y'' + 2y' + 4y = e^x \sin 2x$;
 v) $y'' + y = -2 \sin x + 4 \cos x$;
 w) $y'' - 2y' + y = \sin x + \operatorname{sh} x$;
 x) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$.

18.40. Déterminer la solution particulière des équations différentielles suivantes répondant aux conditions initiales indiquées :

- a) $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 4x + 8$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 2$;
 b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + x^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y'_0 = 0$;
 c) $y'' - 2y' - 3y = 2x + 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{1}{3}$, $y'_0 = -\frac{4}{9}$;
 d) $y'' + 4y = 2 \cos 2x$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y'_0 = \frac{1}{2}$.

18.41. Déterminer la courbe de \mathbb{R}^2 représentant la solution des équations différentielles suivantes et répondant aux conditions imposées :

- a) $y'' - 2y' + 2y = 2 \sin x$, courbe dont la tangente à l'origine est l'axe des abscisses ;
 b) $y'' - 2y' = 2x$, courbe dont la tangente au point $(0, 2)$ est parallèle à l'axe des abscisses ;
 c) $y'' - 6y' + 9y = x^2 e^{3x}$, α) courbe dont la tangente au point $(0, 1)$ a un coefficient angulaire nul ;
 β) courbe dont la tangente au point $(0, 1)$ a une pente égale à $-\frac{1}{4}$;
 d) 1. $y'' + 4y = 3 \cos x$, courbe(s) passant par les points $(0, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 0)$;
 2. $y'' + 4y' = \sin 2x$,
 e) $y'' + 4y = \sin 3x$, courbe passant par les points $(0, 2)$ et $(\frac{\pi}{4}, \frac{9\sqrt{2}}{10})$.

18.42. Sous quelles conditions sur les nombres réels a, b, c l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ n'admet-elle que des solutions périodiques ?

18.43. Déterminer l'équation différentielle du second ordre linéaire homogène à coefficients constants, dont la solution générale est $y = Ce^{-x} \cos(2x + \varphi)$, où C et φ sont des constantes d'intégration.

18.44. Montrer que les équations différentielles suivantes admettent deux solutions particulières linéairement indépendantes de la forme x^α , avec $\alpha \in \mathbb{R}$:

- a) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$;
 b) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$;
 c) $y'' - \frac{3y'}{x} + \frac{3y}{x^2} = 0$.

Résoudre ensuite les équations :

- a) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x$;
 b) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln x$;
 c) $y'' - \frac{3y'}{x} + \frac{3y}{x^2} = 2x - 1$.

18.45. Soit l'équation différentielle $y'' + 2y' + my = 12x^2 e^{-x}$.

- a) Déterminer la constante réelle m de manière que $y = x^4 e^{-x}$ soit une solution particulière de cette équation.
 b) Déterminer ensuite, pour cette valeur de m , la solution générale.
 c) Quelle est la solution particulière qui passe par les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$?

18.46. Soit l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = f(x)$.

- a) Déterminer $f(x)$ pour que $y = 4x^2 e^{2x}$ soit solution de cette équation.
 b) Déterminer ensuite la solution générale.
 c) Déterminer la solution particulière dont le graphe est tangent à la première bissectrice à l'origine des axes.

18.47. Déterminer les fonctions nulles à l'origine et telles que leur dérivée première soit égale à l'opposé de la dérivée seconde.

18.48. Quelle est la courbe de \mathbb{R}^2 passant par l'origine et admettant en chaque point une pente égale au triple de l'abscisse du point ?

18.49. Quelle est la courbe de \mathbb{R}^2 passant par le point $(\frac{1}{2}, 2)$ dont la pente en chaque point est proportionnelle au carré de l'ordonnée du point ?

18.50. En tout point d'une courbe de \mathbb{R}^2 , l'angle formé par la tangente en ce point et l'axe des abscisses est complémentaire de l'angle formé par la droite joignant le point à l'origine et l'axe des abscisses. Caractériser cette courbe ; est-elle unique ?

