Séance 6 : Indépendance et Probabilités Conditionnelles

Exercice 1

Soient A et B deux événements. Vrai ou faux ?

1) Si $A \cap B = \emptyset$ alors A est indépendant de B.
2) A est indépendant de B si et seulement si B l'est de A.
3) Si A est indépendant de B et si $P(B) > 0$, alors $P(A \mid B) = P(A)$.
4) Si A est indépendant de B alors A l'est également du complémentaire de B.

Solution

Les trois premiers points se démontrent facilement à partir de la définition. Pour prouver le quatrième il suffit de remarquer qu'on peut écrire A comme $(A \cap B) \cup (A \cap B^c)$. Etant donné que les deux sous-ensembles de la précédente décomposition sont mutuellement exclusifs, on a

$$P(A) = P(A)P(B) + P(A \cap B^c).$$

Ceci établit le résultat.

Exercice 2

a) Les Anglais et les Américains othographient le mot *rigueur*, respectivement, rigour et rigor. Un homme ayant pris une chambre dans un hôtel parisien a écrit ce mot sur un bout de papier. Une lettre est prise au hasard dans ce mot et c'est une voyelle. Or 40% des clients de l'hôtel sont Anglais et les 60% restants sont Américains. Quelle est la probabilité que l'auteur du mot soit Anglais ?

b) On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6, sachant que les deux résultats sont différents ? (Sol : 1/3)

c) On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6, sachant que la somme des deux est i, $i = 2, 3, ..., 12$? (Sol : $0, 0, 0, 0, 0, \frac{1/18}{6/36}, \frac{1/18}{5/36}, \frac{1/18}{4/36}, \frac{1/18}{3/36}, 1, 1$)

d) On choisit trois cartes au hasard et sans remise dans un jeu ordinaire de 52 cartes. Calculer la probabilité que la première carte tirée soit un pique, sachant que les deux dernières en sont. (Sol : 11/50)

Solution

a) Afin de faciliter l'écriture des probas, introduisons les notations suivantes :
   - [Ang] = [être Anglais]
   - [Am] = [être Américain]
   - [voy] = [voyelle]
   - [con] = [consonne].

   On cherche à déterminer la probabilité que l'auteur du mot soit Anglais, sachant que la lettre prise au hasard est une voyelle. Grâce aux notations adoptées ci-dessus, ceci donne

$$\begin{aligned} P(\text{Ang}|\text{voy}) &= \frac{P(\text{Ang} \cap \text{voy})}{P(\text{voy})} \\ &= \frac{P(\text{voy}|\text{Ang})P(\text{Ang})}{P(\text{voy})}. \end{aligned}$$

   Etant donné que les Anglais écrivent rigour, il est clair que la probabilité d'avoir choisi une voyelle sachant que c'est la version anglaise du mot rigueur vaut $\frac{1}{2}$. De plus, par la donnée du problème on sait que $P(\text{Ang}) = 0.4 = \frac{2}{5}$. Reste à déterminer $P(\text{voy})$. Or, comme on vient de le voir dans le corrigé de l'exercice 1, l'ensemble "voy" peut s'écrire comme $(\text{voy} \cap \text{Ang}) \cup (\text{voy} \cap \text{Am})$. Cette décomposition permet de voir que

$$\begin{aligned} P(\text{voy}) &= P(\text{voy} \cap \text{Ang}) + P(\text{voy} \cap \text{Am}) \\ &= P(\text{voy}|\text{Ang})P(\text{Ang}) + P(\text{voy}|\text{Am}]P[\text{Am}) \\ &= \frac{1}{2} * \frac{2}{5} + \frac{2}{5} * \frac{3}{5} \\ &= \frac{11}{25}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} P(\text{Ang}|\text{voy}) &= \frac{P(\text{voy}|\text{Ang})P(\text{Ang})}{P(\text{voy})} \\ &= \frac{\frac{1}{2} * \frac{2}{5}}{\frac{11}{25}} \\ &= \frac{5}{11}. \end{aligned}$$

Remarque : Pourquoi passer par des probabilités conditionnelles quand on a $P(\text{voy} \cap \text{Ang})$? La réponse en est justement qu'un calcul direct entraînerait qu'on loupe certaines conditions ; on vous renvoie au pseudo-paradoxe associé aux probabilités conditionnelles !

