

UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES
Faculté des Sciences
Physique Théorique et Mathématique

THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS
QED, QCD

par

Christiane Schomblond

Table des matières

1	Intégrale fonctionnelle en mécanique quantique.	3
1.1	Images de Schrödinger et de Heisenberg.	3
1.2	Exemples.	7
1.2.1	La particule libre.	7
1.2.2	Intégrales de Fresnel	8
1.2.3	L'oscillateur linéaire harmonique.	9
1.3	Intégrale fonctionnelle.	10
1.3.1	Exemple de la particule libre.	13
1.3.2	Partie quadratique	15
1.3.3	Développement perturbatif.	17
1.4	Produits chronologiques d'opérateurs.	18
1.5	Fonctions de Green.	19
1.6	Fonctionnelle génératrice des fonctions de Green.	21
1.6.1	Exemple de l'oscillateur linéaire harmonique.	22
1.7	Développement perturbatif des fonctions de Green.	26
1.7.1	Exemple: $v(q) = \frac{q^4}{4!}$	27
1.8	Généralisation à N degrés de liberté.	28
2	L'intégrale fonctionnelle pour les champs libres bosoniques.	30
2.1	Champ scalaire réel libre.	30
2.2	Champ scalaire complexe libre.	31
2.3	Champ électromagnétique libre.	32
3	L'intégrale fonctionnelle pour les champs fermioniques.	37
3.1	Algèbre de Grassmann.	37
3.2	L'intégrale de Berezin.	39
3.3	Les fantômes de Faddeev-Popov.	42
3.4	Intégrale fonctionnelle pour le champ spinoriel libre.	43
3.5	Intégrale fonctionnelle de QED.	44
4	Formules de Réduction	45
4.1	Champs scalaires.	45
4.1.1	Champ scalaire réel: particules neutres de spin zéro.	45

4.1.2	Champ scalaire complexe: particules chargées de spin zéro.	48
4.2	Champ spinoriel.	48
4.3	Champ électromagnétique.	49
5	Vertex propres, Action effective.	50
5.1	Fonctions de Green, Fonctions de Green connexes.	50
5.2	Vertex propres.	52
5.2.1	Calcul des Γ_n	53
5.3	Equation du mouvement pour ϕ_{cl}	54
5.3.1	Exemples.	56
6	Les identités de Ward en électrodynamique quantique.	57
7	Calcul de diagrammes de Feynman.	61
7.1	Exemples	61
7.1.1	Théorie en ϕ^4	61
7.1.2	Electrodynamique spinorielle.	63
7.2	Calcul de diagrammes à une boucle.	66
7.3	Régularisation dimensionnelle.	68
8	Renormalisation à une boucle.	74
8.1	Renormalisation de la théorie en ϕ^4	74
8.2	Renormalisation de l'électrodynamique quantique.	77
9	Groupe de renormalisation.	80
9.1	Théorie en ϕ^4	80
9.1.1	Résolution de l'équation (9.1.16) dans la prescription de 't Hooft-Weinberg.	84
9.1.2	Résolution de l'équation (9.1.21) dans la prescription de 't Hooft-Weinberg.	85
9.2	Electrodynamique quantique.	89
10	Moment magnétique anomal de l'électron.	90
11	Théorie de jauge non abélienne: lagrangien.	92
11.1	Symétrie $SU(3)$ globale puis locale	92
11.2	Dérivées covariantes	93
11.3	Lagrangien d'interaction quark-gluon	95
11.4	Lagrangien des gluons	95
12	Intégrale fonctionnelle pour QCD.	98
12.1	Intégrale fonctionnelle pour les gluons et fantômes de Faddéev - Popov.	98
12.2	Intégrale fonctionnelle de la chromodynamique quantique.	102

13 Renormalisation à une boucle de la chromodynamique quantique.	104
13.1 Propagateur des quarks.	104
13.2 Propagateur des gluons.	105
13.3 Vertex quarks-gluon.	108
13.4 Fonction β ; Liberté asymptotique.	109
A Groupe $SU(3)$, propriétés algébriques	110
B Théorème de Furry	112
C Renormalisation	114
C.1 Fonctionnelles génératrices	114
C.1.1 Fonctionnelle génératrice des fonctions de Green	114
C.1.2 Calcul perturbatif des G_n	115
C.1.3 Représentation graphique des G_n : diagrammes de Feynman	115
C.1.4 Fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes	115
C.1.5 Action effective	116
C.1.6 Calcul des Γ_n	117
C.2 Approximation semi-classique	118
C.3 $\Gamma_1(\varphi)$ pour un potentiel $V(\varphi)$	122
C.4 Parties singulières des $\gamma^{(n)}$	124
C.4.1 En dimension $d = 4$	124
C.4.2 En dimension $d = 6$	124
C.5 Application à la théorie en $\frac{\lambda}{4!}\varphi^4$ en $d = 4$	124
C.6 Application à la théorie en $\frac{\lambda}{3!}\varphi^3$ en $d = 6$	125

Bibliographie

- [1] R.P. FEYNMAN, R. HIBBS *Path Integrals and quantum mechanics*, Mc Graw Hill
- [2] L. FADDEEV, A. SLAVNOV: *Gauge Theories*, Benjamin, 2d édition 1993
- [3] P. RAMOND *Field Theory, a modern primer*, Benjamin 1981
- [4] L. RYDER *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press 1985
- [5] M. HENNEAUX, C. TEITELBOIM *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press 1992
- [6] J. COLLINS *Renormalization*, Cambridge University Press 1984

Chapitre 1

Intégrale fonctionnelle en mécanique quantique.

1.1 Images de Schrödinger et de Heisenberg.

Considérons pour commencer, un système physique quantique à un seul degré de liberté décrit par l'hamiltonien

$$\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \quad (1.1.1)$$

qui n'a pas de dépendance explicite en le temps et dans lequel le potentiel $V(q)$ est supposé réel (\hat{H} est autoadjoint) et tel que le spectre de \hat{H} soit borné inférieurement (cette condition suffit à assurer l'existence d'un état fondamental, d'énergie minimum).

En image de Schrödinger, les observables position $\hat{q} = \hat{q}^+$ et d'impulsion $\hat{p} = \hat{p}^+$ ne dépendent pas de t ,

$$\partial_t \hat{q} = 0, \quad \partial_t \hat{p} = 0 \quad (1.1.2)$$

et satisfont les relations de commutation canoniques

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (1.1.3)$$

Leurs spectres sont entièrement continus, ils s'étendent de $-\infty$ à $+\infty$ sur l'axe réel; leurs "vecteurs propres" sont notés respectivement $|q\rangle, |p\rangle$,

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle, \quad \hat{p}|p\rangle = p|p\rangle. \quad (1.1.4)$$

ils satisfont les relations d'orthogonalité

$$\langle q'|q\rangle = \delta(q' - q), \quad \langle p'|p\rangle = \delta(p' - p) \quad (1.1.5)$$

et de fermeture

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq |q\rangle \langle q| = \hat{I}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dp |p\rangle \langle p| = \hat{I}. \quad (1.1.6)$$

Le passage d'une base à l'autre se fait par les coefficients

$$\langle q|p \rangle = \langle p|q \rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipq}{\hbar}}. \quad (1.1.7)$$

Si $|\psi \rangle$ désigne un vecteur de l'espace des états \mathcal{H} , on a les relations suivantes

$$\langle q|\hat{q}|\psi \rangle = q \langle q|\psi \rangle = q\psi(q) \quad (1.1.8)$$

$$\langle q|\hat{p}|\psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \langle q|\psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \psi(q) \quad (1.1.9)$$

$$\langle p|\hat{p}|\psi \rangle = p \langle p|\psi \rangle = p\tilde{\psi}(p) \quad (1.1.10)$$

$$\langle p|\hat{q}|\psi \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \langle p|\psi \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \tilde{\psi}(p). \quad (1.1.11)$$

où les fonctions $\psi(q)$ et $\tilde{\psi}(p)$ sont liées par

$$\psi(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \langle q|p \rangle \langle p|\psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipq}{\hbar}} \tilde{\psi}(p) \quad (1.1.12)$$

$$\tilde{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \langle p|q \rangle \langle q|\psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{ipq}{\hbar}} \psi(q) \quad (1.1.13)$$

Si $|\psi, t \rangle$ désigne le vecteur d'état du système, à l'instant t , son évolution au cours du temps est gouvernée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \partial_t |\psi, t \rangle = \hat{H} |\psi, t \rangle. \quad (1.1.14)$$

Avec la condition de Cauchy $|\psi, t \rangle|_{t=t_0} = |\psi, t_0 \rangle$, elle est équivalente à

$$|\psi, t \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} |\psi, t_0 \rangle \quad (1.1.15)$$

De(1.1.14) et (1.1.15), on déduit, par projection sur la base $\{|q \rangle\}$,

$$i\hbar \partial_t \psi(q, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right] \psi(q, t) \quad (1.1.16)$$

et

$$\psi(q, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq' K(q, t; q', t_0) \psi(q', t_0) \quad (1.1.17)$$

avec

$$K(q, t; q', t_0) = \langle q | e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} | q' \rangle. \quad (1.1.18)$$

Le noyau $K(q, t; q', t_0)$ est la solution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \partial_t K(q, t; q', t_0) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right] K(q, t; q', t_0) \quad (1.1.19)$$

qui satisfait la condition de Cauchy

$$K(q, t; q', t_0)|_{t=t_0} = \delta(q - q'). \quad (1.1.20)$$

Il sert aussi à construire le propagateur retardé de l'équation de Schrödinger

$$G_R(q,t; q',t_0) = -\frac{i}{\hbar}\theta(t-t_0)K(q,t; q',t_0) \quad (1.1.21)$$

qui satisfait l'équation

$$(i\hbar\partial_t - [-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q)])G_R(q,t; q',t_0) = \delta(t-t_0)\delta(q-q') \quad (1.1.22)$$

et qui fournit la solution retardée de l'équation de Schrödinger avec source

$$(i\hbar\partial_t - [-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q)])\psi(q,t) = j(q,t) \quad (1.1.23)$$

par

$$\psi(q,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq' \int_{-\infty}^t dt' G_R(q,t; q',t') j(q',t'). \quad (1.1.24)$$

La fonction d'ondes $\psi(q,t)$ est l'amplitude de probabilité de présence de la particule au point q à l'instant t (plus précisément, si ψ est normée, $|\psi(q,t)|^2 dq$ est la probabilité pour qu'une mesure de position sur le système dans l'état $|\psi,t\rangle$, à l'instant t , donne comme résultat un nombre entre q et $q+dq$); le noyau $K(q,t; q_0,t_0)$ est l'amplitude de probabilité de transition de l'état $|q_0,t_0\rangle$ vers l'état $|q,t\rangle$, en effet, si à l'instant t_0 , la particule est en q_0 ,

$$\psi(q',t_0) = \langle q'|\psi,t_0\rangle = \langle q'|q_0\rangle = \delta(q'-q_0) \quad (1.1.25)$$

et l'équation (1.1.17) donne

$$\psi(q,t) = K(q,t; q_0,t_0). \quad (1.1.26)$$

$K(q,t; q_0,t_0)$ est donc l'amplitude de probabilité de trouver la particule en q à l'instant t , sachant qu'elle était en q_0 à l'instant t_0 . C'est à ce noyau K que nous nous intéresserons plus particulièrement dans la suite, mais avant cela, nous allons récrire ce paragraphe en image de Heisenberg. Dans cette image, le vecteur d'état $|\psi\rangle_H$ n'évolue pas au cours du temps,

$$\partial_t |\psi\rangle_H = 0 \quad (1.1.27)$$

et coïncide donc avec l'état initial de l'image de Schrödinger

$$|\psi\rangle_H = |\psi,t_0\rangle. \quad (1.1.28)$$

Par (1.1.15), avec (1.1.28), on a donc

$$|\psi,t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} |\psi\rangle_H \quad (1.1.29)$$

ou, en inversant,

$$|\psi\rangle_H = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} |\psi,t\rangle. \quad (1.1.30)$$

Par contre, en image de Heisenberg, les observables de position et d'impulsion dépendent du temps par

$$\begin{aligned}\hat{q}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}\hat{q}e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}, & \hat{q}(t_0) &= \hat{q} \\ \hat{p}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}\hat{p}e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}, & \hat{p}(t_0) &= \hat{p}\end{aligned}\quad (1.1.31)$$

Leurs relations de commutation à temps égaux sont

$$[\hat{q}(t),\hat{q}(t)] = 0 = [\hat{p}(t),\hat{p}(t)], \quad [\hat{q}(t),\hat{p}(t)] = i\hbar. \quad (1.1.32)$$

et elles évoluent au cours du temps conformément à

$$i\hbar\partial_t\hat{q}(t) = [\hat{q}(t),\hat{H}(t)] \quad (1.1.33)$$

$$i\hbar\partial_t\hat{p}(t) = [\hat{p}(t),\hat{H}(t)] \quad (1.1.34)$$

avec $\hat{H}(t) = \hat{H}(t_0) = \hat{H}$. A tout instant, les bases $\{|q,t\rangle\}, \{|p,t\rangle\}$ définies par les "vecteurs propres" des $\hat{q}(t)$ et $\hat{p}(t)$ sont différentes: en effet, de (1.1.4), on tire

$$e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}\hat{q}|q\rangle = qe^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}|q\rangle \quad (1.1.35)$$

et, en insérant dans le premier membre

$$\hat{I} = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} \quad (1.1.36)$$

il vient, avec (1.1.31),

$$\hat{q}(t)|q,t\rangle = q|q,t\rangle \quad (1.1.37)$$

avec

$$|q,t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}|q\rangle. \quad (1.1.38)$$

De même,

$$\hat{p}(t)|p,t\rangle = p|p,t\rangle, \quad |p,t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}|p\rangle. \quad (1.1.39)$$

On a aussi, pour chaque t , les relations d'orthogonalité

$$\langle q',t|q,t\rangle = \delta(q' - q), \quad \langle p',t|p,t\rangle = \delta(p' - p) \quad (1.1.40)$$

et de fermeture

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq |q,t\rangle\langle q,t| = \hat{I}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dp |p,t\rangle\langle p,t| = \hat{I}. \quad (1.1.41)$$

La fonction d'ondes $\psi(q,t)$ peut se voir indifféremment comme

$$\langle q|\psi,t\rangle = \langle q|e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}|\psi\rangle_H = \langle q,t|\psi\rangle_H. \quad (1.1.42)$$

En image de Schrödinger, la fonction d'ondes est la projection du vecteur d'état à l'instant t , $|\psi,t\rangle$, sur la base fixe $\{|q\rangle\}$ (= point de vue actif); en image de Heisenberg, c'est la projection du vecteur d'état fixe $|\psi\rangle_H$ sur la base à l'instant t , $\{|q,t\rangle\}$ (= point de vue passif). Le noyau $K(q,t;q',t_0)$ a pour expression, en image de Heisenberg

$$K(q,t;q',t_0) = \langle q,t|q',t_0\rangle. \quad (1.1.43)$$

L'opérateur d'évolution est relié à l'amplitude K par

$$\hat{U}(t,t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}\right) = \int dqdq' |q\rangle K(q,t;q',t_0) \langle q'|. \quad (1.1.44)$$

1.2 Exemples.

1.2.1 La particule libre.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (1.2.45)$$

$$K_0(q,t; q_0,t_0) = \langle q | e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} | q_0 \rangle \quad (1.2.46)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-i\frac{T}{\hbar}\frac{p^2}{2m} + i\frac{p(q-q_0)}{\hbar}} \quad (1.2.47)$$

$$= e^{\frac{im(q-q_0)^2}{2\hbar T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-i\frac{T}{2m\hbar}[p - \frac{m(q-q_0)}{T}]^2} \quad (1.2.48)$$

$$= e^{\frac{im(q-q_0)^2}{2\hbar T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{2\pi\hbar} e^{-i\frac{T}{2m\hbar}u^2} \quad (1.2.49)$$

avec $T = t - t_0$. Contrairement aux apparences, l'intégrale (1.2.49) existe; nous donnons ci-après le calcul de l'intégrale de Fresnel. On a cependant l'habitude de la calculer en insérant sous le signe intégrale un facteur de convergence qui s'obtient en remplaçant T par $T(1 - i\eta)$, η réel > 0 , et en postposant à la fin du calcul la limite $\eta \rightarrow 0$. Ceci revient à considérer T complexe (avec $ImT < 0$) dans le calcul de l'intégrale, mais réel dans la réponse. Avec cette convention, (1.2.49) se ramène simplement à l'intégrale de Poisson

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-\alpha u^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (1.2.50)$$

valable pour $Re\alpha > 0$. Il vient donc

$$K_0(q,t; q_0,t_0) = e^{\frac{im(q-q_0)^2}{2\hbar T}} \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar T}}. \quad (1.2.51)$$

Le propagateur retardé

$$G_R^0(q,t; 0,0) = -\frac{i}{\hbar}\theta(t) K_0(q,t; 0,0) \quad (1.2.52)$$

admet comme représentation de Fourier

$$G_R^0(q,t; 0,0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{ikq - i\omega t} \tilde{G}_R^0(k,\omega) \quad (1.2.53)$$

$$\tilde{G}_R^0(k,\omega) = \frac{1}{\hbar(\omega - \frac{\hbar k^2}{2m} + i\epsilon)}. \quad (1.2.54)$$

1.2.2 Intégrales de Fresnel

Dans ce paragraphe, nous allons établir les résultats suivants

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\pm ix^2} = \sqrt{\pm i\pi}. \quad (1.2.55)$$

Considérons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{+ix^2} = 2 \int_0^{+\infty} dx e^{+ix^2} = 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R dx e^{+ix^2}. \quad (1.2.56)$$

La fonction e^{iz^2} étant holomorphe partout à distance finie, son intégrale le long de tout contour fermé homotope à un point est nulle, et en particulier pour le contour C défini ci-dessous

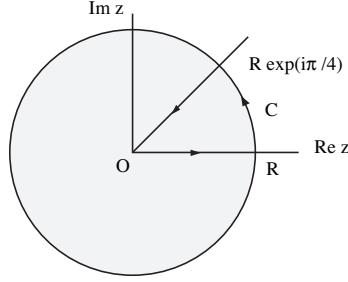


FIG. 1.1 – Contour C pour l'intégrale de Fresnel

$$\oint_C dz e^{iz^2} = 0. \quad (1.2.57)$$

On en tire

$$\int_0^R dz e^{+iz^2} = \int_0^{Re \frac{i\pi}{4}} dz e^{+iz^2} + \int_{\frac{\pi}{4}}^0 d\theta i R e^{i\theta} e^{i(Re^{i\theta})^2}. \quad (1.2.58)$$

a) avec $z = u e^{\frac{i\pi}{4}}$, la première intégrale du membre de droite devient égale à

$$\int_0^R du e^{-u^2} e^{\frac{i\pi}{4}} \quad (1.2.59)$$

donc

$$2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R du e^{-u^2} e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\pi} = \sqrt{i\pi}. \quad (1.2.60)$$

b) le module de la seconde intégrale tend vers zéro à la limite $R \rightarrow \infty$, en effet

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta i R e^{i\theta} e^{i(Re^{i\theta})^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta i R e^{i\theta} e^{iR^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} \quad (1.2.61)$$

et

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \dots \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta |\dots| \quad (1.2.62)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta R e^{-R^2 \sin 2\theta} \quad (1.2.63)$$

$$\leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha e^{-R^2 \frac{2\alpha}{\pi}} \quad (1.2.64)$$

$$= \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \quad (1.2.65)$$

car, pour $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha \geq \frac{2\alpha}{\pi}$. Il vient donc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \dots \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) = 0. \quad (1.2.66)$$

On trouve donc bien le résultat annoncé ci-dessus. L'autre intégrale est la complexe conjuguée de celle-ci.