18.51. La normale en un point quelconque d'une courbe de \mathbb{R}^2 passe toujours par un point fixe. Quelle est la nature de cette courbe ?

18.52. Un condensateur de capacité C se décharge dans un circuit comprenant une résistance R et une self-induction L . La charge Q , fonction du temps t , obéit à la loi

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = 0.$$

Déterminer Q en fonction de t lorsque

$$R = 20\Omega \quad , \quad C = 25\mu F \quad , \quad L = 0.1F.$$

Vers quel état évolue le circuit, et comment ?

Si, en outre, une différence de potentiel V est appliquée aux armatures du condensateur, l'équation à laquelle doit satisfaire Q est

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V.$$

Étudier le comportement du circuit lorsque V est constant.

18.53. Le mouvement d'une masse M suspendue à un ressort de coefficient d'élasticité k est dans le vide déterminé par l'équation

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0.$$

Déterminer ce mouvement et sa période s'il est périodique.

Si le mouvement a lieu dans un milieu tel que les forces de frottement soient proportionnelles à la vitesse, l'équation devient

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + r \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

où r est le coefficient de proportionnalité. Déterminer le mouvement en prenant comme conditions initiales $t = 0$, $y = A$, $y' = 0$ (discuter suivant les valeurs de M, k et r).

Dans le cas d'un mouvement oscillatoire, déterminer la pseudo-période et comparer avec la période du mouvement sans frottement.

18.54. Le mouvement d'un pendule simple de longueur l oscillant d'un petit angle θ dans un milieu où la résistance est proportionnelle à la vitesse est caractérisé par l'équation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2k \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

Déterminer le mouvement a) pour $k = 0$; b) pour $k \neq 0$.

Discuter, dans ce dernier cas, en prenant comme conditions initiales $\theta = \theta_0$ et $\frac{d\theta}{dt} = 0$ en $t = 0$.

18.55. Étudier la solution générale de l'équation différentielle du mouvement harmonique amorti

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k \frac{dx}{dt} + n^2 = 0$$

dans les cas $n^2 < k^2$, $n^2 = k^2$, $n^2 > k^2$. Quand la solution représente-t-elle un mouvement oscillatoire ? Lorsque $\frac{k^2}{n^2}$ est proche de zéro, comparer la solution avec celle de l'oscillateur non amorti (modification de la période, de l'amplitude).

18.56. L'altitude y d'une pierre, de masse m , lancée verticalement (vers le haut) dans l'air, vérifie l'équation différentielle $y'' = -mg - \frac{k}{m}y'$ où g et k sont des constantes strictement positives.

- a) Calculez l'altitude de la pierre en fonction du temps, si sa vitesse initiale est v_0 ($y'(0) = v_0$).
- b) Déterminez la vitesse v_0 pour que l'altitude maximale de la pierre soit A .

Chapitre 19

Intégrales multiples

19.1. Donner la valeur des intégrales suivantes :

- $\iint_D 3 \, dx \, dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } -2 \leq x \leq 2, \text{ et } -5 \leq y \leq 1\}$;
- $\iint_D -2 \, dx \, dy$, où $D = [0, 3] \times [-2, -1]$;
- $\iint_D dx \, dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } (x-4)^2 + (y-3)^2 \leq 9\}$;
- $\iint_D x \, dx \, dy$, où $D = [-1, 1] \times [0, 3]$;
- $\iint_D (x+y) \, dx \, dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leq 36\}$.

19.2.