b) Notons D_1 le chiffre indiqué par le dé 1 et D_2 le chiffre indiqué par le deuxième dé. Alors

$$\begin{aligned} P(\text{au moins un } 6|D_1 \neq D_2) &= \frac{P([\text{au moins un } 6] \cap [D_1 \neq D_2])}{P(D_1 \neq D_2)} \\ &= \frac{\frac{10}{36}}{\frac{30}{36}} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

c) Supposons d'abord $i = 11$ ou $i = 12$. Sachant que la somme des deux dés prend une telle valeur, la probabilité d'avoir au moins un six est 1, étant donné qu'il faut au moins un six nécessairement pour obtenir 11 ou 12 en sommant deux nombres entre 1 et 6.

Supposons maintenant que $i < 7$. Alors on ne peut avoir de six, puisque le minimum de la somme de deux dés dont l'un est un 6 vaut 7 (6+1). La probabilité est donc zéro.

Supposons enfin que $i = 7, ..., 10$. Notons S la somme. On a

$$P(\text{au moins un } 6|S = i) = \frac{P([\text{au moins un } 6] \cap [S = i])}{P(S = i)}$$

Or la seule facon d'avoir un six quand la somme vaut $S = i$ est que l'autre dé prenne la valeur $i - 6$. On a donc par symétrie et indépendance entre les dés :

$$P([\text{au moins un } 6] \cap [S = i]) = 2P([D_1 = 6] \cap [D_2 = i - 6]) = 2\frac{1}{36} = \frac{1}{18}$$

Donc pour $i = 7, ..., 10$ on a

$$P(\text{au moins un } 6|S=i) = \frac{1/18}{P(S=i)},$$

et pour obtenir les $P(S=i)$ il suffit de compter le nombre de combinaisons de résultats de deux dés dont la somme donne i, et de diviser par 36.

d) Notons P_i l'événement “la $i$ème carte tirée est un pique". Par un raisonnement analogue au point a), on obtient

$$\begin{aligned}
P(P_1|P_2\cap P_3) &= \frac{P(P_1\cap P_2\cap P_3)}{P(P_2\cap P_3)}\\
&= \frac{\frac{13*12*11}{52*51*50}}{P(P_2\cap P_3\cap P_1)+P(P_2\cap P_3\cap P_1^c)}\\
&= \frac{\frac{13*12*11}{52*51*50}}{\frac{13*12*11}{52*51*50}+\frac{13*12*39}{52*51*50}}\\
&= \frac{13*12*11}{13*12*50}\\
&= \frac{11}{50}.
\end{aligned}$$

Remarque : contrairement au point a), ici le calcul de $P(P_1\cap P_2\cap P_3)$ se fait aisément, ce qui est dû au fait que qu'on a des événements successifs.

Exercice 3

Soit P une loi de probabilité et F un ensemble tel que $P(F)>0$. Démontrer les affirmations suivantes :

a) $0\le P(E\mid F)\le 1$.

b) $P(\Omega\mid F)=1$.

c) Si E_1 et E_2 sont des événements qui s'excluent mutuellement, alors

$$P(E_1\cup E_2\,|\,F) = P(E_1\mid F)+P(E_2\,|\,F).$$

Que peut-on déduire de ces 3 points ?

Solution

a) L'inégalité de gauche est évidente. Celle de droite résulte de ce que $E\cap F\subset E$.

b) Cette égalité provient de ce que pour tout F, $F\subset\Omega$.

c) Etant donné que $(E_1\cup E_2)\cap F=(E_1\cap F)\cup(E_2\cap F)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
P((E_1\cup E_2)\,|\,F) &= \tfrac{P((E_1\cup E_2)\cap F)}{P(F)}\\
&= \tfrac{P(E_1\cap F)+P(E_2\cap F)}{P(F)}\\
&= P(E_1\,|\,F)+P(E_2\,|\,F).
\end{aligned}$$

On en déduit que la loi conditionnelle $P(\cdot\,|\,F)$ est également une loi de probabilité.

Exercice 4

Soit $\mathcal{B}_\lambda = \{B_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ un ensemble d'événements. Ces événements seront dits indépendants si pour tout n et pour tout $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n \in \Lambda$ on a

$$P(B_{\lambda_1} \cap \ldots \cap B_{\lambda_n}) = \prod_{j=1}^{n} P(B_{\lambda_j}).$$

Montrer par un exemple que cette définition n'est pas équivalente à l'indépendance "deux à deux" d'une collection d'événements.