1.2.3 L'oscillateur linéaire harmonique.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{q}^2}{2}. \quad (1.2.67)$$

Dans le calcul, nous choisirons les unités $\hbar = 1, m = 1, \omega = 1$, nous rétablirons ces facteurs dans la réponse finale grâce à leurs dimensions. Avec $T = t - t_0$, il vient

$$K_{oh}(q, t; q_0, t_0) = \langle q | e^{-iT\hat{H}} | q_0 \rangle \quad (1.2.68)$$

$$= \sum_n \langle q | n \rangle e^{-iT E_n} \langle n | q_0 \rangle \quad (1.2.69)$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (1.2.70)$$

$$\langle q | n \rangle = u_n(q) = \frac{i^n}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} H_n(q) e^{-\frac{q^2}{2}} \quad (1.2.71)$$

H_n est le polynôme d'Hermite de degré n ;

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad \langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}, \quad \sum_n |n\rangle \langle n| = \hat{I}. \quad (1.2.72)$$

(1.1.43) devient donc

$$K_{oh}(q, t; q_0, t_0) = \frac{e^{-\frac{iT}{2}}}{\sqrt{\pi}} \sum_n \frac{e^{-inT}}{2^n n!} e^{-\frac{1}{2}(q^2 + q_0^2)} H_n(q) H_n(q_0). \quad (1.2.73)$$

Or, on dispose d'une formule de sommation des polynômes d'Hermite qui, pour $|z| < 1$, donne

$$\sum_n \left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{n!} H_n(x) H_n(y) = (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} e^{(y^2 - \frac{(y-zx)^2}{1-z^2})}. \quad (1.2.74)$$

Cette formule est applicable à (1.2.69), avec $x = q, y = q_0$ et $z = e^{-iT}$ à la condition que, comme dans le cas de la particule libre, on accorde à T une petite partie imaginaire négative. Ainsi

$$K_{oh}(q, t; q_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2i\pi \sin T}} \exp\left[\frac{i}{2\sin T} \{(q^2 + q_0^2) \cos T - 2qq_0\}\right] \quad (1.2.75)$$

et, après rétablissement des facteurs dimensionnels

$$K_{oh}(q, t; q_0, t_0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2i\pi\hbar \sin \omega T}} \exp\left[\frac{i m \omega}{2\hbar \sin \omega T} \{(q^2 + q_0^2) \cos \omega T - 2qq_0\}\right] \quad (1.2.76)$$

A la limite $\omega \rightarrow 0$, (1.2.76) se réduit bien à (1.2.51).

1.3 Intégrale fonctionnelle.

Partons de la définition (1.1.43) du noyau K , choisissons un point t_1 intermédiaire entre t_0 et t et insérons l'identité sous la forme

$$\hat{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 |q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1| \quad (1.3.77)$$

il vient

$$K(q, t; q_0, t_0) = \langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \langle q, t | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle. \quad (1.3.78)$$

Recommençons la même opération en un point t_2 intermédiaire entre t_1 et t ,

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dq_2 \langle q, t | q_2, t_2 \rangle \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle$$

et ainsi de suite, pour n puis $n \rightarrow \infty$ points intermédiaires

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t, \quad (1.3.79)$$

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \dots dq_n \langle q, t | q_n, t_n \rangle \dots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \dots dq_n \langle q, t | q_n, t_n \rangle \dots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle \end{aligned} \quad (1.3.80)$$

On suppose évidemment que ce que l'on fait a un sens, c'est-à-dire que la limite $n \rightarrow \infty$ existe et que la réponse est unique quel que soit le découpage de l'intervalle (t_0, t) . Pour la facilité, nous choisissons le découpage de l'intervalle (t_0, t) en parties égales de longueur $\Delta t = (t - t_0)n + 1$. La limite $n \rightarrow \infty$ implique $\Delta t \rightarrow 0$ mais $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1)\Delta t = t - t_0$. Le calcul du noyau K se ramène donc au calcul du noyau relatif à des temps voisins de Δt :

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \langle q_{j+1} | e^{-i \frac{\Delta t \hat{H}}{\hbar}} | q_j \rangle \quad (1.3.81)$$

$$= \langle q_{j+1} | [\hat{I} - i \frac{\Delta t \hat{H}}{\hbar}] | q_j \rangle \quad (1.3.82)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dp_j \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | [\hat{I} - i \frac{\Delta t \hat{H}}{\hbar}] | q_j \rangle \quad (1.3.83)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)\hbar} [1 - i \frac{\Delta t}{\hbar} H(q_j, p_j)] \quad (1.3.84)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{i \frac{p_j(q_{j+1}-q_j)}{\hbar}} e^{-i \frac{\Delta t}{\hbar} H(q_j, p_j)} \quad (1.3.85)$$

où $\langle p_j | \hat{H} | q_j \rangle = H(q_j, p_j) \langle p_j | q_j \rangle$ et $H(q_j, p_j)$ est la fonction hamiltonienne classique associée à \hat{H} , exprimée comme fonction des variables q_j, p_j . Le calcul précédent reste valable pour un hamiltonien plus général, mais dans ce cas, $H(q_j, p_j)$ serait calculé comme le symbole gauche de l'opérateur \hat{H} , c'est-à-dire, en plaçant, dans \hat{H} , les opérateurs \hat{p} à gauche des \hat{q} ; ce problème ne se pose pas ici, vu les restrictions faites sur la forme de l'hamiltonien. En portant (1.3.85) dans (1.3.80), il vient

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \cdots dq_n \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \cdots \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \\ & e^{i \sum_{j=0}^n \frac{p_j(q_{j+1}-q_j)}{\hbar}} e^{-i \frac{\Delta t}{\hbar} \sum_{j=0}^n H(q_j, p_j)} \end{aligned} \quad (1.3.86)$$

où

$$q_{n+1} = q. \quad (1.3.87)$$

En introduisant une fonction $q(\tau)$ telle que $q_j = q(t_j) = q(\tau)|_{\tau=t_j}$ alors

$$q_{j+1} - q_j = q(t_j + \Delta t) - q(t_j) = \Delta t \dot{q}_j \quad (1.3.88)$$

et (1.3.86) s'écrit encore

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \cdots dq_n \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \cdots \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{i \sum_j \frac{\Delta t}{\hbar} (p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j))} \quad (1.3.89)$$

ou sous une forme plus symbolique

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int [\prod_{\tau} \frac{dq(\tau) dp(\tau)}{2\pi\hbar}] e^{i \int_{t_0}^t d\tau (p(\tau) \dot{q}(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)))}. \quad (1.3.90)$$

Sous cette forme très générale, le noyau intégral K apparaît comme une intégrale sur les trajectoires de l'espace des phases, seules les trajectoires de l'espace des configurations ont

des limites imposées. Malgré la non-symétrie des intégrations sur les q_j et sur les p_j , le symbole $\Pi_\tau \frac{dq(\tau) dp(\tau)}{2\pi\hbar}$ peut être vu comme la généralisation de la mesure de Liouville. Le lecteur intéressé calculera lui-même l'expression fonctionnelle du noyau $\langle p, t | p_0, t_0 \rangle$.

Puisque par hypothèse, $H(q, p)$ est une fonction quadratique de p , il est possible d'effectuer, dans (1.3.89), les intégrations sur les variables p_0, \dots, p_n ; comme précédemment, on accordera à Δt une petite partie imaginaire négative. Il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_j e^{i\frac{\Delta t}{\hbar}(p_j \dot{q}_j - \frac{p_j^2}{2m})} = \sqrt{\frac{2m\pi\hbar}{i\Delta t}} e^{i\frac{\Delta t}{\hbar} \frac{m\dot{q}_j^2}{2}} \quad (1.3.91)$$

de sorte que (1.3.89) prend la forme

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \cdots dq_n \left[\frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t} \right]^{\frac{n+1}{2}} e^{i\frac{\Delta t}{\hbar} \sum_{j=0}^n \left[\frac{m\dot{q}_j^2}{2} - V(q_j) \right]} \quad (1.3.92)$$

$$= \int [\Pi_\tau dq(\tau) \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t}}] \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau L(q(\tau), \dot{q}(\tau))} \quad (1.3.93)$$

$$= \int \mathcal{D}q(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\tau); t_0, t]} \quad (1.3.94)$$

C'est une intégrale sur les trajectoires de l'espace des configurations qui partent de q_0 en t_0 et arrivent en q à l'instant t .

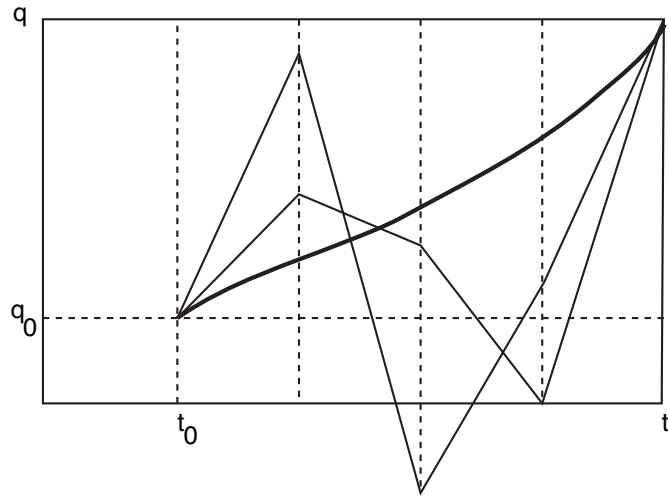


FIG. 1.2 – Exemples de chemins

1.3.1 Exemple de la particule libre.

Nous allons appliquer (1.3.94) au calcul du noyau K de la particule libre et montrer que l'on reproduit bien le résultat (1.2.51). Dans ce cas, (1.3.94) devient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \cdots dq_n \left[\frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t} \right]^{\frac{n+1}{2}} e^{i\lambda \sum_{j=0}^n (q_{j+1} - q_j)^2} \quad (1.3.95)$$

avec

$$\lambda = \frac{m}{2\hbar\Delta t} \quad (1.3.96)$$

et

$$\sum_{j=0}^n (q_{j+1} - q_j)^2 = (q - q_n)^2 + (q_n - q_{n-1})^2 + \cdots + (q_1 - q_0)^2. \quad (1.3.97)$$

Ce calcul se fait le plus simplement par induction sur n : on suppose donnée, pour n l'intégrale suivante

$$\int dq_1 \cdots dq_n e^{i\lambda[(q - q_n)^2 + (q_n - q_{n-1})^2 + \cdots + (q_1 - q_0)^2]} = \left[\frac{i\pi}{\lambda} \right]^{\frac{n}{2}} \frac{e^{\frac{i\lambda(q - q_0)^2}{n+1}}}{\sqrt{n+1}} \quad (1.3.98)$$

on démontre ensuite qu'elle est vraie pour $(n+1)$.

En effet

$$\int dq_1 \cdots dq_{n+1} e^{i\lambda[(q - q_{n+1})^2 + (q_{n+1} - q_n)^2 + \cdots + (q_1 - q_0)^2]} = \quad (1.3.99)$$

$$= \int dq_{n+1} \left[\frac{i\pi}{\lambda} \right]^n 2 \frac{e^{\frac{i\lambda(q_{n+1} - q_0)^2}{n+1}}}{\sqrt{n+1}} e^{i\lambda(q - q_{n+1})^2} = \quad (1.3.100)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left[\frac{i\pi}{\lambda} \right]^{\frac{n}{2}} \int dx e^{i\frac{\lambda}{n+1}[x^2(2+n) - 2x(q_0 + (n+1)q) + q_0^2 + (n+1)q^2]} = \quad (1.3.101)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left[\frac{i\pi}{\lambda} \right]^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{i\pi(n+1)}{\lambda(n+2)}} e^{i\frac{\lambda}{n+2}(q - q_0)^2}. \quad (1.3.102)$$

Il vient donc

$$K_0(q, t; q_0, t_0) = \lim_n \left[\frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t} \right]^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left[\frac{2i\pi\hbar\Delta t}{m} \right]^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{m}{2\hbar\Delta t(n+1)}(q - q_0)^2} \quad (1.3.103)$$

qui n'est autre que (1.2.51), car $(n+1)\Delta t = T$. CQFD

L'amplitude de probabilité de transition $\langle q, t | q_0, t_0 \rangle$ donnée par (1.3.94) est donc une somme infinie d'amplitudes, chacune d'elles, exprimant que la transition se fait en suivant un chemin $q(\tau)$ est égale au produit d'une constante par

$$e^{\frac{i}{\hbar}S[q(\tau); t_0, t]} \quad (1.3.104)$$

où $S[q(\tau); t_0, t]$ est la valeur que prend l'action sur ce chemin. L'amplitude relative à un chemin étant le produit d'une constante par un facteur de module 1, il en résulte que

la probabilité pour que la particule partant de q_0 à l'instant t_0 , suive le chemin $q(\tau)$ et se trouve en q à l'instant t est indépendante du chemin suivi. Cette formulation met en évidence la différence entre la mécanique quantique et la mécanique classique qui, elle, privilégie le chemin classique, c'est-à-dire, celui qui rend l'action stationnaire. Dans K , on doit prendre en compte la contribution de tous les chemins possibles; or, la fonction à intégrer est une fonction oscillante du rapport $\frac{S}{\hbar}$. A la limite classique ($\hbar \rightarrow 0$), la fonction $\exp(\frac{i}{\hbar}S[q(\tau); t_0, t])$ oscille avec une fréquence très grande, en passant d'un chemin $q(\tau)$ à un chemin voisin $q(\tau) + \delta q(\tau)$ de sorte que les contributions positives et négatives se cancelent mutuellement sauf, évidemment, au voisinage du chemin classique où l'action est stationnaire et où les contributions de chemins voisins s'additionnent. Dans ce sens, la trajectoire classique retrouve son rôle privilégié lorsque $\hbar \rightarrow 0$. Les contributions à K des autres chemins constituent les fluctuations quantiques. Mettons ceci en évidence par un changement de variables dans (1.3.94) (voir aussi "approximation semi-classique"). Rappelons que

$$S[q(\tau); t_0, t] = \int_{t_0}^t d\tau \left[\frac{m\dot{q}(\tau)^2}{2} - V(q(\tau)) \right]. \quad (1.3.105)$$

Soit $\tilde{q}(\tau)$ le chemin classique, c'est-à-dire, la solution de l'équation d'Euler-Lagrange qui satisfait les conditions limites imposées

$$\frac{\delta S}{\delta q} \Big|_{q=\tilde{q}} = \left[-\frac{d}{d\tau} m\dot{q} - \frac{\partial V}{\partial q} \right] \Big|_{q=\tilde{q}} = 0, \quad \tilde{q}|_{\tau=t_0} = q_0, \quad \tilde{q}|_{\tau=t} = q \quad (1.3.106)$$

et introduisons dans 1.3.94) le changement de variables d'intégration suivant

$$q(\tau) = \tilde{q}(\tau) + x(\tau) \quad (1.3.107)$$

où $x(\tau)$ est donc l'écart de $q(\tau)$ par rapport à la trajectoire classique; par définition, x s'annule en t_0 et t . En chaque point du découpage de l'intervalle de temps (t_0, t) , ce changement de variables n'est autre qu'une simple translation. Le Jacobien de cette transformation vaut 1 et

$$\mathcal{D}q(\tau) \rightarrow \mathcal{D}x(\tau) \quad (1.3.108)$$

de plus,

$$S[q; t_0, t] = S[\tilde{q} + x; t_0, t] \quad (1.3.109)$$

$$= S[\tilde{q}; t_0, t] + \int_{t_0}^t d\tau \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2} V''(\tilde{q}) - \sum_{n \geq 3} \frac{x^n}{n!} V^{(n)}(\tilde{q}) \right] \quad (1.3.110)$$

En vertu des équations d'Euler-Lagrange et des conditions limites, il n'y a plus de terme linéaire en x . Avec

$$S[\tilde{q}; t_0, t] = \tilde{S}(t_0, t) \quad (1.3.111)$$

qui n'est autre que la valeur que prend l'action sur la trajectoire classique, (1.3.94) se réécrit donc comme

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = e^{\frac{i\tilde{S}}{\hbar}} \int \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2} V''(\tilde{q}) - \sum_{n \geq 3} \frac{x^n}{n!} V^{(n)}(\tilde{q}) \right]} \quad (1.3.112)$$

L'intégrale fonctionnelle restante porte sur les trajectoires $x(\tau)$ nulles en t_0 et t . On peut aisément calculer cette intégrale pour la partie quadratique en x , comme nous le montrerons plus loin, quant aux termes d'ordre supérieurs à 2, ils seront traités de façon perturbative (en remplaçant l'exponentielle par son développement en série!)

1.3.2 Partie quadratique

Montrons, à présent, comment calculer l'intégrale fonctionnelle portant sur la partie quadratique

$$\int \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2} V''(\tilde{q}) \right]} = \quad (1.3.113)$$

$$= \int \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \frac{m\dot{x}(\tau)}{2} \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + W(\tau) \right] x(\tau)} \quad (1.3.114)$$

où nous avons posé $W(\tau) = -\frac{1}{m} V''(\tilde{q})$. En passant de la première ligne à la seconde, nous avons fait une intégration par parties; le terme aux limites s'annule car $x(\tau)$ est nul en t_0 et t . Considérons l'équation différentielle (de Sturm-Liouville)

$$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + W(\tau) \right] \psi(\tau) = \lambda \psi(\tau). \quad (1.3.115)$$

L'opérateur différentiel $\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + W(\tau) \right]$ est formellement autoadjoint pour le produit scalaire

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{t_0}^t d\tau \phi(\tau) \cdot \psi(\tau) \quad (1.3.116)$$

si les fonctions ψ, ϕ normalisées de son domaine s'annulent en t_0 et t . Soient λ_n une valeur propre et ψ_n la fonction propre correspondante, $\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$ et

$$x(\tau) = \sum_n a_n \psi_n(\tau), \quad a_n = \langle \psi_n | x \rangle. \quad (1.3.117)$$

Il vient alors

$$\int_{t_0}^t d\tau x(\tau) \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + W(\tau) \right] x(\tau) = \int_{t_0}^t d\tau x(\tau) \left[\sum_n a_n \lambda_n \psi_n \right] = \sum_n \lambda_n a_n^2. \quad (1.3.118)$$

Ceci suggère, dans l'intégrale fonctionnelle, le changement de variables d'intégration

$$x(\tau) \rightarrow a_n, \quad \mathcal{D}x(\tau) \rightarrow \prod_n da_n J \quad (1.3.119)$$

où J désigne le jacobien

$$J = \left| \frac{\partial x}{\partial a_n} \right|. \quad (1.3.120)$$

Le changement de variables étant linéaire, ce jacobien est constant et sort de l'intégrale. Il vient ainsi

$$\int \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \frac{m\dot{x}(\tau)}{2} \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + W(\tau) \right] x(\tau)} = \quad (1.3.121)$$

$$= J. \int \prod_n (da_n) e^{\frac{im}{2\hbar} \sum_n \lambda_n a_n^2} = J. \prod_n \sqrt{\frac{2i\pi\hbar}{m\lambda_n}} \quad (1.3.122)$$

$$= J. \left(\sqrt{\frac{2i\pi\hbar}{m}}\right)^n \prod_n \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = C. \frac{1}{\sqrt{\det[-\frac{d^2}{d\tau^2} + W(\tau)]}} \quad (1.3.123)$$

le déterminant de l'opérateur différentiel étant défini comme le produit de ses valeurs propres. Il ne reste plus qu'à calculer le déterminant. pour cela, nous faisons appel au théorème suivant (voir par exemple: S. Coleman "The use of instantons") valable pour $W(\tau)$ bornée sur l'intervalle (t, t_0) :

Désignons par ψ_λ la solution de l'équation

$$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + W(\tau)\right]\psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda \quad (1.3.124)$$

qui satisfait le problème de Cauchy suivant

$$\psi_\lambda(t_0) = 0, \quad \dot{\psi}_\lambda(t_0) = 1 \quad (1.3.125)$$

on a alors le

Théorème 1. *si $W^1(\tau)$ et $W^2(\tau)$ sont deux fonctions bornées de τ et si ψ_λ^1 et ψ_λ^2 sont les solutions des équations ci-dessus, avec mêmes conditions de Cauchy,*

$$\frac{\det[-\frac{d^2}{d\tau^2} + W^1(\tau) - \lambda]}{\det[-\frac{d^2}{d\tau^2} + W^2(\tau) - \lambda]} = \frac{\psi_\lambda^1(t)}{\psi_\lambda^2(t)}. \quad (1.3.126)$$

La démonstration de ce théorème consiste à montrer que les deux membres sont des fonctions méromorphes de λ ayant mêmes zéros et mêmes pôles et même limite, 1, lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ dans toute direction du plan complexe, sauf le long de l'axe réel. Il en résulte, pour $\lambda = 0$, que

$$\frac{\det[-\frac{d^2}{d\tau^2} + W(\tau)]}{\psi_0(t)} = \text{const.} \quad (1.3.127)$$

indépendante de W . On a donc

$$\det[-\frac{d^2}{d\tau^2} + W(\tau)] = C. \psi_0(t). \quad (1.3.128)$$

Exemple de l'oscillateur linéaire harmonique.

