Probabilités et Statistique

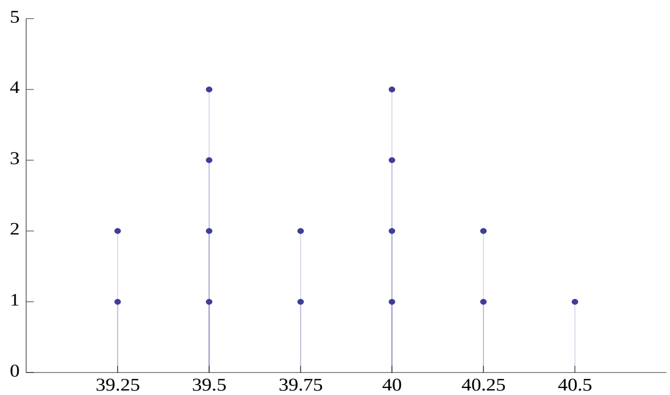
Corrigé Séance 1 : Statistique descriptive

Exercice 1.1

(a) Distribution observée :

x_i	39.25	39.50	39.75	40.00	40.25	40.50
n_i	2	4	2	4	2	1

(b) Diagramme en bâtons des fréquences absolues.

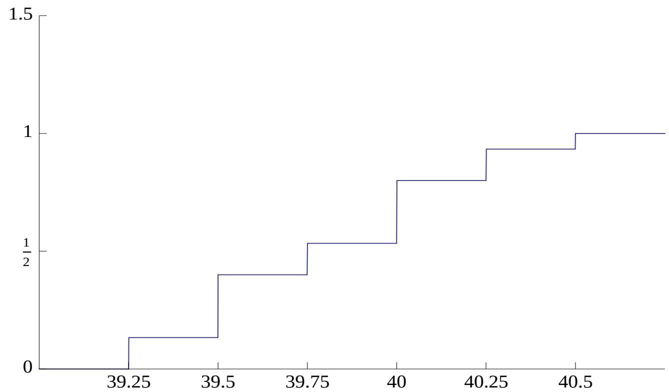


(c) Tableau des fréquences :

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
39.25	2	2/15	2	2/15
39.50	4	4/15	6	2/5
39.75	2	2/15	8	8/15
40.00	4	4/15	12	4/5
40.25	2	2/15	14	14/15
40.50	1	1/15	15	1
	20	1		

Ceci répond à la question. Toutefois, afin de se faciliter la tâche ultérieure de calcul de la moyenne-échantillon et de la variance-échantillon, on rajoute souvent une colonne où on calcule $x_i f_i$ et une deuxième colonne contenant les calculs de $x_i^2 f_i$; à titre d'illustration, ceci sera fait dans l'exercice 1.2.

(d) Fonction de distribution :



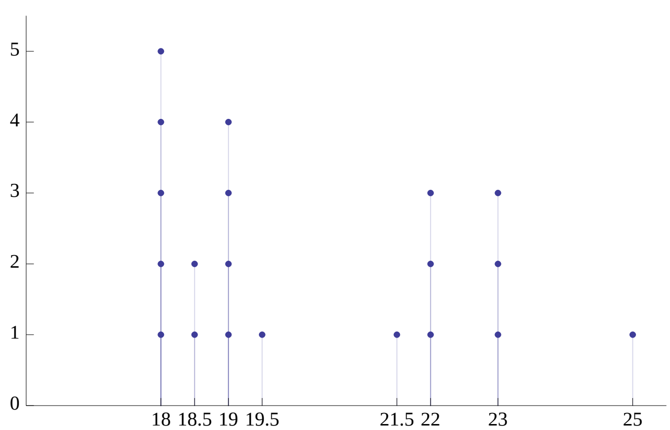
(e) Moyenne-échantillon : 39.8. Variance-échantillon : 0.135.
(f) Il y a 2 modes : 39.50 et 40.00.
(g) La médiane correspond à 39.75.

