Statistique multivariée

Corrigé TP4 : Convergence stochastique

Exercice 1

Soit $(X_1, X_2, \ldots)$ une suite de p-vecteurs aléatoires i.i.d. dont la loi commune est la loi de Cauchy $t_p(\mu, \Sigma)$. Ceci signifie que $X_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} AZ + \mu$, où $\mu \in \mathbb{R}^p$, où A est une matrice $p \times p$ telle que $\Sigma = AA'$ et où Z est un p-vecteur de loi de Cauchy standard, ce qui veut dire que $\varphi_Z(t) = \exp(-\|t\|)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^p$.

1. Calculer la fonction caractéristique commune des X_i.
2. En déduire que, pour tout n, $\bar{X}^{(n)} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ est de loi de Cauchy $t_p(\mu, \Sigma)$.
3. Quelle est la limite en loi de la suite $(\bar{X}^{(n)},\, n \in \mathbb{N}_0)$?
4. Ceci contredit-il la loi faible des grands nombres ?

Solution

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}^p$, nous avons (refaisons les calculs en détail)

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_i}(t) = \varphi_{AZ+\mu}(t) &= \mathrm{E}[e^{it'(AZ+\mu)}] \\
&= e^{it'\mu}\mathrm{E}[e^{i(A't)'Z}] \\
&= e^{it'\mu}\varphi_Z(A't) \\
&= \exp(it'\mu - \|A't\|) \\
&= \exp(it'\mu - ((A't)'A't)^{1/2}) \\
&= \exp(it'\mu - (t'\Sigma t)^{1/2}).
\end{aligned}$$

2. Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\varphi_{\bar{X}^{(n)}}(t) &= \mathrm{E}[e^{\sum_{j=1}^n i(t/n)'X_j}] \\
&= (\varphi_{X_1}(t/n))^n \\
&= (\exp(i(n^{-1}t)'\mu - (n^{-2}t'\Sigma t)^{1/2}))^n \\
&= \exp(it'\mu - (t'\Sigma t)^{1/2})
\end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^p$, ce qui implique bien que $\bar{X}^{(n)}$ est de loi $t_p(\mu, \Sigma)$.

3. Il découle du point 2 et du théorème de Lévy que $(\bar{X}^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$, où Y est de loi $t_p(\mu, \Sigma)$.
4. On pourrait le croire, puisque la loi des grands nombres affirme que $(\bar{X}^{(n)})$ converge en probabilité (donc aussi en loi) vers la moyenne commune des X_i... qui est un vecteur constant ! Mais la loi des grands nombres ne s'applique pas dans ce cas particulier, puisque les X_i n'ont pas de moments finis d'ordre 1 (exercice) !

Exercice 2

Soit $(X_1, X_2, \ldots)$ une suite de p-vecteurs aléatoires. Prouver que si il existe un p-vecteur aléatoire L tel que $\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} L$, on a que $X_n \to \theta$ en probabilité.

Solution

Considérons la suite de "variables aléatoires" $(S_n)_{n\geq 1}$, où $S_n = 1/\sqrt{n}$ avec probabilité 1, qui tend vers 0 en loi. Le lemme de Slutzky implique que

$$\begin{pmatrix} S_n \\ \sqrt{n}(X_n - \theta) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}$$

si $n \to \infty$. Il en découle que

$$X_n - \theta = S_n \times \sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \times L = 0,$$

si $n \to \infty$. Donc $(X_n - \theta) \to 0$ en probabilité (ce qui équivaut évidemment au fait que $X_n \to \theta$ en probabilité).

Exercice 3

Soit $(X_1, X_2, \ldots)$ une suite de p-vecteurs aléatoires i.i.d. dont la fonction caractéristique commune $\varphi(.)$ est différentiable en l'origine.

1. Soit $\bar{X}^{(n)} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que, pour tout n, $\varphi_{\bar{X}^{(n)}}(t) = (\varphi(t/n))^n$, pour tout $t \in \mathbb{R}^p$.

2. En utilisant le théorème de Lévy, prouver que $\bar{X}^{(n)} \to (-i)\nabla\varphi(0)$ en probabilité si $n \to \infty$ (hint : $(1+\frac{1}{\lambda})^\lambda \to e$ si $\lambda \to \infty$).
3. Expliquer pourquoi ceci constitue une preuve de la loi faible des grands nombres.

Solution

1. En utilisant le fait que les X_i sont i.i.d., on obtient

$$\begin{aligned}\varphi_{\bar{X}^{(n)}}(t) &= \mathrm{E}[e^{it'\bar{X}^{(n)}}] \\ &= \mathrm{E}[e^{\sum_{j=1}^n i(t/n)'X_j}] \\ &= \textstyle\prod_{j=1}^n \varphi(t/n) \\ &= (\varphi(t/n))^n.\end{aligned}$$

2. Fixons $t \in \mathbb{R}^p$. La dérivabilité de $\varphi(.)$ en l'origine implique $\varphi(t/n) = \varphi(0) + (t/n)'\nabla\varphi(0) + r_n(t)$, où $r_n(t) = o(1/n)$ si $n \to \infty$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\varphi_{\bar{X}^{(n)}}(t) &= (\varphi(t/n))^n \\ &= \Big[1 + (t/n)'\nabla\varphi(0) + r_n(t)\Big]^n \\ &= \Big[1 + \Big(\frac{n}{t'\nabla\varphi(0) + nr_n(t)}\Big)^{-1}\Big]^n \\ &= \Big[1 + \Big(\frac{n}{t'\nabla\varphi(0) + nr_n(t)}\Big)^{-1}\Big]^{\Big(\frac{n}{t'\nabla\varphi(0) + nr_n(t)}\Big)\big(t'\nabla\varphi(0) + nr_n(t)\big)},\end{aligned}$$

de sorte que le hint implique que

$$\varphi_{\bar{X}^{(n)}}(t) \to e^{t'\nabla\varphi(0)} = e^{it'(-i\nabla\varphi(0))} = \varphi_Y(t),$$

où Y est un p-vecteur aléatoire qui prend la valeur $(-i)\nabla\varphi(0)$ avec probabilité 1. On en conclut que $\bar{X}^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} (-i)\nabla\varphi(0)$, ce qui implique que $\bar{X}^{(n)} \to (-i)\nabla\varphi(0)$ en probabilité (puisque la limite est une constante).

3. Sous les hypothèses de l'énoncé, on a que

$$\nabla\varphi(0) = \mathrm{E}[iX_1e^{it'X_1}]\Big|_{t=0} = i\mathrm{E}[X_1] = i\mu,$$

où μ désigne la moyenne commune des X_i. Le résultat du point 2 établit donc que $\bar{X}^{(n)} \to (-i)\nabla\varphi(0) = \mu$ en probabilité.