L'application de (1.3.112) à l'oscillateur linéaire harmonique fournit tout de suite, pour $V(q) = \frac{m\omega^2 q^2}{2}$,

$$K_{olh}(q, t; q_0, t_0) = e^{\frac{i\tilde{S}}{\hbar}} K_{olh}(0, t; 0, t_0), \quad (1.3.129)$$

où

$$\tilde{S} = \frac{m\omega}{2\sin\omega T} [(q^2 + q_0^2)\cos\omega T - 2qq_0]. \quad (1.3.130)$$

Le calcul du déterminant donne

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega(t - t_0) \quad (1.3.131)$$

et

$$\det\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} - \omega^2\right] = C \cdot \frac{1}{\omega} \sin \omega(t - t_0). \quad (1.3.132)$$

La constante C doit être ajustée en facteur de K de façon à reproduire le noyau K_0 de la particule libre, à la limite $\omega \rightarrow 0$. Il vient ainsi

$$K_{oh}(0, t; 0, t_0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2i\pi\hbar\sin\omega T}}. \quad (1.3.133)$$

1.3.3 Développement perturbatif.

Pour des potentiels $V(q)$ qui sont plus que quadratiques en $q(\tau)$, on conserve l'exponentielle de la partie quadratique et on développe en série l'exponentielle contenant les puissances plus élevées. Ainsi, l'amplitude (1.3.112) devient

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = e^{\frac{i\tilde{S}}{\hbar}} \int \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2} V''(\hat{q}) \right]} \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \sum_{n \geq 3} \frac{x^n}{n!} V^{(n)}(\hat{q}) + \dots \right] \quad (1.3.134)$$

Le dernier changement de variables

$$x(\tau) = y(\tau) \sqrt{\hbar}, \quad \prod_{t_i} [dx(t_i)] \hbar^{-\frac{n+1}{2}} = \prod_{t_i} [dy(t_i)] \hbar^{-\frac{1}{2}} \quad (1.3.135)$$

transforme, dans l'exponentielle,

$$\frac{i}{\hbar} (\text{partie quadratique en } x) \rightarrow i (\text{partie quadratique en } y) \quad (1.3.136)$$

et dans la série

$$\left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \sum_{n \geq 3} \frac{x^n}{n!} V^{(n)} + \dots \right] \rightarrow \left[1 - i \int_{t_0}^t d\tau \sum_{n \geq 3} \frac{y^n}{n!} \hbar^{\frac{n}{2}-1} V^{(n)} + \dots \right] \quad (1.3.137)$$

de sorte que, mis à part le facteur global $\hbar^{-\frac{1}{2}}$ qui seul subsiste après le dernier changement de variables, la série perturbative apparaît comme une série de puissances positives de \hbar : en effet, pour des raisons de parité, seules les puissances paires de y contribuent à l'intégrale, or, $n \geq 3$ et n pair, donc $n = 2n'$ font que

$$\hbar^{\frac{n}{2}-1} = \hbar^{n'-1} \quad (1.3.138)$$

et $n' \geq 2$.

A l'approximation semi-classique où on ne garde du développement ci-dessus que la contribution dominante pour $\hbar \rightarrow 0$, il vient

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{\hbar}} e^{\frac{i\tilde{S}}{\hbar}} \frac{C}{\sqrt{\det[-\frac{d^2}{dt^2} - \frac{1}{m}V''(\tilde{q})]}}. \quad (1.3.139)$$

Remarque: s'il y a plus qu'une trajectoire classique, il convient de sommer les amplitudes. Même l'approximation semi-classique peut dans ce cas mettre en évidence des effets non-classiques. Voir par exemple l'effet Bohm-Aharonov.

1.4 Produits chronologiques d'opérateurs.

Considérons l'élément de matrice

$$\langle q, t | \hat{q}(t_1) | q_0, t_0 \rangle \quad (1.4.140)$$

pour $t_0 \leq t_1 \leq t$, et insérons l'opérateur unité sous la forme

$$\hat{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 |q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1|. \quad (1.4.141)$$

Il vient

$$\langle q, t | \hat{q}(t_1) | q_0, t_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \langle q, t | q_1, t_1 \rangle q_1 \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle. \quad (1.4.142)$$

En posant $q_1 = q(t_1)$ et en utilisant (1.3.94) pour chacune des amplitudes sous l'intégrale, l'expression ci-dessus devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq(t_1) \int \mathcal{D}q(\tau_1) e^{\frac{i}{\hbar}S[q(\tau_1); t_1, t]} q(t_1) \int \mathcal{D}q(\tau_2) e^{\frac{i}{\hbar}S[q(\tau_2); t_0, t_1]} \quad (1.4.143)$$

avec $t_1 \leq \tau_1 \leq t$ et $t_0 \leq \tau_2 \leq t_1$. En recollant les deux ensembles de trajectoires en q_1 à l'instant t_1 , on obtient

$$\langle q, t | \hat{q}(t_1) | q_0, t_0 \rangle = \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) e^{\frac{i}{\hbar}S[q(\tau); t_0, t]}, \quad (1.4.144)$$

à la condition que t_1 figure dans tout découpage de l'intervalle de temps (t_0, t) . On obtient de la même façon, pour $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t$,

$$\langle q, t | \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) | q_0, t_0 \rangle = \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_2) q(t_1) e^{\frac{i}{\hbar}S[q(\tau); t_0, t]} \quad (1.4.145)$$

$$= \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) q(t_2) e^{i\hbar S[q(\tau); t_0, t]}, \quad (1.4.146)$$

car sous le signe intégrale, $q(t_1)$ et $q(t_2)$ sont des variables réelles qui commutent. Par contre, l'expression (1.4.146) est égale à l'élément de matrice

$$\langle q, t | \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) | q_0, t_0 \rangle \quad (1.4.147)$$

mais pour $t_0 \leq t_2 \leq t_1 \leq t$, cette fois. Ceci se résume donc en

$$\langle q, t | T \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) | q_0, t_0 \rangle = \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) q(t_2) e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\tau); t_0, t]}. \quad (1.4.148)$$

où T désigne le produit chronologique des opérateurs. En général,

$$\langle q, t | T \hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n) | q_0, t_0 \rangle = \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) \cdots q(t_n) e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\tau); t_0, t]}. \quad (1.4.149)$$

1.5 Fonctions de Green.

A partir de (1.4.149), nous allons chercher à établir l'intégrale fonctionnelle qui donne les fonctions de Green du système

$$G_n(t_1, \cdots, t_n) = \langle 0 | T \hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n) | 0 \rangle \quad (1.5.150)$$

où $|0\rangle$ désigne l'état fondamental du système, état propre de \hat{H} d'énergie minimum E_0

$$\hat{H} |0\rangle = E_0 |0\rangle. \quad (1.5.151)$$

Pour ce faire, partons de l'amplitude $\langle q, t | q_0, t_0 \rangle$ et insérons l'opérateur unité construit sur les vecteurs propres de \hat{H} , $\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$, $E_n > E_{n-1}$,

$$\hat{I} = \sum_n |n\rangle \langle n|. \quad (1.5.152)$$

Il vient

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \sum_n \langle q, t | n \rangle \langle n | q_0, t_0 \rangle \quad (1.5.153)$$

$$= \sum_n \langle q | e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} | n \rangle \langle n | q_0 \rangle \quad (1.5.154)$$

$$= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)E_n} \langle q | n \rangle \langle n | q_0 \rangle \quad (1.5.155)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)E_0} \left[\langle q | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle + \sum_{n \geq 1} \langle q | n \rangle \langle n | q_0 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)(E_n - E_0)} \right] \quad (1.5.156)$$

Dans le crochet du dernier terme, on voit que si l'on remplace

$$T = t - t_0 \rightarrow T_\eta = T(1 - i\eta), \quad (1.5.157)$$

η réel et > 0 , à la limite, $T \rightarrow \infty$, seul subsistera le premier terme

$$\langle q|0 \rangle \langle 0|q_0 \rangle \quad (1.5.158)$$

les autres étant exponentiellement décroissants par $\exp(-\frac{T\eta}{\hbar}(E_n - E_0))$. Avec la convention (1.5.157), il vient donc, asymptotiquement, pour $T \rightarrow \infty$,

$$\langle q, t|q_0, t_0 \rangle_\eta \asymp \langle q|0 \rangle \langle 0|q_0 \rangle e^{-iE_0 T \eta / \hbar}. \quad (1.5.159)$$

Considérons, par ailleurs, le premier membre de (1.4.149), et choisissons deux temps t_a et t_b finis, où insérer l'opérateur unité. Par définition, nous choisissons

$$t_0 < t_a < t_{i_1} < \dots < t_{i_n} < t_b < t \quad (1.5.160)$$

alors (1.4.149) devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq_a \int_{-\infty}^{+\infty} dq_b \langle q, t|q_b, t_b \rangle \langle q_b, t_b|T\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)|q_a, t_a \rangle \langle q_a, t_a|q_0, t_0 \rangle. \quad (1.5.161)$$

Rendons à présent les variables $t_a - t_0, t - t_b$ complexes par (1.5.157) puis, passons aux limites $t_0 \rightarrow -\infty, t \rightarrow +\infty$. En utilisant (1.5.159), il reste, pour les comportements asymptotiques

$$\langle q, t|T\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)|q_0, t_0 \rangle_\eta \asymp \langle q, t|q_0, t_0 \rangle_\eta \cdot \langle 0|T\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)|0 \rangle. \quad (1.5.162)$$

On en tire donc que la fonction de Green G_n s'obtient en prenant le quotient du comportement asymptotique de (1.5.162) par le comportement asymptotique de (1.5.159):

$$G_n(t_1, \dots, t_n) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty; t \rightarrow +\infty} \langle q, t|T\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)|q_0, t_0 \rangle_\eta \langle q, t|q_0, t_0 \rangle_\eta^{-1} = \quad (1.5.163)$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty; t \rightarrow +\infty} \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) \dots q(t_n) e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\tau); t_0, t]} \int \mathcal{D}q(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\tau); t_0, t]} \quad (1.5.164)$$

où

$$S[q] = \int_{t_0(1-i\eta)}^{t(1-i\eta)} d\tau L(q, \dot{q}). \quad (1.5.165)$$

Le quotient (1.5.164) est en principe indépendant des valeurs limites q, q_0 des trajectoires à la condition que les mêmes limites soient utilisées au numérateur et au dénominateur. En fait, les "bonnes conditions limites" (voir à ce sujet dans Faddeev et Slavnov, la représentation holomorphe de l'intégrale de chemins) sont les conditions dites de radiation pour lesquelles les fonctions $q(\tau)$ devenues complexes, n'ont, pour $\tau \rightarrow +\infty$ qu'une partie à fréquence positive et n'ont, pour $\tau \rightarrow -\infty$ qu'une partie à fréquence négative, parce qu'alors elles satisfont automatiquement

$$\lim_{t \rightarrow +\infty(1-i\eta)} q(t) = 0, \quad \lim_{t_0 \rightarrow -\infty(1-i\eta)} q(t_0) = 0. \quad (1.5.166)$$

1.6 Fonctionnelle génératrice des fonctions de Green.

Toutes les fonctions de Green peuvent s'obtenir comme dérivées fonctionnelles par rapport à la source $J(t)$, de la fonctionnelle génératrice $Z[J]$ définie par

$$Z[J] = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty; t \rightarrow +\infty} \int \mathcal{D}q(\tau) e^{i \int_{t_0}^{t(1-i\eta)} d\tau [L(q, \dot{q}) + J(\tau)q(\tau)]} = \quad (1.6.167)$$

$$= Z[0] \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dt_1 \cdots dt_n J(t_1) \cdots J(t_n) G_n(t_1, \dots, t_n) \right]. \quad (1.6.168)$$

$J(t)$ est une source arbitraire nulle en dehors d'un segment borné de l'axe réel, suffisamment grand pour contenir tous les arguments des G_n . Dans $Z[J]$, les trajectoires sur lesquelles on intègre s'annulent en $\tau \rightarrow +\infty(1-i\eta)$ et en $\tau \rightarrow -\infty(1-i\eta)$. De (1.6.168), on tire

$$G_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{i^n Z[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \cdots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0}. \quad (1.6.169)$$

Théorème 2. *La fonctionnelle $Z[J]$ n'est autre que l'amplitude de transition du vide au vide sous l'effet de la source.*

En effet, Soit $\hat{H}_J(t) = \hat{H} - J(t)\hat{q}$, où $\partial_t \hat{H} = 0$ et $J(t)$ est une source classique. Noter que $\hat{H} = \hat{H}_0$. L'opérateur d'évolution $\hat{U}_J(t, t_0)$ est donné par

$$\hat{U}_J(t, t_0) = \hat{U}_{J=0}(t, t_0) \left[\hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots dt_n J(t_1) \cdots J(t_n) T(\hat{q}_I(t_1) \cdots \hat{q}_I(t_n)) \right]. \quad (1.6.170)$$

$\hat{q}_I(t)$ est l'observable position en image de Dirac définie par

$$\hat{q}_I(t) = \hat{U}_0^+(t, t_0) \hat{q} \hat{U}_0(t, t_0). \quad (1.6.171)$$

De même, l'observable impulsion en image de Dirac est définie par

$$\hat{p}_I(t) = \hat{U}_0^+(t, t_0) \hat{p} \hat{U}_0(t, t_0). \quad (1.6.172)$$

Leur évolution au cours du temps est gouvernée par les équations sans source

$$i\hbar \partial_t \hat{q}_I(t) = [\hat{q}_I(t), \hat{H}] \quad (1.6.173)$$

$$i\hbar \partial_t \hat{p}_I(t) = [\hat{p}_I(t), \hat{H}] \quad (1.6.174)$$

tandis que l'état en image de Dirac

$$|\psi, t \rangle_I = \hat{U}_0^+(t, t_0) |\psi, t \rangle \quad (1.6.175)$$

évolue au cours du temps du fait de la source

$$i\hbar \partial_t |\psi, t \rangle_I = \hat{U}_0^+(t, t_0) [-J(t)\hat{q}] |\psi, t \rangle = -J(t)\hat{q}_I(t) |\psi, t \rangle_I. \quad (1.6.176)$$

Si $|0\rangle$ désigne l'état fondamental de \hat{H} au temps t_0 (donc aussi à tout instant en vertu des hypothèses) de valeur propre E_0 , au temps t , sous l'effet de la source, il a évolué vers l'état

$$\hat{U}_J(t, t_0) |0\rangle. \quad (1.6.177)$$

L'amplitude de probabilité de transition de l'état fondamental de \hat{H} à l'instant t_0 vers l'état fondamental de \hat{H} à l'instant t est donnée par

$$\langle 0 | \hat{U}_J(t, t_0) | 0 \rangle = \langle 0, t | 0, t_0 \rangle^J \quad (1.6.178)$$

$$= \langle 0 | \hat{U}_0(t, t_0) [\hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{i}{\hbar})^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots dt_n J(t_1) \cdots J(t_n) T(\hat{q}_I(t_1) \cdots \hat{q}_I(t_n))] | 0 \rangle \quad (1.6.179)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)E_0} [1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{i}{\hbar})^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots dt_n J(t_1) \cdots J(t_n) G_n(t_1, \cdots, t_n)]. \quad (1.6.180)$$

On en déduit donc que

$$Z[J] = \langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle^J. \quad (1.6.181)$$

CQFD

1.6.1 Exemple de l'oscillateur linéaire harmonique.

$$Z_0[J] = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty; t \rightarrow +\infty} \int \mathcal{D}q(\tau) e^{\frac{i}{2} \int_{t_0(1-i\eta)}^{t(1-i\eta)} d\tau [\dot{q}^2 - \omega^2 q^2 + 2Jq]}. \quad (1.6.182)$$

Désignons par $\tilde{q}(t)$ la solution de l'équation d'Euler-Lagrange en présence de la source

$$\ddot{q} + \omega^2 q = J \quad (1.6.183)$$

qui s'annule en $+\infty(1-i\eta)$ et en $-\infty(1-i\eta)$, et effectuons dans (1.6.182) le changement de variables d'intégration suivant

$$q(\tau) = \tilde{q}(\tau) + x(\tau). \quad (1.6.184)$$

Par définition, $x(\tau)$ s'annule en $+\infty(1-i\eta)$ et en $-\infty(1-i\eta)$. Il vient alors, en utilisant l'équation d'Euler-Lagrange et les conditions limites sur x ,

$$\int_{-\infty(1-i\eta)}^{+\infty(1-i\eta)} d\tau [\dot{q}^2 - \omega^2 q^2 + 2Jq] = \int_{-\infty(1-i\eta)}^{+\infty(1-i\eta)} d\tau [\dot{\tilde{q}}^2 - \omega^2 \tilde{q}^2 + 2J\tilde{q} + \dot{x}^2 - \omega^2 x^2] \quad (1.6.185)$$

de sorte que

$$Z_0[J] = e^{i\tilde{S}_J} \int \mathcal{D}x(\tau) e^{i2 \int_{-\infty(1-i\eta)}^{+\infty(1-i\eta)} d\tau [\dot{x}^2 - \omega^2 x^2]} \quad (1.6.186)$$

$$= Z_0[0].e^{i\tilde{S}_J} \quad (1.6.187)$$

\tilde{S}_J est la valeur que prend l'action, avec source, le long de la trajectoire \tilde{q} . Le calcul de la fonctionnelle $Z_0[J]$ est ainsi réduit au calcul de l'intégrale ordinaire \tilde{S}_J . Il ne nous reste

plus qu'à résoudre l'équation (1.6.183) pour trouver \tilde{q} . La solution générale de (1.6.183) est la somme d'une solution particulière de (1.6.183) et de la solution générale de l'équation homogène. Or, la théorie quantique de l'oscillateur linéaire harmonique nous fournit, par

$$i\Delta_F(t_1 - t_2) = \langle 0 | T \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) | 0 \rangle \quad (1.6.188)$$

avec

$$\hat{q}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a}(t) + \hat{a}^+(t)) \quad (1.6.189)$$

$$\hat{p}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(-i\omega)(\hat{a}(t) - \hat{a}^+(t)) \quad (1.6.190)$$

et

$$\hat{a}(t)|n, t\rangle = \sqrt{n}|n-1, t\rangle \quad (1.6.191)$$

$$\hat{a}^+(t)|n, t\rangle = \sqrt{n+1}|n+1, t\rangle \quad (1.6.192)$$

$$\langle n, t | n', t \rangle = \delta_{nn'} \quad (1.6.193)$$

$$E_n = \omega(n + \frac{1}{2}) \quad (1.6.194)$$

et

$$|0\rangle = |0, t\rangle \quad (1.6.195)$$

$$i\Delta_F(t_1 - t_2) = \frac{1}{2\omega}[\theta(t_1 - t_2)e^{-i(t_1-t_2)\omega} + \theta(t_2 - t_1)e^{i(t_1-t_2)\omega}] \quad (1.6.196)$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{e^{-i\omega'(t_1-t_2)}}{\omega'^2 - \omega^2 + i\epsilon} \quad (1.6.197)$$

le propagateur de Feynman, $\Delta_F(t_1 - t_2)$, solution de l'équation

$$(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2)\Delta_F(\tau) = -\delta(\tau) \quad (1.6.198)$$

qui, pour $\tau > 0$, n'a qu'une partie à fréquence positive, et pour $\tau < 0$, n'a qu'une partie à fréquence négative. La solution particulière de (1.6.183) qu'elle permet de construire, par convolution avec la source J ,

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau') \quad (1.6.199)$$

satisfait donc les conditions limites imposées. La solution générale de l'équation homogène

$$Ae^{i\omega\tau} + Be^{-i\omega\tau} \quad (1.6.200)$$

dans laquelle les constantes A et B doivent encore être ajustées pour satisfaire les conditions limites est donc identiquement nulle. En résumé,

$$\tilde{q}(\tau) = - \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau') \quad (1.6.201)$$

et

$$\tilde{S}_J = \frac{1}{2} \int d\tau [\dot{\tilde{q}}^2 - \omega^2 \tilde{q}^2 + 2J\tilde{q}] \quad (1.6.202)$$

$$= \frac{1}{2} \int d\tau [-\tilde{q}(\ddot{\tilde{q}} + \omega^2 \tilde{q}) + 2J\tilde{q}] \quad (1.6.203)$$

$$= \frac{1}{2} \int d\tau [J(\tau)\tilde{q}(\tau)] \quad (1.6.204)$$

$$= -\frac{1}{2} \int d\tau d\tau' J(\tau)\Delta_F(\tau - \tau')J(\tau') \quad (1.6.205)$$