- $\iint_D (x+y) \, dx \, dy$, où $D = [0, 1] \times [0, 1]$;
- $\iint_D x \sin y \, dx \, dy$, où $D = [0, 1] \times [0, \pi]$;
- $\iint_D (x+y)^2 \, dx \, dy$, où D est la région bornée du plan délimitée par les trois droites d'équations respectives $x=0$, $y=0$, $x+y=1$;
- $\iint_D y^2 \, dx \, dy$, où D est la couronne circulaire délimitée par les cercles de centre $(0,0)$ et de rayons 1 et 2;
- $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2\}$ avec des constantes réelles r_1, r_2 telles que $0 < r_1 < r_2$;
- $\iint_D y \, dx \, dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 - y^2 \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$;
- $\iint_D x \, dx \, dy$, où D est le triangle plein de sommets $(0,0)$, $(1,1)$ et $(0,1)$.
- $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} \, dx \, dy$, où D est la couronne circulaire délimitée par les cercles de centre $(0,0)$ et de rayons 1 et 2;
- $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2} \, dx \, dy$, où D est l'ensemble des (x, y) vérifiant $r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2$, avec r_1, r_2 nombres réels tels que $0 < r_1 < r_2$;
- $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, où D est défini par $x^2 + y^2 \leq 8x$;
- $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy$, où D est défini par $xy < 0$ et $x^2 + y^2 \leq 1$.
- $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x \leq y \text{ et } x^2 + y^2 \leq y\}$;
- $\iint_D x^2 y^3 \, dx \, dy$, où D est le triangle plein de sommets $(0,3)$, $(2,1)$ et $(3,5)$.

19.3. Si f est une fonction continue de $D = [0, 1] \times [0, 1]$ vers \mathbb{R} à valeurs toutes positives ou nulles et $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = 0$, faut-il que f soit la fonction nulle sur D ?

19.4. Soit S la surface de \mathbb{R}^3 d'équation $z = 2 - x^2 - y^2$. Faites un schéma de cette surface en dessinant aussi le système d'axes. Calculez ensuite le volume de la région située entre le plan d'équation $z = 0$ et la surface S , au dessus du plan $z = 0$. (Indice : utiliser une intégrable double en coordonnées polaires.)

19.5. Calculer, à l'aide d'une intégrale double, l'aire (géométrique et non algébrique) de la région bornée de \mathbb{R}^2

- délimitée par les paraboles d'équations respectives $y^2 = 10x + 25$ et $y^2 = -6x + 9$;
- délimitée par les courbes d'équations en coordonnées polaires $\rho = a(1 + \cos \theta)$ et $\rho = a \cos \theta$, où $a \in \mathbb{R}_0^+$;
- ne contenant pas l'origine et délimitée par les courbes d'équations $x^2 + y^2 = 4$ et $x = 1$ respectivement ;
- délimitée par les droites d'équations $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ en coordonnées polaires, ainsi que par l'arc de cercle de rayon 1 centré à l'origine et intercepté par ces deux droites.

19.6. Calculer par intégrale double le volume de la région bornée de \mathbb{R}^3 délimitée par les deux cylindres d'équations respectives $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + z^2 = 1$.

19.7. Déterminer

- a. $\iiint_D (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$, si $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$;
- b. $\iiint_D 5 \, dx \, dy \, dz$, si $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 \leq 1\}$;
- c. $\iiint_D \, dx \, dy \, dz$, si $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$.

19.8. Calculer, par réduction à des intégrales simples,

- a. $\iiint_D xyz \, dx \, dy \, dz$, où $D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$;
- b. $\iiint_D y \, dx \, dy \, dz$, où D est la région bornée du premier octant de \mathbb{R}^3 limitée par le plan d'équation $x + 2y + 3z = 1$.

19.9. Quelles sont les coordonnées cylindriques du point $(-1, 1, 2)$ de \mathbb{R}^3 ?

19.10. Quel est le point de \mathbb{R}^3 dont les coordonnées sphériques sont $(10, \pi/2, \pi/4)$?

Chapitre 20

Optimisation à deux variables

20.1. Déterminer les points critiques de la fonction f définie par

$$f(x, y) = (x - 1)y(y - x)$$

et déterminer leur nature (min, max, ni min ni max).