Exercice 1.2

(a) Distribution observée :

x_i	18.0	18.5	19.0	19.5	21.5	22.0	23.0	25.0
n_i	5	2	4	1	1	3	3	1

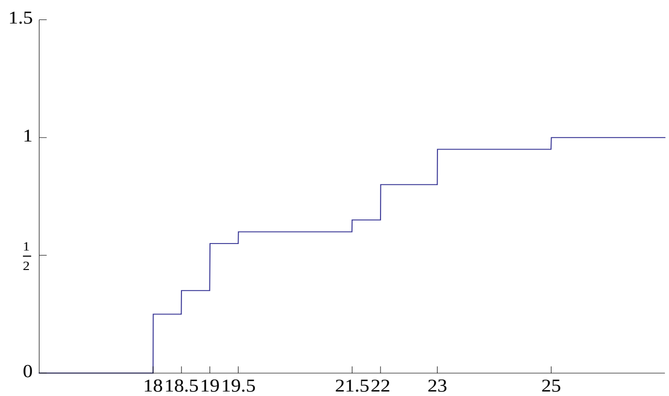
(b) Diagramme en bâtons des fréquences absolues.



(c) Tableau des fréquences :

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
18.0	5	1/4	5	1/4	9/2	81
18.5	2	1/10	7	7/20	37/20	1369/40
19.0	4	1/5	11	11/20	19/5	361/5
19.5	1	1/20	12	3/5	39/40	1521/80
21.5	1	1/20	13	13/20	43/40	1849/80
22.0	3	3/20	16	4/5	33/10	363/5
23.0	3	3/20	19	19/20	69/20	1587/20
25.0	1	1/20	20	1	5/4	125/4
	20	1			$\overline{x}_{20} = 20.2$	$\Sigma_{i=1}^{20} x_i^2 f_i = 412.75$

(d) Fonction de distribution :



(e) Moyenne-échantillon : 20.2. Variance-échantillon : 4.71.

(f) Le seul mode se situe en 18.

(g) La médiane correspond à 19.

Exercice 1.3

Sans perte de généralité nous pouvons supposer que la valeur erronée correspond à x_{10}.

Moyenne exacte $\overline{x}_{10}{}'$:

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{1}{10}(\Sigma_{i=1}^{9} x_i + 8.5) & = & 5.9 \\ \Leftrightarrow & \Sigma_{i=1}^{9} x_i & = & 50.5 \\ \Leftrightarrow & \Sigma_{i=1}^{9} x_i + 6.5 & = & 57 \\ \Leftrightarrow & \overline{x}_{10}{}' & = & 5.7. \end{array}$$

Variance exacte ${s_x^2}'$:
Pour ce calcul, nous allons utiliser la formule suivante pour la variance (facile à démontrer) : $s_x^2 = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n x_i^2 - \overline{x}_n^2$. Nous obtenons alors

$$\begin{array}{lrcl} & \frac{1}{10}(\Sigma_{i=1}^9 x_i^2 + 8.5^2) - 5.9^2 & = & 4.83 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{10}(\Sigma_{i=1}^9 x_i^2 + 8.5^2) & = & 39.64 \\ \Leftrightarrow & \Sigma_{i=1}^9 x_i^2 & = & 324.15 \\ \Leftrightarrow & \Sigma_{i=1}^9 x_i^2 + 6.5^2 & = & 366.4 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{10}(\Sigma_{i=1}^9 x_i^2 + 6.5^2) & = & 36.64 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{10}(\Sigma_{i=1}^9 x_i^2 + 6.5^2) - 5.7^2 & = & 4.15 \\ \Leftrightarrow & {s_x^2}' & = & 4.15. \end{array}$$

Exercice 1.5

(a) Un calcul direct montre que $\overline{x}_n' = \overline{x}_n + c$ et que ${s_x^2}' = s_x^2$.
(b) Un calcul tout aussi immédiat permet de voir que $\overline{x}_n' = a\overline{x}_n$ et que ${s_x^2}' = a^2 s_x^2$.