D'où il vient, avec (1.6.187), la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green de l'oscillateur linéaire harmonique

$$Z_0[J] = Z_0[0].e^{\frac{i}{2} \int d\tau d\tau' J(\tau)\Delta_F(\tau - \tau')J(\tau')}. \quad (1.6.206)$$

Les fonctions de Green de l'oscillateur linéaire harmonique se calculent par (1.6.169): toutes les fonctions de Green d'indices impairs sont nulles

$$G_{2n+1} = 0 \quad (1.6.207)$$

les autres sont

$$G_2(t_1, t_2) = i\Delta_F(t_1 - t_2) \quad (1.6.208)$$

$$G_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = G_2(t_1, t_2)G_2(t_3, t_4) + G_2(t_1, t_3)G_2(t_2, t_4) + G_2(t_1, t_4)G_2(t_2, t_3) \quad (1.6.209)$$

$$G_6(t_1, \dots, t_6) = G_2(t_1, t_2)G_4(t_3, t_4, t_5, t_6) + G_2(t_1, t_3)G_4(t_2, t_4, t_5, t_6) + \quad (1.6.210)$$

$$+ G_2(t_1, t_4)G_4(t_2, t_3, t_5, t_6) + G_2(t_1, t_5)G_4(t_2, t_3, t_4, t_6) + G_2(t_1, t_6)G_4(t_2, t_3, t_4, t_5) \quad (1.6.211)$$

et ainsi de suite. Les G_{2n} sont des sommes de produits de G_2 correspondant à toutes les façons possibles de répartir $2n$ arguments en paires, sans tenir compte de l'ordre de ces paires. Le nombre de termes dans G_{2n} est

$$\frac{1}{n!} C_2^{2n} . C_2^{2n-2} \dots C_2^4 . C_2^2 = \frac{(2n)!}{n! 2^n}. \quad (1.6.212)$$

Notons encore que, en introduisant dans (1.6.187) le noyau-distribution

$$N(\tau - \tau') = N(\tau' - \tau) = -\left[\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2\right] \delta(\tau - \tau') \quad (1.6.213)$$

tel que

$$\int d\tau' N(\tau - \tau') \Delta_F(\tau' - \tau'') = \delta(\tau - \tau'') \quad (1.6.214)$$

ce que, formellement, on peut voir comme l'inverse du propagateur

$$[N(\tau - \tau')]^{-1} = \Delta_F(\tau - \tau'), \quad (1.6.215)$$

il vient

$$\int d\tau [\dot{q}^2 - \omega^2 q^2 + 2Jq] = \int d\tau d\tau' [q(\tau)N(\tau - \tau')q(\tau') + J(\tau)\delta(\tau - \tau')q(\tau') + q(\tau)\delta(\tau - \tau')J(\tau')] \quad (1.6.216)$$

et l'intégrale fonctionnelle (1.6.187) est la généralisation ($n \rightarrow \infty$) de l'intégrale suivante

$$z_0(j) = \int dx_1 \cdots dx_n e^{\frac{i}{2}[x_k N_{kl} x_l + x_k \delta_{kl} j_l + j_k \delta_{kl} x_l]} \quad (1.6.217)$$

$$= \int dx_1 \cdots dx_n e^{\frac{i}{2}[x^T N x + x^T j + j^T x]} \quad (1.6.218)$$

où la matrice N est supposée symétrique et inversible. L'intégrale (1.6.216) se calcule en effectuant le changement de variables

$$x_k = x'_k - [N^{-1}]_{kl} j_l \quad (1.6.219)$$

de jacobien 1, pour lequel l'exposant devient

$$x^T N x + x^T j + j^T x = x'^T N x' - j^T N^{-1} j \quad (1.6.220)$$

de sorte que

$$z_0(j) = e^{-\frac{i}{2} j^T N^{-1} j} \int dx'_1 \cdots dx'_n e^{\frac{i}{2} x'^T N x'} = e^{-\frac{i}{2} j^T N^{-1} j} z_0(0). \quad (1.6.221)$$

La même opération effectuée sur (1.6.182), avec (1.6.215), fournit directement (1.6.206). La relation (1.6.215) est bien définie, en ce sens que l'inverse de N est unique sur les fonctions qui satisfont les conditions limites de radiation!

Remarque: l'intégrale $z_0(j)$ se calcule en changeant de variables d'intégration

$$y = O x', \quad y^T = x'^T O^T, \quad O O^T = O^T O = I \quad (1.6.222)$$

où O est la matrice orthogonale (de déterminant 1) qui diagonalise N :

$$O N O^T = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \quad (1.6.223)$$

les λ_i sont les valeurs propres de la matrice N ,

$$z_0(0) = \int dy_1 \cdots dy_n e^{\frac{i}{2}[\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2]} = (2i\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det N}}. \quad (1.6.224)$$

On a donc aussi

$$Z_0[0] = \text{constante} \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} - \omega^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.6.225)$$

1.7 Développement perturbatif des fonctions de Green.

Considérons un lagrangien de la forme

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) - \lambda v(q) = L_0 + L_1 \quad (1.7.226)$$

où L_0 est le lagrangien de l'oscillateur linéaire harmonique, $L_1 = -\lambda v(q)$ est un polynôme (monôme) en q , λ est une constante de couplage. La fonctionnelle génératrice des fonctions de Green $Z[J]$ peut être remplacée par

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q(\tau) e^{i \int d\tau [L_0 + J(\tau)q(\tau)]} e^{i \int d\tau L_1[q(\tau)]} \quad (1.7.227)$$

$$= e^{i \int d\tau L_1[-i \frac{\delta}{\delta J(\tau)}]} \int \mathcal{D}q(\tau') e^{i \int d\tau' [L_0 + J(\tau')q(\tau')]} \quad (1.7.228)$$

$$= e^{i \int d\tau L_1[-i \frac{\delta}{\delta J(\tau)}]} Z_0[J] \quad (1.7.229)$$

Pour obtenir ce résultat, nous avons utilisé le fait que, sous le signe intégrale

$$q(t) e^{i \int d\tau J(\tau)q(\tau)} = -i \frac{\delta}{\delta J(t)} e^{i \int d\tau J(\tau)q(\tau)} \quad (1.7.230)$$

donc aussi

$$F[q(t)] e^{i \int d\tau J(\tau)q(\tau)} = F[-i \frac{\delta}{\delta J(t)}] e^{i \int d\tau J(\tau)q(\tau)}. \quad (1.7.231)$$

La formule (1.7.229), dans laquelle on remplace l'opérateur

$$e^{i \int d\tau L_1[-i \frac{\delta}{\delta J(\tau)}]} \quad (1.7.232)$$

par son développement en série, qui avec (1.7.226) est aussi un développement en série de puissances de λ , donne, en principe, un moyen de calculer la fonctionnelle $Z[J]$. En pratique, on limite le développement en puissances de λ en ne gardant qu'un nombre fini de termes. Il est cependant plus facile d'obtenir, pour chaque fonction de Green, un développement en puissances de λ à partir de

$$G'_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{\int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) \cdots q(t_n) e^{iS[q(\tau)]}}{\int \mathcal{D}q(\tau) e^{iS[q(\tau)]}} \quad (1.7.233)$$

en remplaçant, au numérateur et au dénominateur, e^{iS} par

$$e^{iS} = e^{iS_0 + iS_1} = e^{iS_0} [1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} S_1^n] \quad (1.7.234)$$

En divisant numérateur et dénominateur par

$$\int \mathcal{D}q(\tau) e^{iS_0} \quad (1.7.235)$$

on obtient G'_n sous la forme du quotient de deux séries de puissances de λ dont les coefficients sont les fonctions de Green de l'oscillateur linéaire harmonique. Le quotient des deux séries est encore une série de puissances de λ qui, limitée à un ordre fini N , fournit le développement perturbatif de G'_n à cet ordre.

1.7.1 Exemple: $v(q) = \frac{q^4}{4!}$.

Limité au premier ordre en λ ,

a) la fonction de Green à deux points ou propagateur est donné par

$$G'_2(t_1, t_2) = \frac{G_2(t_1, t_2) - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau G_6(t_1, t_2, \tau, \tau, \tau, \tau)}{1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau G_4(\tau, \tau, \tau, \tau)} \quad (1.7.236)$$

$$= G_2(t_1, t_2) - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau [G_6(t_1, t_2, \tau, \tau, \tau, \tau) - G_2(t_1, t_2)G_4(\tau, \tau, \tau, \tau)] + O(\lambda^2)$$

$$= G_2(t_1, t_2) - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau [12G_2(t_1, \tau) G_2(\tau, \tau) G_2(\tau, t_2)] + O(\lambda^2) \quad (1.7.237)$$

que l'on représente par la notation graphique suivante, due à Feynman,

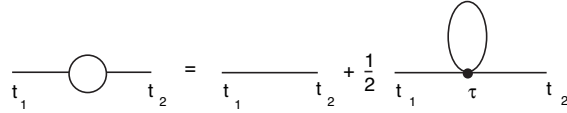


FIG. 1.3 – Propagateur au premier ordre en λ

b) la fonction de Green à quatre points est donnée par

$$G'_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{G_4(t_1, t_2, t_3, t_4) - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau G_8(t_1, t_2, t_3, t_4, \tau, \tau, \tau, \tau)}{1 - i\lambda 4! \int d\tau G_4(\tau, \tau, \tau, \tau)} \quad (1.7.238)$$

$$= G_4(t_1, \dots, t_4) - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau [G_8 - G_4(t_1, \dots, t_4) G_4(\tau, \tau, \tau, \tau)] \quad (1.7.239)$$

c) Jusqu'à l'ordre deux en λ , le propagateur est donné par les diagrammes

La série

$$\frac{\int \mathcal{D}q(\tau) e^{iS_0} [1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau q(\tau)^4 + \dots]}{\int \mathcal{D}q(\tau) e^{iS_0}} \quad (1.7.240)$$

qui constitue le dénominateur commun de toutes les fonctions de Green G'_n a pour représentation graphique

Sa présence a pour effet de supprimer dans la série de diagrammes représentant le numérateur de G'_n , à un ordre donné en λ , tous les diagrammes qui sont des produits de diagrammes d'ordres inférieurs en λ par des diagrammes sans pattes externes. Par exemple, dans G'_2 , au premier ordre, le dénominateur a éliminé le produit

Dans G'_4 , au premier ordre, le dénominateur a fait disparaître les diagrammes de la figure 1.8

Ces diagrammes sans pattes externes sont appelés diagrammes du vide. La remarque que nous venons de faire dans ces cas particuliers est tout à fait générale.

La structure des diagrammes de Feynman est totalement définie par le lagrangien: les règles de Feynman sont résumées dans la figure 1.9

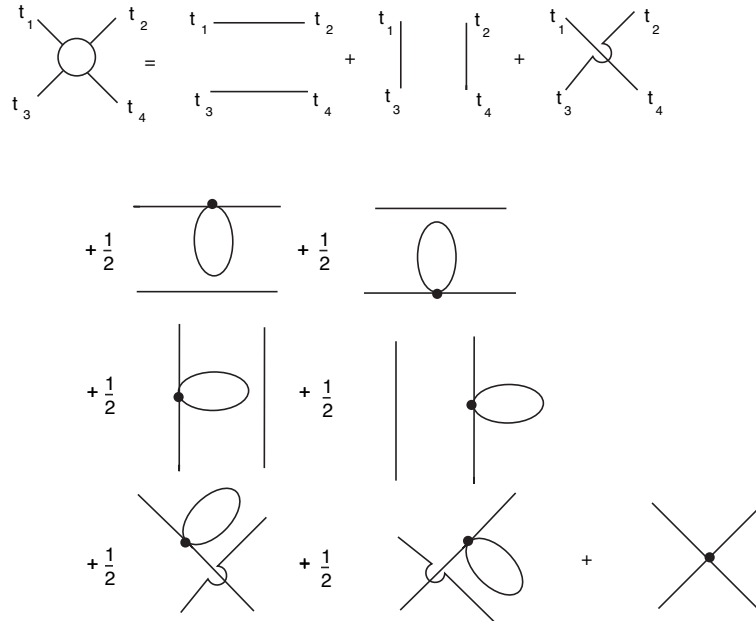


FIG. 1.4 – *Fonction de Green à 4 points*

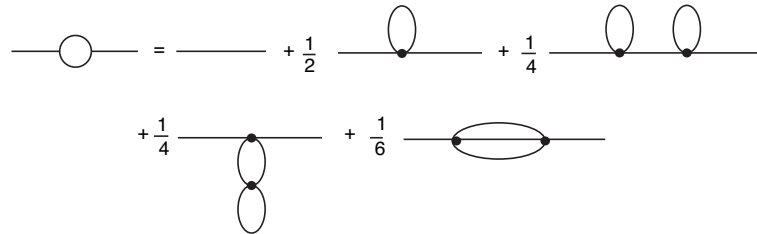


FIG. 1.5 – *Propagateur jusqu'à l'ordre 2*

1.8 Généralisation à N degrés de liberté.

Tout ce qui a été établi dans les paragraphes qui précèdent reste valable pour des systèmes à N degrés de liberté moyennant les remplacements suivants

$$|q\rangle \rightarrow |q_1, \dots, q_N\rangle, \quad |p\rangle \rightarrow |p_1, \dots, p_N\rangle \quad (1.8.241)$$

$$\langle q|p\rangle \rightarrow \langle q_1, \dots, q_N|p_1, \dots, p_N\rangle = \prod_{j=1}^N \left(\frac{e^{i p_j q_j}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right) \quad (1.8.242)$$

$$\mathcal{D}q(\tau) \rightarrow \prod_{i=1}^N \mathcal{D}q_i(\tau) \quad (1.8.243)$$

$$J \rightarrow (J_1, \dots, J_N) \quad (1.8.244)$$

$$1 + \frac{3}{4!} \text{diagram}_1 + \frac{1}{128} \text{diagram}_2 + \frac{1}{16} \text{diagram}_3 + \frac{1}{48} \text{diagram}_4$$

Dénominateur limité à l'ordre 2

FIG. 1.6 – Représentation graphique du dénominateur

$$\frac{1}{8} \text{diagram}_5$$

FIG. 1.7 – Termes de G'_2 éliminés par le dénominateur

$$\frac{3}{4!} \text{diagram}_6 \left[\text{diagram}_7 + \text{diagram}_8 + \text{diagram}_9 \right]$$

FIG. 1.8 – Termes de G'_4 éliminés par le dénominateur



a) la partie quadratique fournit le propagateur libre	
b) l'interaction fournit le vertex	
c) le nombre de pattes du vertex est donné par la puissance de q dans le lagrangien d'interaction	

FIG. 1.9 – Règles de Feynman

Chapitre 2

L'intégrale fonctionnelle pour les champs libres bosoniques.

2.1 Champ scalaire réel libre.

En généralisant les notions précédentes aux cas $N \rightarrow \infty$, on se convainc aisément que l'amplitude de probabilité $K([\phi], t; [\phi_0], t_0)$ de trouver le système dans la configuration ϕ à l'instant t , sachant qu'il était dans la configuration ϕ_0 à l'instant t_0 peut encore s'écrire

$$K([\phi], t; [\phi_0], t_0) = \langle [\phi], t | [\phi_0], t_0 \rangle \quad (2.1.1)$$

$$= \int \prod_{\vec{x}} \mathcal{D}\phi(\vec{x}, \tau) e^{iS[\phi; t_0, t]} \quad (2.1.2)$$

où l'intégrale porte sur toutes les configurations possibles du champ $\phi(\vec{x}, \tau)$, pour $t_0 < \tau < t$, entre $\phi_0(\vec{x}) = \phi(\vec{x}, t_0)$ et $\phi = \phi(\vec{x}, t)$. $S[\phi; t_0, t]$ est l'action du champ scalaire réel libre

$$S[\phi; t_0, t] = \int_{t_0}^t d\tau \int d^3x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2). \quad (2.1.3)$$

Plus intéressantes en T.Q.C. sont les fonctions de Green

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n) | 0 \rangle \quad (2.1.4)$$

où $|0\rangle$ désigne le vide, annihilé par tous les opérateurs de destruction

$$a(\vec{k}, t) |0\rangle = 0. \quad (2.1.5)$$

Ces fonctions de Green admettent une représentation fonctionnelle

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\int \prod_{\vec{x}} \mathcal{D}\phi(\vec{x}, \tau) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{iS[\phi]}}{\int \prod_{\vec{x}} \mathcal{D}\phi(\vec{x}, \tau) e^{iS[\phi]}} \quad (2.1.6)$$

$$= \frac{1}{i^n Z_0[0]} \cdot \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (2.1.7)$$

où $Z[J]$ est la fonctionnelle génératrice

$$Z[J] = \int \prod_{\vec{x}} \mathcal{D}\phi(\vec{x}, \tau) e^{\frac{i}{2} \int d^4x [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 + 2J(x)\phi(x)]} \quad (2.1.8)$$

Comme dans le cas de l'oscillateur linéaire harmonique, l'action étant quadratique en ϕ , la fonctionnelle Z se calcule exactement. Elle vaut

$$Z[J] = Z[0] \cdot e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)}. \quad (2.1.9)$$

Δ_F est le propagateur du champ scalaire de masse m . Les fonctions de Green se calculent par dérivation fonctionnelle de Z par rapport à la source J . Comme pour l'oscillateur harmonique, les fonctions de Green à $2n+1$ points sont nulles, les autres sont des sommes de produits de G_2

$$G_2(x, y) = i\Delta_F(x - y) \quad (2.1.10)$$

$$G_4(x_1, \dots, x_4) = G_2(x_1, x_2)G_2(x_3, x_4) + G_2(x_1, x_3)G_2(x_2, x_4) + G_2(x_1, x_4)G_2(x_2, x_3) \quad (2.1.11)$$

et ainsi de suite.

2.2 Champ scalaire complexe libre.

Le passage du champ scalaire réel libre au champ scalaire complexe libre ne pose pas de difficulté, puisque le champ scalaire complexe équivaut à deux champs scalaires réels de même masse

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) - i\phi_2(x)) \quad (2.2.12)$$

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x)) \quad (2.2.13)$$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi \quad (2.2.14)$$

$$= \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - m^2 \phi_1^2 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 \phi_2^2] \quad (2.2.15)$$

Les fonctions de Green sont

$$G_n(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots) = \langle 0 | T \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}^*(y_1) \dots | 0 \rangle \quad (2.2.16)$$

$$= \frac{1}{i^n Z[0,0]} \frac{\delta^n Z[J, J^*]}{\delta J^*(x_1) \dots \delta J(y_1) \dots} \Big|_{J=J^*=0} \quad (2.2.17)$$

et la fonctionnelle génératrice est ici

$$Z[J, J^*] = \int \prod_{\vec{x}} \mathcal{D}\varphi(\vec{x}, \tau) \mathcal{D}\varphi^*(\vec{x}, \tau) e^{i \int d^4x [\mathcal{L} + J^*(x)\varphi(x) + J(x)\varphi^*(x)]} \quad (2.2.18)$$

$$= Z[0,0] \cdot e^{-i \int d^4x d^4y J^*(x) \Delta_F(x-y) J(y)} \quad (2.2.19)$$

Dans (2.2.18), l'intégrale sur les variables complexes φ, φ^* , pour \vec{x}, τ fixés, n'est autre que l'intégrale dans le plan réel ϕ_1, ϕ_2 en coordonnées isotropes:

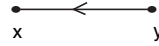
$$d\varphi \wedge d\varphi^* = \frac{1}{2}[d\phi_1 - id\phi_2] \wedge [d\phi_1 + id\phi_2] = id\phi_1 \wedge d\phi_2. \quad (2.2.20)$$

Les seules fonctions de Green non nulles ont un nombre pair de points et contiennent le même nombre d'opérateurs $\hat{\varphi}$ et $\hat{\varphi}^*$:

$$G_2(x, y) = i\Delta_F(x - y) \quad (2.2.21)$$

$$G_4(x_1, x_2, y_1, y_2) = G_2(x_1, y_1)G_2(x_2, y_2) + G_2(x_1, y_2)G_2(x_2, y_1) \quad (2.2.22)$$

et ainsi de suite. Dans la représentation graphique de Feynman, le propagateur $G_2(x, y)$ est représenté par une ligne orientée



2.3 Champ électromagnétique libre.

La définition de l'intégrale fonctionnelle pour le champ électromagnétique pose quelque problème à cause de l'invariance de jauge de l'action

$$S[A_\mu] = S[A] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.3.23)$$

Pour

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \phi, \quad (2.3.24)$$

$$S[A'] = S[A]. \quad (2.3.25)$$

Si on écrit brutalement

$$Z[0] = \int \prod_{\vec{x}} \prod_{\mu} \mathcal{D}A_\mu(\vec{x}, \tau) e^{iS[A]} \quad (2.3.26)$$

en intégrant sur toutes les configurations des potentiels A_μ , la fonction $\exp(iS[A])$ prenant la même valeur pour tous les A_μ qui se déduisent l'un de l'autre par une transformation de jauge, $Z[0]$ est infini; il en est de même de $Z[J_\mu]$. Pour remédier à cet inconvénient, nous suivrons la méthode de Faddeev et Popov.