Solution (de Tucker p. 59)

Considérons un ensemble fondamental à quatre éléments $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ auquel on associe une mesure de probabilités uniforme. Définissons les événements

$$A = \{\omega_1, \omega_2\}, \quad B = \{\omega_1, \omega_3\}, \quad C = \{\omega_1, \omega_4\}$$

et considérons la classe d'événements $\mathcal{B} = \{A,\ B,\ C\}$. On observe que

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

et

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{\omega_1\}.$$

Il est maintenant aisé de vérifier que cette classe est composée d'événements indépendants deux à deux mais non totalement indépendants.
Remarquons néanmoins que clairement l'indépendance deux à deux est un cas particulier de l'indépendance totale (et elle est obtenue pour $n = 2$).

Exercice 5

Soient A, B et C des événements indépendants. Prouver que si $P(C) > 0$ alors $P(A \cup B \mid C) = P(A \cup B)$.

Solution

Cet exercice se résoud facilement grâce à la formule de l'exercice précédent et en ayant recours à $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exercice 6

Prouver la *loi des probas totales*, i.e. montrer que si $\{B_n\}_{1 \leq n \leq N}$ forme une partition de Ω telle que $P(B_n) > 0$ pour tout n alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a

$$P(A) = \sum_{n=1}^{N} P(A \mid B_n) P(B_n).$$

Solution

Par définition d'une partition de Ω, on a

$$\bigcup_{n=1}^{N} B_n = \Omega \text{ et } B_k \cap B_l = \emptyset \ \forall k \neq l.$$

Ainsi on voit directement que $\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right)^c = \emptyset$. Ceci nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right)) + P(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right)^c) \\ &= P\left(\bigcup_{n=1}^{N} (A \cap B_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} P(A \cap B_n) \end{aligned}$$

grâce à quoi on obtient la célèbre égalité puisque $P(B_n) > 0$ pour tout n.

Exercice 7

Considérons $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace probabilisé canonique sur l'intervalle $[0,1]$ et définissons

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} [(2k-1)/2^n, 2k/2^n], \quad n = 1, 2, \ldots$$

Prouver que

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{0.1}$$

Solution

Remarquons tout d'abord que la probabilité canonique sur $[0,1]$ n'est autre que la mesure (de Lebesgue...) de la réunion d'intervalles. Ainsi p. ex. la mesure de l'intervalle $[0, 0.2] \cup [0.3, 0.4]$ vaut 0.3. Afin de donner une idée de ce que représentent les A_i, voici les premiers intervalles A_i :

- $A_1 = [\frac{1}{2}, 1]$
- $A_2 = [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$
- $A_3 = [\frac{1}{8}, \frac{2}{8}] \cup [\frac{3}{8}, \frac{4}{8}] \cup [\frac{5}{8}, \frac{6}{8}] \cup [\frac{7}{8}, 1]$

On remarque donc que tout A_i est une réunion de 2^{i-1} intervalles disjoints de longueur (donc de mesure) $\frac{1}{2^i}$ (évidemment, on peut aussi voir ceci directement à partir de la définition des A_i ; néanmoins, afin de clarifier la situation, il vaut toujours mieux considérer quelques exemples avant de se lancer dans la résolution d'un exercice). Il s'ensuit donc que la mesure de tout A_i équivaut à $2^{i-1}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}$, ce qui implique que le membre droit de (0.1) équivaut à $\frac{1}{2^n}$.

D'autre part, on constate que $A_1 \cap A_2 = \{\frac{1}{2}\} \cup [\frac{3}{4}, 1]$ et que $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{\frac{1}{2}\} \cup \{\frac{3}{4}\} \cup [\frac{7}{8}, 1]$; on peut montrer par récurrence (exercice facile) que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = (\bigcup_{i=1}^{n-1} \{1 - \frac{1}{2^i}\}) \cup [1 - \frac{1}{2^n}, 1]$ pour tout n. Puisque la mesure d'un point est nulle, on en déduit que le membre gauche de (0.1) vaut également $\frac{1}{2^n}$, ce qui conclut l'exercice.