20.2. Calculez le volume de la plus spacieuse boîte de forme parallélépipède rectangle dont trois côtés sont sur les axes, dont un coin est l'origine du système d'axes orthonormés $Oxyz$ et dont le coin opposé (x, y, z) est dans le morceau de plan d'équation

$$\left\{ (x, y, z) \in (\mathbb{R}_0^+)^3 \mid \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \right\}.$$

20.3. Déterminez les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 + y^3 + 3xy + 43$
- $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - 3y^2 + x - 2y - 1$
- $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - 3y^2 + x - 2y - 1$

Chapitre 21

Complexes

21.1. Effectuer les opérations

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) $(1 + i) + (3 - 2i) - 4i$; | e) $(1 - i)^3$; |
| b) $(2 - 3i)(3 - 2i)$; | f) $\frac{1}{3 - 5i}$; |
| c) $(3 - i)(3 + i)$; | g) $\frac{2 + i}{4 - 3i}$; |
| d) $(3 + 2i)^2$; | h) $\frac{1 - i}{i}$; |
| | i) $\left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^{10}$. |

21.2. Calculer les racines carrées de :

- | | |
|------------|------------------|
| a) i ; | c) $-5 - 12i$; |
| b) $50i$; | d) $-21 + 20i$. |

21.3. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

- | | |
|--|---------------------------------|
| a) $6x^2 - 12x + 7 = 0$; | f) $x^4 - 1 = 0$; |
| b) $2x^4 + x^2 - 1 = 0$; | g) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$; |
| c) $x^2 - x(4 - i) + 5 + i = 0$; | h) $x^2 - (2 + 3i)x + 6i = 0$; |
| d) $x^2 + x + 3\sqrt{2}i = 0$; | j) $x^3 - 1 = 0$; |
| e) $x^2 - (4 \pm 2i)x + 12 + 4i = 0$; | k) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$. |

21.4. On considère l'équation :

$$z^3 - (1 + 8i)z^2 - (15 - 8i)z + 15 = 0.$$

- Cette équation admet une racine réelle. Quelle est cette racine ?
- Rechercher toutes les racines de cette équation dans le champ des nombres complexes.

21.5. Calculer en se servant de la représentation polaire

- $(3 + 3i)(-1 + i\sqrt{3})$;
- $(-2 - 2i\sqrt{3})/(-1 + i\sqrt{3})$;
- $(-1 + i\sqrt{3})^{10}$;
- les racines carrées de $3 - 4i$;
- les racines cubiques de $1 + i$;
- les racines cubiques de $2 + 2\sqrt{3}i$;
- les racines quatrièmes $1 + i\sqrt{3}$;
- les racines sixièmes de $-27i$.

21.6. Soit les ensembles A, B et C formés respectivement par les nombres complexes z satisfaisant

$$|z - 2| \leq 1, \quad |z - i| \leq 2 \quad \text{et} \quad |z - (2 + 2i)| \leq 2.$$

Représenter géométriquement ces ensembles dans le plan de Gauss.

21.7. Démontrer que deux nombres complexes non réels sont conjugués ssi la somme et le produit de ces nombres sont réels.

21.8. Soit $z = 1 - i\sqrt{3}$.

- a. Que vaut z^5 ?
- b. Déterminer le plus petit nombre naturel strictement positif n tel que z^n soit réel.
- c. Montrer qu'aucune puissance de z n'est imaginaire pure.

21.9. Trouver toutes les solutions complexes de l'équation

$$z(z-2)^3 = 8z.$$

Représenter ces solutions dans le plan de Gauss et montrer que les points obtenus sont situés sur un cercle. Donner l'équation de ce cercle.

21.10. Trouver tous les nombres complexes z tels que z^2 soit une racine carrée de z .

21.11. Où est l'erreur dans le raisonnement suivant ? Partons de $i = i$; donc $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$. Comme $-1 = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$, on

a $\sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$. Il en résulte que $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$ et $\frac{i}{1} = \frac{1}{i}$, d'où $i^2 = 1$.

21.12. Combien existe-t-il de nombres complexes z tels que $z^6 = 3$? Donnez les modules et les arguments de tous ces nombres.

21.13. Comment se simplifie l'équation $x^3 - 3ix^2 - 3x - 7i = 0$ si l'on y remplace x par $x + i$? En déduire les trois racines de l'équation initiale.