Représentons symboliquement, sur le dessin ci-dessous, l'ensemble de toutes les configurations possibles des $A_\mu(\vec{x}, \tau)$; et représentons par une ligne horizontale passant par A la classe d'équivalence de A , c'est-à-dire, toutes les configurations qui se déduisent de A par une transformation (2.3.24).

Choisissons une fonction $g(A)$ telle que l'équation $g(A) = 0$ détermine "un et un seul" A dans chaque classe d'équivalence, puis formons la fonctionnelle suivante

$$\Delta_g^{-1}[A] = \int \mathcal{D}\phi(x) \delta[g(A + \partial\phi)]. \quad (2.3.27)$$

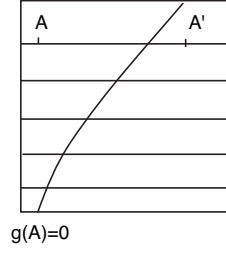


FIG. 2.1 – *Classes d'équivalence de potentiels*

(!Pour être correct, il faudrait définir l'intégrale ci-dessus comme l'intégrale sur le groupe compact U_1 , cela ne nous paraît pas indispensable dans un calcul aussi formel!) La fonctionnelle (2.3.27) est invariante sous les transformations de jauge (2.3.24); en effet, pour ϕ' fixé,

$$\Delta_g^{-1}[A + \partial\phi'] = \int \mathcal{D}\phi(x) \delta[g(A + \partial\phi' + \partial\phi)] \quad (2.3.28)$$

$$= \int \mathcal{D}\phi(x) \delta[g(A + \partial(\phi + \phi'))] \quad (2.3.29)$$

$$= \int \mathcal{D}\phi''(x) \delta[g(A + \partial\phi'')] \quad (2.3.30)$$

$$= \Delta_g^{-1}[A] \quad (2.3.31)$$

Nous avons posé

$$\phi'' = \phi + \phi'. \quad (2.3.32)$$

On en tire aussi

$$1 = \Delta_g[A] \cdot \int \mathcal{D}\phi(x) \delta[g(A + \partial\phi)]. \quad (2.3.33)$$

On peut donc écrire $Z[0]$ comme

$$Z[0] = \int \prod_{\vec{x}} \prod_{\mu} \mathcal{D}A_{\mu}(\vec{x}, \tau) e^{iS[A]} 1 \quad (2.3.34)$$

$$= \int \prod_{\vec{x}} \prod_{\mu} \mathcal{D}A_{\mu}(\vec{x}, \tau) e^{iS[A]} \Delta_g[A] \cdot \int \mathcal{D}\phi(x) \delta[g(A + \partial\phi)] \quad (2.3.35)$$

$$= \int \mathcal{D}\phi(x) \int \prod_{\vec{x}} \prod_{\mu} \mathcal{D}A_{\mu}(\vec{x}, \tau) e^{iS[A]} \Delta_g[A] \delta[g(A + \partial\phi)] \quad (2.3.36)$$

où l'on a hardiment permuté l'ordre des intégrations. Effectuons ensuite le changement de variables d'intégration

$$A'_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}\phi, \quad \mathcal{D}A'_{\mu} = \mathcal{D}A_{\mu} \quad (2.3.37)$$

$$S[A'] = S[A], \quad \Delta_g[A'] = \Delta_g[A] \quad (2.3.38)$$

il vient donc

$$Z[0] = \int \mathcal{D}\phi(x) \int \prod_{\vec{x}} \prod_{\mu} \mathcal{D}A'_{\mu}(\vec{x}, \tau) e^{iS[A']} \Delta_g[A'] \delta[g(A')]. \quad (2.3.39)$$

L'intégrale

$$\int \prod_{\vec{x}} \prod_{\mu} \mathcal{D}A'_{\mu}(\vec{x}, \tau) e^{iS[A']} \Delta_g[A'] \delta[g(A')] \quad (2.3.40)$$

est indépendante de ϕ , de sorte que $Z[0]$ se trouve factorisé en

$$Z[0] = \mathcal{V} \cdot \int \prod_{\vec{x}} \prod_{\mu} \mathcal{D}A_{\mu}(\vec{x}, \tau) e^{iS[A]} \Delta_g[A] \delta[g(A)] \quad (2.3.41)$$

où

$$\mathcal{V} = \int \mathcal{D}\phi(x) \quad (2.3.42)$$

est une constante et peut rejoindre un facteur de normalisation dans Z et être ensuite oubliée dans le calcul des fonctions de Green. Il reste à calculer $\Delta_g[A]$: pour A fixé, $g(A + \partial\phi) = \tilde{g}(\phi)$ donc, en changeant dans (2.3.27) de variables d'intégration $\phi \rightarrow g$, il vient

$$\Delta_g^{-1}[A] = \int \mathcal{D}g \det \left| \frac{\delta\phi}{\delta g} \right| \delta(g) \quad (2.3.43)$$

$$= \det \left| \frac{\delta\phi}{\delta g} \right|_{g=0} \quad (2.3.44)$$

Donc

$$\Delta_g[A] = \det \left| \frac{\delta g(A + \partial\phi)}{\delta\phi} \right|_{g=0} \quad (2.3.45)$$

supposé non nul dès le départ. Il vient donc encore

$$Z[0] = \mathcal{V} \cdot \int \prod_{\vec{x}} \prod_{\mu} \mathcal{D}A_{\mu}(\vec{x}, \tau) e^{iS[A]} \det \left| \frac{\delta g(A + \partial\phi)}{\delta\phi} \right|_{g=0} \delta[g(A)]. \quad (2.3.46)$$

Si $g(A)$ est une fonction linéaire de A , $g(A + \partial\phi)$ est linéaire en ϕ , donc

$$\det \left| \frac{\delta g(A + \partial\phi)}{\delta\phi} \right|_{g=0} \quad (2.3.47)$$

est une constante (indépendante de A) qui peut rejoindre \mathcal{V} dans le facteur de normalisation de Z . Dans ce cas,

$$Z[0] = \mathcal{N} \cdot \int \prod_{\vec{x}} \prod_{\mu} \mathcal{D}A_{\mu}(\vec{x}, \tau) e^{iS[A]} \delta[g(A)]. \quad (2.3.48)$$

Exemple:

$$g(A)_x = \partial_{\mu} A^{\mu}(x) - c(x) \quad (2.3.49)$$

$$g(A + \partial\phi)_x = \partial_\mu A^\mu(x) + \square\phi(x) - c(x) \quad (2.3.50)$$

et

$$\delta g(A + \partial\phi)_x \delta\phi(y) = \square\delta^4(x - y). \quad (2.3.51)$$

Avec le choix (2.3.49) de la fonction de fixation de la jauge, la fonctionnelle (2.3.48) ne dépend pas de $c(x)$: en effet, $c(x)$ disparaît totalement de (2.3.48) par le changement de variables d'intégration

$$A_\mu = A'_\mu + \partial_\mu\phi, \quad \square\phi = c. \quad (2.3.52)$$

Il s'en suit que l'on ne fait que multiplier (2.3.48) par un facteur constant si on l'intègre par

$$\int \mathcal{D}c(x) e^{-i\frac{\lambda}{2} \int d^4x c^2(x)}. Z[0]. \quad (2.3.53)$$

Mais alors, on obtient

$$Z[0] = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}c(x) e^{-i\frac{\lambda}{2} \int d^4x c^2(x)} \int \mathcal{D}A_\mu(\vec{x}, \tau) e^{iS[A]} \delta[\partial_\mu A^\mu(x) - c(x)] \quad (2.3.54)$$

$$= \mathcal{N}' \int \mathcal{D}A_\mu(\vec{x}, \tau) e^{iS[A]} e^{-i\frac{\lambda}{2} \int d^4x (\partial_\mu A^\mu(x))^2} \quad (2.3.55)$$

$$= \mathcal{N}' \int \mathcal{D}A_\mu(x) e^{i \int d^4x [-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu(x))^2]} \quad (2.3.56)$$

L'intégrale fonctionnelle (2.3.56) porte sur toutes les configurations possibles de A_μ , mais l'action invariante de jauge a été modifiée par l'addition d'un terme qui n'est pas invariant de jauge. Notons que sous la forme (2.3.56) c'est toujours l'intégrale de l'exponentielle d'une fonction quadratique des A_μ . On peut encore l'écrire sous la forme

$$Z[0] = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}A_\mu(x) e^{\frac{i}{2} \int d^4x d^4y A_\mu(x) M^{\mu\nu}(x, y) A_\nu(y)} \quad (2.3.57)$$

avec le noyau-distribution

$$M_{\mu\nu}(x, y) = M_{\nu\mu}(y, x) = [g_{\mu\nu}\square - (1 - \lambda)\partial_\mu\partial_\nu]\delta^4(x - y). \quad (2.3.58)$$

Pour toute valeur non nulle de λ , le déterminant de l'opérateur $[g_{\mu\nu}\square - (1 - \lambda)\partial_\mu\partial_\nu]$ est non nul, et $[M_{\mu\nu}(x, y)]^{-1}$ existe.

Si $J_\mu(x)$ désigne une source vectorielle arbitraire, la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green du champ électromagnétique libre peut donc encore être définie par

$$Z[J_\mu] = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}A_\mu(x) e^{\frac{i}{2} \int d^4x d^4y [A_\mu(x) M^{\mu\nu}(x, y) A_\nu(y) + 2J^\mu(x)\delta^4(x-y)A_\mu(y)]} \quad (2.3.59)$$

$$= Z[0]. e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^\mu(x) D_{\mu\nu}^F(x-y) J^\nu(y)} \quad (2.3.60)$$

où $D_{\mu\nu}^F(x - y)$ est le propagateur de Feynman du champ électromagnétique, inverse du noyau $M^{\mu\nu}(x - y)$; il est donné par

$$D_{\mu\nu}^F(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot (x-y)} \left[\frac{-g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} - \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + i\epsilon)^2} \right]. \quad (2.3.61)$$

Il dépend de λ , mais on peut montrer que les amplitudes de probabilité de transition qu'il permet de construire n'en dépendent pas. Les choix ($\lambda = 1$) et ($\lambda = \infty$) simplifient grandement ce propagateur; ces choix sont connus, dans la littérature, respectivement comme de jauge de Feynman et jauge de Landau.

Les fonctions de Green du champ électromagnétique libre se déduisent de (2.3.60) par dérivations fonctionnelles par rapport à la source $J_\mu(x)$; comme dans le cas du champ scalaire réel libre, les seules fonctions de Green non nulles sont des sommes de produits de

$$G_{\mu\nu}^{(2)}(x,y) = \langle 0|T\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(y)|0 \rangle = iD_{\mu\nu}^F(x-y). \quad (2.3.62)$$

Chapitre 3

L'intégrale fonctionnelle pour les champs fermioniques.

La généralisation de l'intégrale fonctionnelle aux systèmes de bosons s'est faite sans peine, en passant de 1 à N degrés de liberté, puis en passant formellement à la limite $N \rightarrow \infty$. Mis à part le nombre croissant de degrés de liberté, les hypothèses fondamentales sur lesquelles repose la construction de l'intégrale fonctionnelle étaient les mêmes. Tout change pour des systèmes de fermions. Si on peut toujours décrire un tel système avec un opérateur hamiltonien autoadjoint $\hat{H}(\hat{q}^k, \hat{p}_k)$, les opérateurs \hat{q} et \hat{p} sont, à présent, des opérateurs qui, à temps égaux, vérifient des relations d'anticommutation canoniques

$$[\hat{q}^k(t), \hat{q}^l(t)]_+ = 0 = [\hat{p}_k(t), \hat{p}_l(t)]_+, \quad [\hat{q}^k(t), \hat{p}_l(t)]_+ = i(\hbar)\delta_l^k. \quad (3.0.1)$$

Il est cependant possible d'élaborer un formalisme d'intégration fonctionnelle pour de tels systèmes, à la condition de voir les variables classiques correspondantes comme les éléments d'une algèbre de Grassmann.

3.1 Algèbre de Grassmann.

Définition 1. *L'algèbre de Grassmann \mathcal{G}_n sur \mathbb{C} à n générateurs est l'algèbre des polynômes à coefficients complexes, en les variables $(\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n)$ soumises aux relations*

$$\psi^k \psi^l = -\psi^l \psi^k \quad (3.1.2)$$

pour tout couple d'indices k, l .

Chaque variable est donc de carré nul. \mathcal{G}_n est un espace vectoriel de dimension 2^n sur \mathbb{C} . Une base de \mathcal{G}_n est fournie par les monômes $1, \psi^k, \psi^k \psi^l (k < l), \dots, \psi^1 \psi^2 \dots \psi^n$. Un élément de \mathcal{G}_n s'écrit comme

$$\Phi(\psi) = a_0 + a_k \psi^k + a_{kl} \psi^k \psi^l + \dots + a_{i_1 \dots i_n} \psi^{i_1} \dots \psi^{i_n} \quad (3.1.3)$$

où les coefficients $a_{ij\dots}$ sont supposés complètement antisymétriques en leurs indices. \mathcal{G}_n est isomorphe à l'algèbre extérieure des formes différentielles.

L'algèbre de Grassmann infini-dimensionnelle s'obtient comme la limite $n \rightarrow \infty$ de \mathcal{G}_n . Elle possède une infinité de générateurs.

On peut définir une dérivée à gauche $\partial^g \Phi \partial \psi^k$ et une dérivée à droite $\partial^d \Phi \partial \psi^k$, qui sont des opérations linéaires sur \mathcal{G}_n .

Définition 2. *Sur les monômes de base, la dérivée à gauche est définie par :*

$$\frac{\partial^g}{\partial \psi^k} \psi^1 \dots \psi^k \dots \psi^l = (-)^{P_g} \psi^1 \dots \hat{\psi}^k \dots \psi^l \quad (3.1.4)$$

où P_g désigne le nombre de transpositions à effectuer pour amener l'élément ψ^k à gauche dans le monôme. La notation $\hat{\psi}^k$ signifie que ψ^k doit être omis.

Définition 3. *De la même façon, on définit la dérivée à droite par*

$$\frac{\partial^d}{\partial \psi^k} \psi^1 \dots \psi^k \dots \psi^l = (-)^{P_d} \psi^1 \dots \hat{\psi}^k \dots \psi^l \quad (3.1.5)$$

où P_d désigne le nombre de transpositions à effectuer pour amener l'élément ψ^k à droite dans le monôme.

Si le monôme ne contient pas ψ^k , la dérivée à gauche ou à droite est nulle. La dérivée de Φ est définie par linéarité.

Exemples:

$$\frac{\partial^g}{\partial \psi^1} \psi^1 \psi^2 \psi^3 = \psi^2 \psi^3 = \frac{\partial^d}{\partial \psi^1} \psi^1 \psi^2 \psi^3 \quad (3.1.6)$$

$$\frac{\partial^g}{\partial \psi^2} \psi^1 \psi^2 \psi^3 = -\psi^1 \psi^3 \quad (3.1.7)$$

Définition 4. *Parité grassmannienne: Si Φ ne contient que des monômes pairs en les ψ^k , Φ est de parité grassmannienne (+) = $(-1)^{\epsilon(\Phi)}$, $\epsilon(\Phi) = 0 \pmod{2}$; si Φ ne contient que des monômes impairs en les ψ^k , Φ est de parité grassmannienne (-) = $(-1)^{\epsilon(\Phi)}$, $\epsilon(\Phi) = 1 \pmod{2}$.*

Si Φ_1 et Φ_2 ont des parités déterminées,

$$\Phi_1 \cdot \Phi_2 = (-)^{\epsilon_1 \epsilon_2} \Phi_2 \cdot \Phi_1. \quad (3.1.8)$$

Tout élément de \mathcal{G}_n est la somme d'un élément pair et d'un élément impair:

$$\Phi = \Phi_E + \Phi_O. \quad (3.1.9)$$

(E = "even" = pair; O = "odd" = impair).

Théorème 3. *Règle de Leibniz: Pour Φ_1 de parité grassmannienne fixée $(-1)^{\epsilon_1}$, on a la règle de Leibniz suivante*

$$\frac{\partial^g}{\partial \psi^k} (\Phi_1 \cdot \Phi_2) = \left(\frac{\partial^g}{\partial \psi^k} \Phi_1 \right) \cdot \Phi_2 + (-1)^{\epsilon_1} \Phi_1 \left(\frac{\partial^g}{\partial \psi^k} \Phi_2 \right) \quad (3.1.10)$$

$$\frac{\partial^d}{\partial \psi^k} (\Phi_2 \cdot \Phi_1) = \left((-1)^{\epsilon_1} \frac{\partial^d}{\partial \psi^k} \Phi_2 \right) \cdot \Phi_1 + \Phi_2 \left(\frac{\partial^d}{\partial \psi^k} \Phi_1 \right) \quad (3.1.11)$$

En particulier, pour $\Phi = \psi^k$, impair,

$$\frac{\partial^g}{\partial \psi^k}(\psi^k \cdot \Phi) = \Phi - \psi^k \left(\frac{\partial^g}{\partial \psi^k} \Phi \right) \quad (3.1.12)$$

(ici, il n'y a pas de sommation sur k). On en tire évidemment, puisque ceci est valable pour tout Φ ,

$$\left[\frac{\partial^g}{\partial \psi^k}, \psi^k \right]_+ = 1 \quad (3.1.13)$$

où encore

$$\left[\frac{\partial^g}{\partial \psi^k}, \psi^l \right]_+ = \delta_k^l \quad (3.1.14)$$

On vérifie immédiatement que ceci est vrai aussi pour la dérivée droite. On vérifiera aussi aisément que

$$\left[\frac{\partial^g}{\partial \psi^k}, \frac{\partial^g}{\partial \psi^l} \right]_+ = 0 \quad (3.1.15)$$

de même pour les dérivées droites. L'algèbre de Grassmann est donc l'espace vectoriel d'une représentation des relations d'anticommutation canoniques.

Définition 5. *Les différentielles à gauche et à droite sont définies respectivement par*

$$d^g \Phi = d\psi^k \cdot \left[\frac{\partial^g}{\partial \psi^k} \Phi \right] \quad (3.1.16)$$

$$d^d \Phi = \left[\frac{\partial^d}{\partial \psi^k} \Phi \right] \cdot d\psi^k \quad (3.1.17)$$

Définition 6. *Conjugaison complexe: il est utile de généraliser le concept de conjugaison complexe (involution) pour avoir l'analogue classique de la conjugaison hermitienne des opérateurs. Ses propriétés sont*

$$(\Phi \Psi)^* = \Psi^* \Phi^* \quad (3.1.18)$$

$$(\Phi^*)^* = \Phi \quad (3.1.19)$$

$$(a\Phi) = a^* \Phi^* \quad (3.1.20)$$

Une variable est dite réelle si $\Phi^* = \Phi$ et imaginaire si $\Phi^* = -\Phi$.

Notons que si Φ_1 et Φ_2 sont impaires et réelles leur produit est imaginaire.

