

## SÉANCE 10 : THÉORÈMES LIMITES

**Exercice 1**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$  (ou  $\mathbb{N}^*$ ), définissons la fonction

$$F^{X_n}(x) = \frac{e^{nx}}{e^{nx} + 1}.$$

Montrer qu'il existe une suite de variables aléatoires  $(X_n)$  dont la loi est donnée pour chaque  $n$  par  $F^{X_n}$ . Cette suite converge-t-elle en loi ?

**Solution**

Pour tout naturel  $n > 0$ , on constate que  $F^{X_n}(x)$  est une fonction continue, monotone croissante dont les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  valent respectivement 1 et 0. On en déduit que  $F^{X_n}(x)$  est une fonction de répartition pour tout  $n > 0$ , et l'existence d'une suite  $(X_n)$  en découle; il suffit en effet de définir la loi de chacun des termes de la suite par

$$P(X_n \leq x) = F^{X_n}(x).$$

Pour voir si oui ou non il y a convergence en loi, il faut calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^{X_n}(x)$ . Cette limite vaut 1 pour des valeurs positives de  $x$ ,  $\frac{1}{2}$  en  $x = 0$  et 0 pour des valeurs négatives de  $x$ . En définissant la variable aléatoire dégénérée  $X = 0$ , on obtient

$$F^X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Etant donné que  $F^{X_n}(x) \rightarrow F^X(x)$  en tout point sauf 0 (donc en tout point de continuité de  $F^X(x)$ ), on peut conclure que la suite  $(X_n)$  converge en loi vers la variable aléatoire  $X$ .

**Exercice 2**

Montrer que la convergence en norme  $L^r$  (pour un  $r > 0$  donné) implique la convergence en probabilité.

**Solution**

Cet exercice se résoud en ayant recours au fait que  $P(X \leq x) \leq P(X^r \leq x^r) \forall r > 0$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$  (à démontrer) et à l'inégalité de Markov.

**Exercice 3**

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi continue et d'espérance et de variance toutes deux égales à 20. Que peut-on dire de  $P[0 \leq X \leq 40]$  ?

**Solution**

On ne connaît pas la loi de  $X$ , mais seulement ses deux premiers moments. On ne peut donc répondre de façon exacte à la question posée. Il faut alors appliquer un résultat d'approximation. En gros, on en connaît deux : l'inégalité de Tchebychev et le théorème central limite. La première permet de majorer la probabilité qu'une variable aléatoire s'écarte de sa moyenne d'une distance mesurée en terme de son écart-type, le deuxième permet d'approcher la loi d'une somme d'un grand nombre de v.a. Clairement ici, aucune somme n'intervient, mais on cherche bien la probabilité d'un "encadrement" de  $X$ , donc réflexe immédiat : Tchebychev.

Ecrivons ce que l'on cherche, et tentons de faire apparaître l'inégalité sous la bonne forme, c'est-à-dire "autour de la moyenne" :

$$P(0 \leq X \leq 40) = P(-20 \leq X - 20 \leq 20) = P(|X - 20| \leq 20) = 1 - P(|X - 20| > 20).$$

D'après les données du problème, ceci peut s'écrire

$$1 - P(|X - \mu| > k\sigma)$$

avec  $k = \sqrt{20}$  ce qui est le candidat parfait pour Tchebychev. On a donc

$$P(|X - 20| > 20) = P(|X - \mu| > \sqrt{20}\sigma) \leq \frac{1}{20},$$

et donc

$$P(0 \leq X \leq 40) = 1 - P(|X - 20| > 20) \geq \frac{19}{20}.$$

#### Exercice 4

On lance un dé jusqu'à ce que la somme totale des nombres obtenus dépasse 301. Quelle est la probabilité qu'il faille au moins 81 jets ?

#### Solution

Notons  $S_n$  la somme des résultats obtenus après  $n$  jets. La question posée se retranscrit

$$P(S_{80} \leq 300).$$

Clairement,  $S_n$  est une somme de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de variance finie. Donc on est dans les conditions d'application du théorème central limite. La loi exacte de  $S_{80}$  est probablement difficilement exploitable, mais ce théorème peut nous donner une approximation du résultat. Pour cela, il nous faut l'espérance et la variance de  $S_{80}$ . Notons  $X_k$  le résultat du  $k$ ème lancer. Alors  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et

$$E(S_{80}) = E\left(\sum_{k=1}^{80} X_k\right) = \sum_{k=1}^{80} E(X_k) = 80 \cdot \frac{7}{2} = 280,$$

$$\text{Var}(S_{80}) = \sum_{k=1}^{80} \text{Var}(X_k) = 80 \cdot \frac{35}{12} \quad \text{par indépendance.}$$

Ainsi

$$P(S_{80} \leq 300) = P\left(\frac{S_{80} - 280}{\sqrt{80 \frac{35}{12}}} \leq \frac{300 - 280}{\sqrt{80 \frac{35}{12}}}\right).$$

Et par le TCL le membre de gauche dans la dernière probabilité suit approximativement une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . La réponse approchée est donc la valeur de la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  au point  $\frac{300-280}{\sqrt{80 \frac{35}{12}}}$

(soit environ 1.31) que l'on peut lire dans les tables prévues à cet effet, et qui nous donne

$$P(S_{80} \leq 300) \simeq 0.9049.$$