3.2 L'intégrale de Berezin.

L'intégrale de Berezin est définie par les règles suivantes:

1) pour les intégrales simples, (sans sommation sur k)

$$\int d\psi^k = 0, \quad \int d\psi^k \psi^k = 1. \quad (3.2.21)$$

2) les intégrales multiples sont définies comme produits d'intégrales simples, par exemple

$$\int d\psi^2 d\psi^1 = 0, \quad (3.2.22)$$

$$\int d\psi^2 d\psi^1 \psi^1 = 0, \quad (3.2.23)$$

$$\int d\psi^2 d\psi^1 \psi^2 = 0, \quad (3.2.24)$$

$$\int d\psi^2 d\psi^1 \psi^1 \psi^2 = 1 \quad (3.2.25)$$

3) ceci définit l'intégrale sur les éléments de la base de l'algèbre, elle s'étend à tous les éléments de \mathcal{G}_n par linéarité. Ainsi, par exemple pour (3.1.3),

$$\int d\psi^n d\psi^{n-1} \dots d\psi^1 \Phi(\psi) = a_{12\dots n}. \quad (3.2.26)$$

Cette intégrale est invariante par translations, par exemple

$$\int d\psi^1 (\psi^1 + \psi^2) = \int d(\psi^1 + \psi^2) (\psi^1 + \psi^2) = 1. \quad (3.2.27)$$

Mais, pour une homothétie $\psi'^1 = a\psi^1$, pour avoir l'égalité

$$\int d\psi'^1 \psi'^1 = \int d\psi^1 \psi^1 = 1, \quad (3.2.28)$$

on voit qu'il faut définir

$$d(a\psi) = \frac{1}{a} d\psi. \quad (3.2.29)$$

De façon générale, pour les changements de variables linéaires

$$\psi'^k = M_l^k \psi^l, \quad (3.2.30)$$

où M est inversible, on a

$$d\psi'^k = [M^{-1}]_l^k d\psi^l \quad (3.2.31)$$

et

$$\int d\psi^n d\psi^{n-1} \dots d\psi^1 \Phi(\psi) = \int d\psi'^n d\psi'^{n-1} \dots d\psi'^1 \Phi(\psi(\psi')) (\det M)^{-1}. \quad (3.2.32)$$

Un exemple intéressant est celui de l'intégrale "gaussienne"

$$I(M) = \int d\psi^n d\psi^{n-1} \dots d\psi^1 e^{\psi^T M \psi} \quad (3.2.33)$$

où M est une matrice antisymétrique. Comme pour les variables réelles, l'exponentielle d'une somme de variables paires est le produit des exponentielles, et chacune d'elles est

définie par son développement en série, limité à un polynôme, du fait que les carrés sont nuls. Il existe une transformation orthogonale O , de déterminant 1, telle que

$$M' = OMO^T = \begin{pmatrix} 0 & m_1 & 0 & 0 & \dots \\ -m_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & \dots \\ 0 & 0 & -m_2 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix} \quad (3.2.34)$$

Avec

$$\beta = O\psi, \quad \beta^T = \psi^T O^T \quad (3.2.35)$$

$$d\psi^n d\psi^{n-1} \dots d\psi^1 = d\beta^n d\beta^{n-1} \dots d\beta^1 \quad (3.2.36)$$

et l'exposant devient

$$\psi^T M \psi = \psi^T O^T O M O^T O \psi \quad (3.2.37)$$

$$= \beta^T M' \beta \quad (3.2.38)$$

$$= 2(m_1 \beta^1 \beta^2 + m_2 \beta^3 \beta^4 + \dots + m_{\frac{n}{2}} \beta^{n-1} \beta^n) \text{ pour } n \text{ pair} \quad (3.2.39)$$

$$= 2(m_1 \beta^1 \beta^2 + m_2 \beta^3 \beta^4 + \dots + m_{\frac{n-1}{2}} \beta^{n-2} \beta^{n-1}) \text{ pour } n \text{ impair} \quad (3.2.40)$$

Pour n impair, $I(M)$ est nulle car β^n n'est pas dans l'exposant; pour n pair, on trouve

$$I(M) = 2^{\frac{n}{2}} m_1 \dots m_{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det M}. \quad (3.2.41)$$

Cette réponse est valable pour tout n , puisque dans le cas où n est impair, $\det M = 0$.

On a aussi

$$\int d\psi^n d\psi^{n-1} \dots d\psi^1 e^{\psi^T M \psi} e^{2\alpha^T \psi} = I(M) \cdot e^{\alpha^T M^{-1} \alpha}. \quad (3.2.42)$$

En effet, le changement de variables d'intégration par translation

$$\psi' = \psi - M^{-1} \alpha, \quad \psi'^T = \psi^T + \alpha^T M^{-1} \quad (3.2.43)$$

transforme l'exposant en

$$\psi^T M \psi + \alpha^T \psi - \psi^T \alpha = \psi'^T M \psi' + \alpha^T M^{-1} \alpha. \quad (3.2.44)$$

Pour n pair, $n = 2N$, avec les générateurs $\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n$ et $\psi^{n+1} = (\psi^1)^*, \psi^{n+2} = (\psi^2)^*, \dots, \psi^{2N} = (\psi^n)^*$ et M hermitienne, on obtient

$$J(M) = \int \prod_k [d\psi^k d\psi^{k*}] e^{\psi^+ M \psi} \quad (3.2.45)$$

$$= \det M \quad (3.2.46)$$

En effet, il existe une transformation unitaire U , de déterminant 1, qui diagonalise M

$$UMU^+ = M' = \text{diag}(m_1, \dots, m_n) \quad (3.2.47)$$

avec m_i réels. Alors

$$\psi^+ M \psi = \psi^+ U^+ U M U^+ U \psi = \beta^+ M' \beta = \sum_k m_k \beta^{k*} \beta^k \quad (3.2.48)$$

pour

$$\beta = U \psi, \quad \beta^+ = \psi^+ U^+. \quad (3.2.49)$$

Donc,

$$J(M) = \prod_k m_k = \det M. \quad (3.2.50)$$

Tandis que

$$\int \prod_k [d\psi^k d\psi^{k*}] e^{\psi^+ M \psi + \alpha^+ \psi + \psi^+ \alpha} = J(M) \cdot e^{-\alpha^+ M^{-1} \alpha}. \quad (3.2.51)$$

On obtient ce résultat en introduisant dans le membre de gauche le changement de variables

$$\psi' = \psi + M^{-1} \alpha, \quad \psi'^+ = \psi^+ + \alpha^+ M^{-1}. \quad (3.2.52)$$

3.3 Les fantômes de Faddéev-Popov.

Dans la définition de l'intégrale fonctionnelle pour le champ électromagnétique libre, nous avons vu que pour un choix arbitraire de fonction de fixation de la jauge, $g(A)$, la fonctionnelle $Z[J]$ contient, sous le signe intégrale le déterminant $|\frac{\delta g}{\delta \phi}|_{g=0}$. Or, nous venons de voir qu'il est possible de représenter le déterminant d'une matrice par une intégrale portant sur des variables grassmanniennes. A un facteur constant près, qui sera sans importance dans la suite,

$$\det \frac{\delta g(x)}{\delta \phi(y)} \Big|_{g=0} = \det M(x,y) = \text{const.} \int \prod_x [d\eta(x) d\eta^*(x)] e^{-i \int d^4x d^4y \eta^*(x) M(x,y) \eta(y)} \quad (3.3.53)$$

Exemple: pour $g(A)_x = \partial_\mu A^\mu(x) - c(x)$, $M(x,y) = \square \delta^4(x-y)$ et

$$\int d^4x d^4y \eta^*(x) M(x-y) \eta(y) = - \int d^4x \partial_\mu \eta^* \partial^\mu \eta. \quad (3.3.54)$$

Les variables $\eta(x), \eta^*(x)$ sont des champs grassmanniens anticommutants, scalaires sous les transformations du groupe de Poincaré. Par le fait qu'ils ne respectent pas la correspondance spin-statistique (ce sont des fermions de spin zéro!) ils sont appelés fantômes ("ghosts"). Ce sont les fantômes de Faddéev-Popov. Dans le cadre de l'électrodynamique, les choix $g(A)$ linéaires en A ne nécessitent pas l'introduction de ces fantômes: on peut les introduire si l'on veut, mais comme la matrice $M(x,y)$ ne dépend pas de A , les fantômes ne sont pas couplés au potentiel électromagnétique. Il n'en va plus de même dans les théories de jauge non-abéliennes à la Yang-Mills, sauf dans la jauge axiale.

3.4 Intégrale fonctionnelle pour le champ spinoriel libre.

Par analogie avec l'intégrale fonctionnelle des champs bosoniques, nous écrivons la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green du champ spinoriel libre comme

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\psi(x) \mathcal{D}\bar{\psi}(x) e^{i \int d^4x [\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi) + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta]} \quad (3.4.55)$$

où $\psi(x)$ et $\bar{\psi}(x)$ sont traités comme des champs grassmanniens complexes, de même que les sources $\eta(x)$ et $\bar{\eta}(x)$. A l'aide du noyau-distribution

$$M(x, y) = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\delta^4(x - y), \quad (3.4.56)$$

l'exposant se récrit comme

$$i \int d^4x [\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi) + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta] = \quad (3.4.57)$$

$$= i \int d^4x d^4y [\bar{\psi}(x)M(x, y)\psi(y) + \bar{\eta}(x)\delta^4(x - y)\psi(y) + \bar{\psi}(x)\delta^4(x - y)\eta(y)]. \quad (3.4.58)$$

L'application de la formule (3.2.51) fournit

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = Z[0, 0] \cdot e^{-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x)M^{-1}(x, y)\eta(y)} \quad (3.4.59)$$

où

$$M^{-1}(x, y) = S_F(x - y). \quad (3.4.60)$$

C'est le propagateur de Feynman du champ spinoriel libre. Les fonctions de Green s'obtiennent par dérivation fonctionnelle de Z par rapport aux sources. Ainsi,

$$G_2(x, y) = \langle 0 | T \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) | 0 \rangle \quad (3.4.61)$$

$$= \frac{1}{i^2 Z[0, 0]} \cdot \frac{\delta^g}{\delta \bar{\eta}(x)} \frac{\delta^d}{\delta \eta(y)} Z[\eta, \bar{\eta}] |_{\eta=\bar{\eta}=0}. \quad (3.4.62)$$

$$= i S_F(x - y) \quad (3.4.63)$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{\gamma^\mu k_\mu + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.4.64)$$

Comme pour tout champ libre, les autres fonctions de Green non nulles sont des sommes algébriques de produits de G_2 : par exemple

$$G_4(x_1, x_2, y_1, y_2) = -G_2(x_1, y_1)G_2(x_2, y_2) + G_2(x_1, y_2)G_2(x_2, y_1). \quad (3.4.65)$$

Le signe devant chacun des termes du membre de droite est égal à $(-)^p$ où p est la parité de la permutation qu'il faut effectuer pour amener les arguments de G_4 dans l'ordre voulu par la répartition en paires.

3.5 Intégrale fonctionnelle de QED.

Les fonctions de Green du système couplé électrons-photons s'obtiennent comme dérivées fonctionnelles par rapport aux sources $\eta, \bar{\eta}, J_\mu$ de la fonctionnelle génératrice

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{i \int d^4x [\mathcal{L} + J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta]} \quad (3.5.66)$$

où

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu. \quad (3.5.67)$$

Leurs développements perturbatifs sont donnés par les diagrammes de Feynman construits à l'aide des éléments suivants

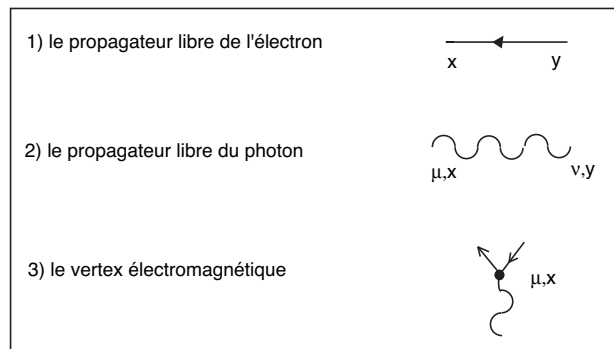


FIG. 3.1 – Règles de Feynman de QED

Chapitre 4

Formules de Réduction

Dans ce chapitre, nous allons établir les formules qui permettent de relier les amplitudes de probabilités de transition aux fonctions de Green des champs en interaction.

4.1 Champs scalaires.

4.1.1 Champ scalaire réel: particules neutres de spin zéro.

Pour établir cette formule, rappelons que l'espace des solutions (complexes) de l'équation de Klein-Gordon peut être équipé d'une forme sesquilineaire:

$$(\phi, \psi)(t) = i \int_{x^0=t} d^3x [\phi^*(\vec{x}, x^0) \partial_0 \psi(\vec{x}, x^0) - (\partial_0 \phi^*(\vec{x}, x^0)) \psi(\vec{x}, x^0)] \quad (4.1.1)$$

qui est telle que

$$\partial_t (\phi, \psi)(t) = 0 \quad (4.1.2)$$

en vertu de l'équation de K.G., si les solutions décroissent rapidement à l'infini (ce qui permet une intégration par parties, sans terme aux limites). Si on note

$$f_{\vec{k}}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{-ik \cdot x} \quad (4.1.3)$$

la fonction d'onde d'une particule d'impulsion \vec{k} et d'énergie ω_k positive et

$$f_{\vec{k}}^*(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{ik \cdot x}, \quad (4.1.4)$$

il vient, en négligeant les contributions aux limites,

$$(f_{\vec{k}}, f_{\vec{l}}) = \delta^3(\vec{k} - \vec{l}) \quad (4.1.5)$$

$$(f_{\vec{k}}^*, f_{\vec{l}}^*) = -\delta^3(\vec{k} - \vec{l}) \quad (4.1.6)$$

$$(f_{\vec{k}}^*, f_{\vec{l}}) = 0 \quad (4.1.7)$$

On en tire, pour les champs libres asymptotiques

$$\phi_{in,out}(x) = \int d^3k [a_{in,out}(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x) + a_{in,out}^+(\vec{k}) f_{\vec{k}}^*(x)] \quad (4.1.8)$$

$$a_{in,out}(\vec{k}) = (f_{\vec{k}}, \phi_{in,out}) \quad (4.1.9)$$

$$a_{in,out}^+(\vec{k}) = -(f_{\vec{k}}^*, \phi_{in,out}) \quad (4.1.10)$$

Considérons l'élément de matrice S

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, out | \alpha, in \rangle \quad (4.1.11)$$

et isolons dans l'état initial une particule d'impulsion \vec{p} de sorte que

$$|\alpha, in \rangle = a_{in}^+(\vec{p}) |\alpha', in \rangle. \quad (4.1.12)$$

On peut récrire cet élément de matrice S comme

$$\langle \beta, out | a_{in}^+(\vec{p}) |\alpha', in \rangle = \langle \beta, out | [(a_{in}^+(\vec{p}) - a_{out}^+(\vec{p})) + a_{out}^+(\vec{p})] |\alpha', in \rangle. \quad (4.1.13)$$

Dans le troisième terme du membre de droite, on peut regarder l'action à gauche de l'opérateur $a_{out}^+(\vec{p})$ sur l'état $\langle \beta, out |$: cet opérateur détruit une particule d'impulsion \vec{p} de l'ensemble β . Si cet ensemble ne contient pas de particule d'impulsion \vec{p} , ce que nous supposons ici, sa contribution est nulle. Il ne reste donc que les deux premiers termes du membre de droite de (4.1.13) dans lesquels nous pouvons remplacer les opérateurs $a_{in,out}^+$ en termes des champs asymptotiques correspondants pour obtenir

$$(4.1.13) = -(f_{\vec{p}}^*, \langle \beta, out | [\phi_{in}(x) - \phi_{out}(x)] |\alpha', in \rangle) \quad (4.1.14)$$

$$= \left(\lim_{x^0 \rightarrow +\infty} - \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \right) (f_{\vec{p}}^*, \langle \beta, out | \phi(x) |\alpha', in \rangle) \quad (4.1.15)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 \frac{d}{dx^0} (f_{\vec{p}}^*, \langle \beta, out | \phi(x) |\alpha', in \rangle) \quad (4.1.16)$$

La fonction $f_{\vec{p}}(x)$ étant solution de l'équation de K.G., elle satisfait

$$\partial_{x^0}^2 f_{\vec{p}}(x) = (\Delta - m^2) f_{\vec{p}}(x) \quad (4.1.17)$$

ce qui permet de compléter (4.1.16) en

$$i \int d^4x f_{\vec{p}}(x) K_x \langle \beta, out | \phi(x) |\alpha', in \rangle \quad (4.1.18)$$

où nous avons utilisé la notation

$$K_x = \square_x + m^2. \quad (4.1.19)$$

Ainsi donc, l'élimination d'une particule d'impulsion \vec{p} de l'état initial conduit à l'égalité suivante:

$$\langle \beta, out | \alpha, in \rangle = i \int d^4x f_{\vec{p}}(x) K_x \langle \beta, out | \phi(x) |\alpha', in \rangle. \quad (4.1.20)$$

Continuons le processus d'élimination des particules des états initial et final, en isolant une particule d'impulsion \vec{q} dans l'état final:

$$\langle \beta, out | = \langle \beta', out | a_{out}(\vec{q}). \quad (4.1.21)$$

Alors,

$$\langle \beta, out | \phi(x) | \alpha', in \rangle = \langle \beta', out | a_{out}(\vec{q}) \phi(x) | \alpha', in \rangle \quad (4.1.22)$$

$$= \langle \beta', out | [(a_{out}(\vec{q}) \phi(x) - \phi(x) a_{in}(\vec{q})) + \phi(x) a_{in}(\vec{q})] | \alpha', in \rangle \quad (4.1.23)$$

Dans le troisième terme du membre de droite de (4.1.23), l'opérateur $a_{in}(\vec{q})$ agissant à droite, détruit dans $|\alpha', in \rangle$ une particule d'impulsion \vec{q} . Comme précédemment, nous supposons que l'ensemble α' ne contient pas de particule d'impulsion \vec{q} ; la contribution de ce terme est donc réduite à zéro. Il ne reste donc dans le membre de droite de (4.1.23) que les deux premiers termes dans lesquels les opérateurs $a_{in, out}$ peuvent être écrits en termes des champs asymptotiques correspondants. Il vient donc

$$(4.1.23) = (f_{\vec{q}}(y), \langle \beta', out | [\phi_{out}(y) \phi(x) - \phi(x) \phi_{in}(y)] | \alpha', in \rangle) \quad (4.1.24)$$

$$= \left(\lim_{y^0 \rightarrow +\infty} - \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \right) (f_{\vec{q}}(y), T(\phi(y) \phi(x)) | \alpha', in \rangle) \quad (4.1.25)$$

$$= i \int d^4 y f_{\vec{q}}(y)^* K_y \langle \beta', out | T(\phi(y) \phi(x)) | \alpha', in \rangle \quad (4.1.26)$$

Cette technique de réduction s'applique de proche en proche jusqu'à ce que l'état initial et l'état final soient complètement vidés de leurs particules. Le résultat final est, lorsque tous les \vec{p}_j sont différents de tous les \vec{q}_i :

$$\langle \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n, out | | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m, in \rangle = i^{m+n} \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \int d^4 x_i \int d^4 y_j \quad (4.1.27)$$

$$[f_{\vec{p}_i}(x_i) K_{x_i}] [f_{\vec{q}_j}^*(y_j) K_{y_j}] \langle 0 | T(\phi(y_1) \dots \phi(y_n) \phi(x_1) \dots \phi(x_m)) | 0 \rangle. \quad (4.1.28)$$

Cette formule (4.1.28), appelée formule de réduction, relie donc l'amplitude de probabilité de transition de l'état initial $|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m, in \rangle$ vers l'état final $|\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n, out \rangle$ à la fonction de Green à $(m+n)$ points du champ scalaire en interaction dont le développement perturbatif est fourni par l'intégrale fonctionnelle. L'amplitude de probabilité de transition admet donc un développement perturbatif copié sur celui des fonctions de Green. Les diagrammes de Feynman qui sont associés aux deux développements sont les mêmes; seule change la convention des pattes externes. Pour les fonctions de Green, les pattes externes portent des propagateurs libres $i\Delta_F(x - x')$. Ceux-ci sont amputés et remplacés par des fonctions d'ondes libres ($f_{\vec{q}}^*$ pour une particule d'impulsion \vec{q} sortante, $f_{\vec{p}}$ pour une particule d'impulsion \vec{p} entrante) conformément à

$$i \int d^4 x f_{\vec{p}}(x) K_x [i\Delta_F(x - x')] = f_{\vec{p}}(x'). \quad (4.1.29)$$

4.1.2 Champ scalaire complexe: particules chargées de spin zéro.

On élimine une particule d'impulsion \vec{p} de l'état initial par

$$i \int d^4x f_{\vec{p}}(x) K_x \langle \beta, out | \phi^*(x) | \alpha', in \rangle . \quad (4.1.30)$$

On élimine une antiparticule d'impulsion \vec{p} de l'état initial par

$$i \int d^4x f_{\vec{p}}^*(x) K_x \langle \beta, out | \phi(x) | \alpha', in \rangle . \quad (4.1.31)$$

On élimine une particule d'impulsion \vec{p} de l'état final par

$$i \int d^4x f_{\vec{p}}^*(x) K_x \langle \beta', out | \phi(x) | \alpha, in \rangle . \quad (4.1.32)$$

Et on élimine une antiparticule d'impulsion \vec{p} de l'état final, par

$$i \int d^4x f_{\vec{p}}^*(x) K_x \langle \beta', out | \phi^*(x) | \alpha, in \rangle . \quad (4.1.33)$$

4.2 Champ spinoriel.

La forme sesquilineaire définie sur l'espace des solutions de l'équation de Dirac qui permet d'établir une formule de réduction pour les fermions est la suivante

$$(\varphi, \psi)(t) = \int_{x^0=t} d^3x \bar{\varphi}(\vec{x}, x^0) \gamma^0 \psi(\vec{x}, x^0). \quad (4.2.34)$$

On vérifie aisément que (4.2.34) ne dépend pas de t , si les champs satisfont l'équation de Dirac et s'ils décroissent rapidement à l'infini.

On élimine une particule d'impulsion \vec{p} et d'hélicité s de l'état initial par

$$-i \int d^4x \langle \beta, out | \bar{\psi}(x) | \alpha', in \rangle (i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu + m) U_{\vec{p}, s}(x). \quad (4.2.35)$$

On élimine une antiparticule (\vec{p}, s) de l'état initial par

$$i \int d^4x \bar{V}_{\vec{p}, s}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \langle \beta, out | \psi(x) | \alpha', in \rangle . \quad (4.2.36)$$

On élimine une particule (\vec{p}, s) de l'état final par

$$-i \int d^4x \bar{U}_{\vec{p}, s}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \langle \beta', out | \psi(x) | \alpha, in \rangle . \quad (4.2.37)$$

En enfin, on élimine une antiparticule (\vec{p}, s) de l'état final par

$$-i \int d^4x \langle \beta', out | \bar{\psi}(x) | \alpha, in \rangle (i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu + m) V_{\vec{p}, s}(x). \quad (4.2.38)$$

Nous avons utilisé les notations suivantes:

$$U_{\vec{p},s}(x) = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 2\omega_p}} e^{-ip \cdot x} u_s(\vec{p}) \quad (4.2.39)$$

$$V_{\vec{p},s}(x) = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 2\omega_p}} e^{ip \cdot x} v_s(\vec{p}) \quad (4.2.40)$$

De plus, $\overline{\partial}_\mu$ signifie que l'opérateur de dérivation agit sur le facteur qui est à sa gauche.

4.3 Champ électromagnétique.

On élimine un photon d'impulsion \vec{k} , de polarisation ϵ de l'état initial par

$$-i \int d^4x e^{-ik \cdot x} \frac{\epsilon^\mu(\vec{k})}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \square_x \langle \beta, out | A_\mu(x) | \alpha', in \rangle . \quad (4.3.41)$$

Et on élimine un photon (\vec{k}, ϵ) de l'état final par

$$-i \int d^4x e^{ik \cdot x} \frac{\epsilon^\mu(\vec{k})}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \square_x \langle \beta', out | A_\mu(x) | \alpha, in \rangle . \quad (4.3.42)$$

Chapitre 5

Vertex propres, Action effective.

5.1 Fonctions de Green, Fonctions de Green connexes.

Nous avons introduit précédemment, la fonctionnelle $Z[J]$ génératrice des fonctions de Green

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi)} \quad (5.1.1)$$

$$= Z[0] \cdot [1 + \sum_n \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n J(x_1) \cdots J(x_n) G_n(x_1, \cdots, x_n)]. \quad (5.1.2)$$

$$G_n(x_1, \cdots, x_n) = \langle 0 | T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle \quad (5.1.3)$$

$$= \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (5.1.4)$$

De la propriété

$$\phi(x) = e^{iP \cdot a} \phi(x - a) e^{-iP \cdot a} \quad (5.1.5)$$

(P est l'opérateur énergie-impulsion) et de l'invariance du vide sous les translations d'espace-temps

$$e^{iP \cdot a} |0\rangle = |0\rangle, \quad (5.1.6)$$

il résulte que la fonction G_n ne dépend pas des n points x_1, \cdots, x_n mais seulement de $(n-1)$, l'origine des coordonnées étant arbitraire: ainsi, par exemple

$$G_n(x_1, \cdots, x_n) = G_n(0, x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_1). \quad (5.1.7)$$

Il s'en suit pour sa transformée de Fourier

$$\tilde{G}_n(p_1, \cdots, p_n) = \int d^4x_1 \cdots d^4x_n e^{ip_1 \cdot x_1 + \cdots + ip_n \cdot x_n} G_n(x_1, \cdots, x_n) \quad (5.1.8)$$

$$= \int d^4x_1 \cdots d^4x_n e^{ip_1 \cdot x_1 + \cdots + ip_n \cdot x_n} G_n(0, x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_1) \quad (5.1.9)$$

$$\begin{aligned} &= \int d^4x_1 e^{ix_1(p_1 + \cdots + p_n)} \cdot \int d^4y_2 \cdots d^4y_n e^{ip_2 \cdot y_2 \cdots + ip_n \cdot y_n} G_n(0, y_2, \cdots, y_n) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n) g(p_2, \cdots, p_n) \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Celle-ci n'est donc définie que pour $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 0$.

Pour le champ scalaire réel libre, la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green libres se calcule exactement, elle vaut

$$Z_0[J] = Z_0[0].e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)} \quad (5.1.11)$$

et toutes les fonctions de Green libres [non nulles pour n pair] sont des sommes de produits de propagateurs

$$G_2^0(x-y) = i\Delta_F(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik.(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (5.1.12)$$

$$\tilde{G}_2^0(p, -p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (5.1.13)$$

La relation (5.1.11) s'écrit aussi

$$\frac{Z_0[J]}{Z_0[0]} = e^{iW_0[J]}, \quad (5.1.14)$$

avec

$$iW_0[J] = -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y). \quad (5.1.15)$$

Son développement en puissances de la source J ne contient qu'un seul terme.

Pour le champ en interaction, on introduit de façon analogue la fonctionnelle

$$iW[J] = \log\left(\frac{Z[J]}{Z[0]}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{Z[J]}{Z[0]} = e^{iW[J]} \quad (5.1.16)$$

dont le développement en puissances de la source

$$iW[J] = \sum_n \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n J(x_1) \dots J(x_n) G_n^c(x_1, \dots, x_n) \quad (5.1.17)$$

contient les fonctions de Green connexes G_n^c telles que

$$G_n = G_n^c + \sum_{i+\dots+j=n} G_i^c \dots G_j^c \quad (5.1.18)$$

la somme portant sur toutes les partitions possibles des n points. Le lecteur établira lui-même, sans difficulté, le lien entre les coefficients de la série

$$\sum_n \frac{1}{n!} a_n x^n \quad (5.1.19)$$

et

$$\log\left(\sum_n \frac{1}{n!} a_n x^n\right) = \sum_n \frac{1}{n!} b_n x^n. \quad (5.1.20)$$

Par (5.1.17), il vient donc

$$G_n^c(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n iW[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (5.1.21)$$

La fonctionnelle $W[J]$ est la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes. Le soin est laissé au lecteur de vérifier que les diagrammes de Feynman représentant les G_n^c sont connexes, c'est-à-dire, d'un seul tenant.

5.2 Vertex propres.

Définissons d'abord le champ classique par

$$\phi_{cl}(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \quad (5.2.22)$$

$$= -i \frac{\delta}{\delta J(x)} \log(Z[J]) \quad (5.2.23)$$

$$= -i \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \quad (5.2.24)$$

$$= \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle_J \quad (5.2.25)$$

qui n'est autre que la valeur moyenne du champ quantifié dans le vide modifié par la source. Nous supposons, dans ce qui suit, que le modèle de théorie des champs auquel nous nous intéressons est tel que

$$\phi_{cl}(x) = 0 \leftrightarrow J = 0. \quad (5.2.26)$$

Il peut se produire, dans certains cas, des effets d'hystérèse (ou de brisure de symétrie) pour lesquels la relation (5.2.26) n'est plus vraie; dans ce cas, les développements qui suivent restent valables à la condition de remplacer $\phi_{cl}(x)$ par $\tilde{\phi}_{cl}(x) = \phi_{cl}(x) - \phi_{cl}(x)|_{J=0}$ qui satisfait (5.2.26). On définit ensuite une nouvelle fonctionnelle $\Gamma[\phi_{cl}]$, appelée action effective, par la transformation de Legendre suivante

$$\Gamma[\phi_{cl}] = W[J] - \int d^4x J(x) \phi_{cl}(x) \quad (5.2.27)$$

qui est telle que

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}(x)} = -J(x). \quad (5.2.28)$$

Son développement en puissances de ϕ_{cl} se présente comme suit

$$\Gamma[\phi_{cl}] = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \phi_{cl}(x_1) \cdots \phi_{cl}(x_n) \Gamma_n(x_1, \cdots, x_n) \quad (5.2.29)$$

où les coefficients Γ_n sont les vertex propres

$$\Gamma_n(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\delta^n \Gamma[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}(x_1) \cdots \delta \phi_{cl}(x_n)} \Big|_{\phi_{cl}=0}. \quad (5.2.30)$$

Avant de calculer les coefficients Γ_n en termes de fonctions de Green, voyons, sur l'exemple du champ libre à quoi correspondent les différents objets introduits ci-dessus. D'abord, de (5.1.15), on tire

$$\phi_{cl}^0(x) = - \int d^4y \Delta_F(x-y) J(y) \quad (5.2.31)$$

qui satisfait l'équation classique

$$(\square_x + m^2) \phi_{cl}^0(x) = J(x). \quad (5.2.32)$$

L'action effective

$$\Gamma^0 = -\frac{1}{2} \int d^4x J(x) \phi_{cl}^0(x) \quad (5.2.33)$$

dans laquelle on élimine J par (5.2.31) devient

$$\Gamma^0[\phi_{cl}] = \frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \phi_{cl}^0 \partial^\mu \phi_{cl}^0 - m^2 (\phi_{cl}^0)^2) = S[\phi_{cl}]. \quad (5.2.34)$$

Dans ce cas particulier, l'action effective coïncide avec l'action S du champ libre.

5.2.1 Calcul des Γ_n .

Partons de la définition du champ classique ($\phi_{cl}(x) = \delta W / \delta J(x)$) et prenons la dérivée fonctionnelle des deux membres par rapport à $\phi_{cl}(y)$, il vient

$$\frac{\delta \phi_{cl}(x)}{\delta \phi_{cl}(y)} = \delta^4(x - y) \quad (5.2.35)$$

$$= \frac{\delta}{\delta \phi_{cl}(y)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \quad (5.2.36)$$

$$= \int d^4z \frac{\delta^2 W}{\delta J(z) \delta J(x)} \cdot \frac{\delta J(z)}{\delta \phi_{cl}(y)} \quad (5.2.37)$$

$$= - \int d^4z \frac{\delta^2 W}{\delta J(z) \delta J(x)} \cdot \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{cl}(y) \delta \phi_{cl}(z)} \quad (5.2.38)$$

Les deux noyaux $\frac{\delta^2 W}{\delta J(z) \delta J(x)}$ et $(-)\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{cl}(y) \delta \phi_{cl}(z)}$ sont donc inverses l'un de l'autre, puisque leur convolution est $\delta^4(x - y)$. Si, dans cette expression (5.2.38), on pose $J = 0$ et donc aussi $\phi_{cl} = 0$, en vertu de (5.2.26), il reste, en utilisant les relations de définition des fonctions de Green connexes et des vertex propres,

$$\delta^4(x - y) = -i \int d^4z \Gamma_2(y, z) G_2^c(z, x). \quad (5.2.39)$$

D'où aussi,

$$\Gamma_2(y, z) = i(G_2^c(z, y))^{-1}. \quad (5.2.40)$$

On en tire, pour les transformées de Fourier,

$$\tilde{\Gamma}_2(p, -p) = i [\tilde{G}_2^c(p, -p)]^{-1}. \quad (5.2.41)$$

En prenant la dérivée fonctionnelle des deux membres de (5.2.38) par rapport à ϕ_{cl} , en $J = \phi_{cl} = 0$, il vient

$$G_3^c(x, y, z) = i \int dx' dy' dz' G_2(x, x') G_2(y, y') G_2(z, z') \Gamma_3(x', y', z') \quad (5.2.42)$$

et ainsi de suite. On établit ainsi, de proche en proche, que $i\Gamma_n$ est la fonction de Green connexe à n points, amputée de ses pattes externes et irréductible à une particule (1PI),

c'est à dire formée uniquement de diagrammes qui ne peuvent être coupés en deux parties disjointes en ne coupant qu'une seule ligne interne.

Il est utile de donner de ceci une représentation graphique: si on représente par une boule blanche à n pattes la fonction G_n^c et par une boule hachurée la fonction $i\Gamma_n$, il vient, par exemple

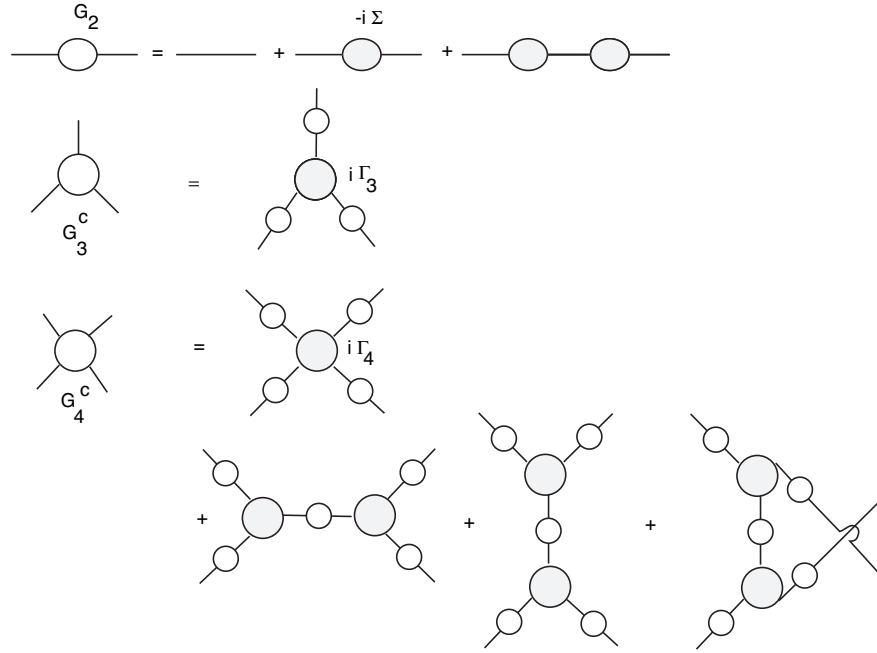


FIG. 5.1 – Vertex propres

5.3 Equation du mouvement pour ϕ_{cl} .

Reprenons la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 - V(\phi) + J\phi)} \quad (5.3.43)$$

$$= \int \mathcal{D}\phi e^{-i \int d^4y V(\phi(y))} e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi)} \quad (5.3.44)$$

Sous le signe intégrale, on a l'égalité

$$\phi(x) e^{i \int d^4y J(y)\phi(y)} = -i \frac{\delta}{\delta J(x)} e^{i \int d^4y J(y)\phi(y)}, \quad (5.3.45)$$

donc, aussi,

$$F(\phi(x)) e^{i \int d^4y J(y)\phi(y)} = F\left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right) e^{i \int d^4y J(y)\phi(y)}. \quad (5.3.46)$$

A l'aide de (5.3.46), (5.3.44) se récrit

$$Z[J] = e^{-i \int d^4 y V(-i \frac{\delta}{\delta J(y)})} \cdot \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4 x (\mathcal{L}_0 + J\phi)} \quad (5.3.47)$$

$$= e^{-i \int d^4 y V(-i \frac{\delta}{\delta J(y)})} \cdot Z_0[J] \quad (5.3.48)$$

Toute la dépendance en les sources J se trouve dans la fonctionnelle $Z_0[J]$. Il vient donc, pour la dérivée fonctionnelle des deux membres par rapport à $J(x)$

$$\frac{\delta Z}{\delta J(x)} = e^{-i \int d^4 y V(-i \frac{\delta}{\delta J(y)})} (-i) \int d^4 z \Delta_F(x-z) J(z) Z_0[J] \quad (5.3.49)$$

$$= e^{-i \int d^4 y V(-i \frac{\delta}{\delta J(y)})} (-i) \int d^4 z \Delta_F(x-z) J(z) e^{i \int d^4 u V(-i \frac{\delta}{\delta J(u)})} Z[J] \quad (5.3.50)$$

En vertu de (5.2.31), il vient

$$(\square_x + m^2) \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = i O_x Z[J], \quad (5.3.51)$$

où

$$O_x = O_x(\lambda)|_{\lambda=1} \quad (5.3.52)$$

et

$$O_x(\lambda) = e^{-i\lambda \int d^4 y V(-i \frac{\delta}{\delta J(y)})} J(x) e^{i\lambda \int d^4 z V(-i \frac{\delta}{\delta J(z)})}. \quad (5.3.53)$$

En utilisant le commutateur

$$[J(x), -i \frac{\delta}{\delta J(y)}] = i \delta^4(x-y), \quad (5.3.54)$$

on obtient sans peine

$$\frac{d}{d\lambda} O_x(\lambda) = -V'(-i \frac{\delta}{\delta J(x)}) \quad (5.3.55)$$

où V' désigne la dérivée de V par rapport à son argument. On déduit de cette équation du premier ordre en λ et de la condition de Cauchy $O_x(\lambda)|_{\lambda=0} = J(x)$,

$$O_x(\lambda) = J(x) - \lambda V'(-i \frac{\delta}{\delta J(x)}) \quad (5.3.56)$$

donc aussi O_x qui définit ainsi le membre de droite de l'équation (5.3.51). En divisant (5.3.51) par $iZ[J]$, on obtient enfin l'équation du mouvement recherchée

$$(\square_x + m^2) \phi_{cl}(x) = J(x) - \frac{1}{Z[J]} V'(-i \frac{\delta}{\delta J(x)}) Z[J]. \quad (5.3.57)$$

5.3.1 Exemples.

$$\text{a) } V(\phi) = \frac{\mu^2}{2} \phi^2$$

$$(\square_x + m^2)\phi_{cl}(x) = J(x) - \mu^2 \phi_{cl}(x). \quad (5.3.58)$$

$$\text{b) } V(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

$$(\square_x + m^2)\phi_{cl}(x) = J(x) - \frac{\lambda}{3!}(\phi_{cl}(x))^3 \quad (5.3.59)$$

$$+ \frac{\lambda}{3!} \left[-3\phi_{cl}(x) \frac{\delta^2 iW[J]}{\delta J(x)^2} + i \frac{\delta^3 iW[J]}{\delta J(x)^3} \right]. \quad (5.3.60)$$

Sur ces exemples, on voit que l'on retrouve dans le membre de droite, les termes qui forment l'équation classique du mouvement auxquels s'ajoutent de nouveaux termes qui constituent les corrections quantiques. En rétablissant les facteurs \hbar , on peut voir que ces termes correctifs apparaissent comme une série de puissances entières positives (≥ 1) de \hbar .

Chapitre 6

Les identités de Ward en électrodynamique quantique.

La fonctionnelle génératrice des fonctions de Green de l'électrodynamique spinorielle est donnée par

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_{0,\gamma} + \mathcal{L}_{0,e} + \mathcal{L}_{int} + J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta]} \quad (6.0.1)$$

où

$$\mathcal{L}_{0,\gamma} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (6.0.2)$$

Le terme de fixation de jauge γ a été inclus; rappelons que sans un tel terme, le propagateur du photon ne serait pas défini. Ce choix de jauge nous permet d'omettre les fantômes puisqu'ils ne sont pas couplés aux autres champs.

$$\mathcal{L}_{0,e} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (6.0.3)$$

et

$$\mathcal{L}_{int} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi. \quad (6.0.4)$$

Dans ces expressions, les variables d'intégration $\psi, \bar{\psi}$ et les sources $\eta, \bar{\eta}$ sont des variables grassmanniennes. L'intégrale fonctionnelle Z reste, du moins formellement, inchangée sous un changement de variables d'intégration. Considérons, en particulier, le changement de variables infinitésimal induit par une transformation de jauge

$$\psi'(x) = \psi(x) [1 - ie\alpha(x)] \quad (6.0.5)$$

$$\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) [1 + ie\alpha(x)] \quad (6.0.6)$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x) \quad (6.0.7)$$

dont le super jacobien vaut 1. Il vient donc

$$(6.0.2) = \int \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}A'_\mu e^{[\dots]'} \quad (6.0.8)$$

$$= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{[\dots]} e^{i \int d^4x \{-\lambda \partial_\mu A^\mu \square \alpha + J^\mu \partial_\mu \alpha - ie\alpha(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta)\}} \quad (6.0.9)$$

$$= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{[\dots]} [1 + i \int d^4x \{-\lambda \partial_\mu A^\mu \square \alpha + J^\mu \partial_\mu \alpha - ie\alpha(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta)\}] \quad (6.0.10)$$

Il en résulte que

$$0 = \int d^4x \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{[\dots]} \{-\lambda \partial_\mu A^\mu \square \alpha + J^\mu \partial_\mu \alpha - ie\alpha(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta)\} \quad (6.0.11)$$

et puisque ceci est vrai quelle que soit la fonction $\alpha(x)$ infinitésimale, il vient

$$0 = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{[\dots]} [-\lambda \square \partial_\mu A^\mu - \partial_\mu J^\mu - ie\bar{\eta}\psi + ie\bar{\psi}\eta]. \quad (6.0.12)$$

Sous le signe intégrale, on peut encore faire les remplacements suivants

$$A_\mu(x) e^{[\dots]} = -i \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} e^{[\dots]} \quad (6.0.13)$$

$$\psi(x) e^{[\dots]} = -i \frac{\delta^g}{\delta \bar{\eta}} e^{[\dots]} \quad (6.0.14)$$

$$\bar{\psi}(x) e^{[\dots]} = -i \frac{\delta^d}{\delta \eta(x)} e^{[\dots]} \quad (6.0.15)$$

On obtient finalement, pour la fonctionnelle Z l'équation

$$0 = -\lambda \square \partial_\mu \frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x)} - i \partial_\mu J^\mu \cdot Z - ie\bar{\eta} \frac{\delta^g Z}{\delta \bar{\eta}(x)} + ie \frac{\delta^d Z}{\delta \eta(x)} \eta. \quad (6.0.16)$$

En remplaçant Z par $\exp(iW)$, il vient aussi en divisant tous les termes par Z ,

$$0 = -\lambda \square \partial_\mu \frac{\delta W}{\delta J^\mu(x)} - \partial_\mu J^\mu - ie\bar{\eta} \frac{\delta^g W}{\delta \bar{\eta}(x)} + ie \frac{\delta^d W}{\delta \eta(x)} \eta. \quad (6.0.17)$$

Cette dernière équation se transforme encore en une équation pour l'action effective grâce aux relations suivantes

$$\frac{\delta W}{\delta J^\mu} = A_{\mu,cl}, \quad \frac{\delta^g W}{\delta \bar{\eta}} = \psi_{cl}, \quad \frac{\delta^d W}{\delta \eta} = \bar{\psi}_{cl} \quad (6.0.18)$$

et

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_{\mu,cl}} = -J^\mu, \quad \frac{\delta^d \Gamma}{\delta \psi_{cl}} = -\bar{\eta}, \quad \frac{\delta^g \Gamma}{\delta \bar{\psi}_{cl}} = -\eta. \quad (6.0.19)$$

Elle s'écrit

$$0 = -\lambda \square \partial_\mu A_{cl}^\mu + \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_{\mu,cl}} + ie \frac{\delta^d \Gamma}{\delta \psi_{cl}} \psi_{cl} - ie \bar{\psi}_{cl} \frac{\delta^g \Gamma}{\delta \bar{\psi}_{cl}}. \quad (6.0.20)$$

L'équation (6.0.20) fournit une infinité d'identités entre les vertex propres qui sont les coefficients du développement de Γ en puissances des champs classiques. Relevons quelques unes de ces identités, connues dans la littérature sous le nom d'identités de Ward-Takahashi.

a) Prenons d'abord de (6.0.20) la dérivée fonctionnelle par rapport à $A_{cl}^\nu(y)$, et regardons le résultat en $A_{\mu,cl} = \psi_{cl} = \bar{\psi}_{cl} = 0$, il vient

$$0 = -\lambda \square \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta^4(x-y) + \frac{\partial \Gamma_\nu^{(2)\mu}(y-x)}{\partial x^\mu}. \quad (6.0.21)$$

La transformée de Fourier de (6.0.21) fournit

$$k^\mu \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{(2)}(k) = -\lambda k^2 k_\nu. \quad (6.0.22)$$

et, avec

$$\tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{(2)}(k) = a(k^2) g_{\nu\mu} + b(k^2) \frac{k_\nu k_\mu}{k^2}, \quad (6.0.23)$$

$$k_\nu(a+b) = -\lambda k_\nu k^2, \quad \rightarrow b = -\lambda k^2 - a. \quad (6.0.24)$$

Or,

$$\tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{(2)}(k) \tilde{G}^{(2)\mu\alpha}(k) = i\delta_\nu^\alpha \quad (6.0.25)$$

il en résulte donc pour la transformée de Fourier du propagateur photonique complet

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{i}{a(k^2)} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) - \frac{i}{\lambda k^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (6.0.26)$$

On voit donc, par (6.0.26), que la partie longitudinale du propagateur photonique complet est la même que la partie longitudinale du propagateur photonique libre (le photon longitudinal n'est pas couplé à la matière!). Tous les détails de l'interaction sont donc contenus dans la partie transverse et de fait, dans la seule fonction $a(k^2)$.

b) Prenons, de (6.0.20), les dérivées fonctionnelles à gauche par rapport à $\bar{\psi}_{cl}(z)$, à droite par rapport à $\psi_{cl}(y)$ et annulons tous les champs classiques après avoir dérivé, il reste

$$\frac{\partial \Gamma^{(3)\mu}}{\partial x^\mu}(z, x, \bar{y}) = ie\delta^4(x-z) \Gamma^{(2)}(x-\bar{y}) - ie\delta^4(x-y) \Gamma^{(2)}(z-\bar{x}). \quad (6.0.27)$$

Rappelons que la fonction de vertex $\Gamma^{(3)\mu}(z, x, \bar{y})$ apparaît dans l'action effective Γ par

$$\int d^4x d^4y d^4z \bar{\psi}_{cl}(z) \Gamma^{(3)\mu}(z, x, \bar{y}) \psi_{cl}(y) A_{cl,\mu}(x). \quad (6.0.28)$$

Sa transformée de Fourier (où p, q sont des impulsions entrantes, p' est une impulsion sortante) définie par

$$\int d^4x d^4y d^4z e^{ip'z} e^{-iqx} e^{-ipy} \Gamma^{(3)\mu}(z, x, \bar{y}) = (2\pi)^4 \delta^4(q+p-p') \tilde{\Gamma}^{(3)\mu}(p', q, p) \quad (6.0.29)$$

est donc, via (6.0.27), reliée à la transformée de Fourier du propagateur électronique complet

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = i [\tilde{G}^{(2)}(p)]^{-1} = [\tilde{S}(p)]^{-1} \quad (6.0.30)$$

par la relation, avec ($q = p' - p$),

$$q_\mu \tilde{\Gamma}^{(3)\mu}(p', q, p) = e [\tilde{S}(p)^{-1} - \tilde{S}(p+q)^{-1}]. \quad (6.0.31)$$

A l'ordre le plus bas du calcul de perturbation, cette identité est évidemment satisfaite puisque

$$\tilde{\Gamma}_0^{(3)\mu} = -e \gamma^\mu \quad (6.0.32)$$

$$\tilde{S}_0(p)^{-1} = p_\mu \gamma^\mu - m \quad (6.0.33)$$

On en tire aussi, à la limite $q^\mu \rightarrow 0$,

$$-\frac{\partial}{\partial p^\mu} \tilde{S}_0(p) = \tilde{S}_0(p) \gamma_\mu \tilde{S}_0(p). \quad (6.0.34)$$

Nous verrons plus loin que l'identité (6.0.31) établit la relation ($Z_1 = Z_2$) entre les facteurs de renormalisation de la charge électrique (Z_1) et de la fonction d'onde de l'électron (Z_2).

c) Enfin, en dérivant (6.0.20) par rapport aux champs classiques $A_{cl}^\nu(y), A_{cl}^\alpha(z), A_{cl}^\beta(u)$ et en annulant tous les champs classiques après avoir dérivé, on obtient

$$0 = p^\mu \Gamma_{\mu\nu\alpha\beta}^{(4)}(p, q, r, s) \quad (6.0.35)$$

qui exprime la propriété de transversalité de la partie 1PI de l'amplitude $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$.

Chapitre 7

Calcul de diagrammes de Feynman.

7.1 Exemples

7.1.1 Théorie en ϕ^4 .

Avec $\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$, dont les règles de Feynman sont

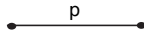

	=	$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
	=	$-i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(p_{entrantes} - p_{sortantes})$
boucle (k)	=	$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$

FIG. 7.1 – Règles de Feynman de $\lambda\phi^4$

Le développement perturbatif du propagateur du champ scalaire, limité au deuxième ordre en λ est donné par On en déduit le développement correspondant de la fonction

$$\begin{aligned}
 \text{---} \bigcirc \text{---} &= \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \bigcirc \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} \\
 &+ \frac{1}{4} \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \frac{1}{6} \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---}
 \end{aligned}$$

FIG. 7.2 – Propagateur jusqu'à l'ordre λ^2

$$i\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = i(p^2 - m^2 - \Sigma(p)) \quad (7.1.1)$$

où, explicitement ,

$$-i\Sigma = \frac{1}{2} \text{ (loop) } + \frac{1}{4} \text{ (two loops) } + \frac{1}{6} \text{ (fish) }$$

FIG. 7.3 – Self-énergie Σ

$$\begin{aligned} i\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) &= i(p^2 - m^2) \\ &+ \frac{1}{2}(-i\lambda) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &+ \frac{1}{4}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}\right)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &+ \frac{1}{6}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k d^4q}{(2\pi)^8} \left[\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}\right] \left[\frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}\right] \left[\frac{i}{(p-k-q)^2 - m^2 + i\epsilon}\right] \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

La fonction $-i\Sigma(p)$ représente la somme de tous les diagrammes connexes, amputés, 1PI. Sa connaissance ramène le calcul du propagateur complet à la somme d'une série géométrique par

$$\tilde{G}_2(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{p^2 - m^2}(-i\Sigma(p))\frac{i}{p^2 - m^2} + \dots \quad (7.1.3)$$

$$= \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p)} \quad (7.1.4)$$

On obtient de même, pour la transformée de Fourier de la fonction de vertex $i\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ pour toutes impulsions entrantes et ($p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$), qui est la fonction de Green à quatre points, connexe, amputée, 1PI, ou encore

$$\text{ (four-point vertex) } = \text{ (tree) } + \frac{1}{2} \text{ (fish) } + \frac{1}{2} \text{ (sunset) } + \frac{1}{2} \text{ (triangle) }$$

FIG. 7.4 – Γ_4

$$\begin{aligned}
i\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= (-i\lambda) & (7.1.5) \\
&+ \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{i}{(p_1 + p_2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&+ \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{i}{(p_1 + p_3 - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&+ \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{i}{(p_1 + p_4 - k)^2 - m^2 + i\epsilon}
\end{aligned}$$

7.1.2 Electrodynamique spinorielle.

Le développement perturbatif du propagateur électronique limité au second ordre se présente comme suit

$$\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0 \rangle = iS'_F(x-y) = \quad (7.1.6)$$

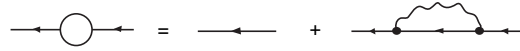


FIG. 7.5 – Propagateur électronique

$$= iS_F(x-y) + (-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 iS_F(x-x_1)\gamma^\mu iS_F(x_1-x_2)\gamma^\nu iD_{\mu\nu}^F(x_1-x_2)iS_F(x_2-y). \quad (7.1.7)$$

Pour sa transformée de Fourier on a de même

$$i\tilde{S}'_F(p) = \int d^4(x-y) e^{ip(x-y)} iS'_F(x-y) = \quad (7.1.8)$$

$$= i\tilde{S}_F(p) + (-ie)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} i\tilde{S}_F(p)\gamma^\mu i\tilde{S}_F(p-q)\gamma^\nu i\tilde{D}_{\mu\nu}^F(q)i\tilde{S}_F(p). \quad (7.1.9)$$

Tandis que pour $-i\Sigma(p)$ définie comme la somme des diagrammes connexes, amputés des propagateurs sur les pattes externes et 1PI, qui, à l'ordre 2, est donnée par le seul diagramme il vient,

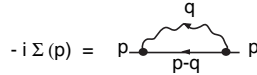


FIG. 7.6 – Self-énergie de l'électron

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu i(\not{p} - \not{q} + m)\gamma^\nu i(-g_{\mu\nu} - \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{q_\mu q_\nu}{q^2})}{[(p-q)^2 - m^2 + i\epsilon][q^2 + i\epsilon]}. \quad (7.1.10)$$

La définition de $-i\Sigma$, ramène le calcul du propagateur à la somme d'une série géométrique

$$\tilde{S}'_F(p) = [\not{p} - m - \Sigma(p)]^{-1} \quad (7.1.11)$$

ou encore, avec

$$\Sigma(p) = A(p^2)\not{p} + B(p^2)mI, \quad (7.1.12)$$

$$\tilde{S}'_F(p) = [\not{p}(1 - A(p^2)) - m(1 + B(p^2))]^{-1}. \quad (7.1.13)$$

De même, le développement perturbatif limité au second ordre du propagateur photonique fournit

$$\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0 \rangle = iD'_{\mu\nu}(x-y) \quad (7.1.14)$$



FIG. 7.7 – Propagateur photonique

$$= iD'_{\mu\nu}(x-y) - (-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 iD'_{\mu\alpha}(x-x_1) Tr[\gamma^\alpha iS_F(x_1-x_2)\gamma^\beta iS_F(x_2-x_1)] iD'_{\beta\nu}(x_2-y) \quad (7.1.15)$$

et, pour la transformée de Fourier

$$i\tilde{D}'_{\mu\nu}(p) = i\tilde{D}_{\mu\nu}(p) - (-ie)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} i\tilde{D}_{\mu\alpha}(p) Tr[\gamma^\alpha i\tilde{S}_F(q)\gamma^\beta i\tilde{S}_F(p+q)] i\tilde{D}_{\beta\nu}(p). \quad (7.1.16)$$

Enfin, pour $-i\Pi^{\alpha\beta}(p)$ qui est la somme des diagrammes connexes, amputés, 1PI, il vient

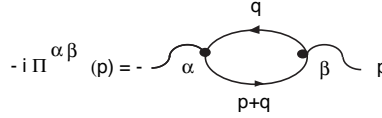


FIG. 7.8 – Polarisation du photon

$$-i\Pi^{\alpha\beta}(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} Tr\left[\frac{\gamma^\alpha(\not{q} + m)\gamma^\beta(\not{p} + \not{q} + m)}{[q^2 - m^2 + i\epsilon][(p-q)^2 - m^2 + i\epsilon]}\right]. \quad (7.1.17)$$

Sa contribution au propagateur photonique est donnée par

$$\tilde{D}'_{\mu\nu}(p) = [(\tilde{D}^F(p))^{-1} - \Pi(p)]_{\mu\nu}^{-1}. \quad (7.1.18)$$

En séparant dans $\tilde{D}^F_{\mu\nu}(p)$ et dans $\Pi_{\mu\nu}(p)$ les parties transverses et longitudinales par

$$\tilde{D}^F_{\mu\nu}(p) = -\frac{g_{\mu\nu}}{p^2} - \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2)^2} \quad (7.1.19)$$

$$= -\frac{1}{p^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) - \frac{1}{\lambda} \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2)^2} \quad (7.1.20)$$

$$(\tilde{D}^F)^{-1}_{\mu\nu}(p) = -p^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) - p^2 \lambda \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \quad (7.1.21)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = T(p^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) + L(p^2) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \quad (7.1.22)$$

il vient encore

$$\tilde{D}'_{\mu\nu}(p) = [-(p^2 + T(p^2))(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}) - (p^2\lambda + L(p^2))\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}]^{-1} \quad (7.1.23)$$

$$= -\frac{1}{(p^2 + T)}(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}) - \frac{1}{(p^2\lambda + L)}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \quad (7.1.24)$$

La partie longitudinale du propagateur complet ne sera égale à la partie longitudinale du propagateur libre (ce qui est imposé par les identités de Ward) que si $L(p^2) = 0$.

Par la même technique, on obtient pour la transformée de Fourier de la fonction de vertex électromagnétique

$$i\tilde{\Gamma}_\mu^{(3)}(p', q, p) = -ie\gamma_\mu + \quad (7.1.25)$$

$$+(-ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\alpha \frac{i}{\not{k} + \not{p}' - m} \gamma_\mu \frac{i}{\not{k} + \not{p} - m} \gamma^\beta \frac{i}{k^2} (-g_{\alpha\beta} - \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}) \quad (7.1.26)$$

Dans la jauge de Feynman ($\lambda = 1$), cette expression se réduit à

$$-ie\gamma_\mu + (-ie)^3 i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\alpha (\not{k} + \not{p}' + m) \gamma_\mu (\not{k} + \not{p} + m) \gamma_\alpha}{[(k+p')^2 - m^2 + i\epsilon][(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 + i\epsilon]}. \quad (7.1.27)$$

Elle correspond aux diagrammes de Feynman suivants:

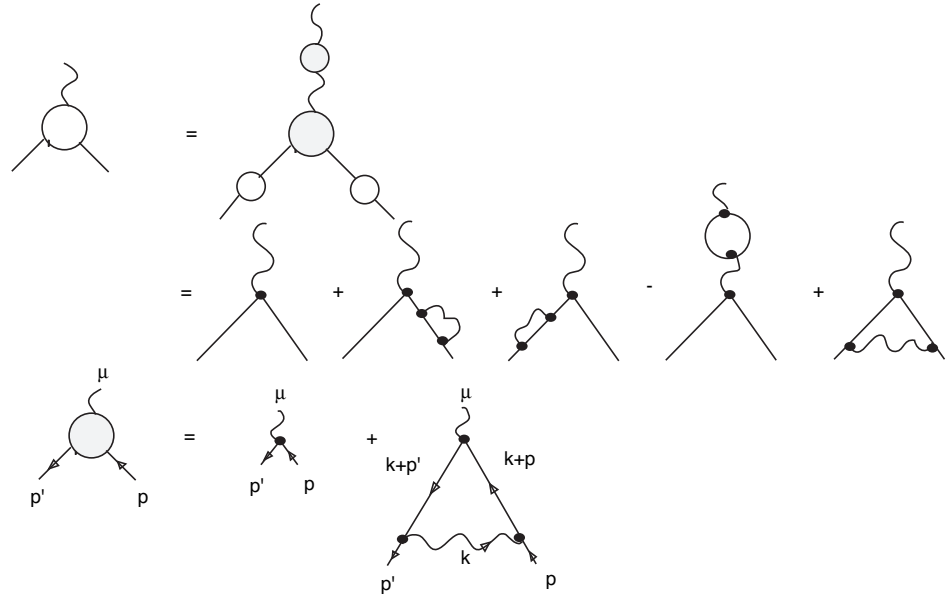


FIG. 7.9 – Vertex électromagnétique

7.2 Calcul de diagrammes à une boucle.

Sur les exemples donnés précédemment, on constate que les diagrammes de Feynman comportant une boucle sont définis par des intégrales du type suivant

$$I = \int d^4k \frac{F(k)}{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad (7.2.28)$$

où les a_i sont des polynômes du second degré en les composantes k_μ et $F(k)$ est un polynôme en k_μ , en les impulsions externes et en les matrices γ . Pour calculer de telles intégrales, la première manipulation dont la règle a été établie par Feynman, consiste à introduire des variables auxiliaires de façon à transformer le dénominateur, produit des a_i en un seul facteur. La règle est la suivante

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \quad (7.2.29)$$

$$= (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{1}{[a_1 x_{n-1} + a_2(x_{n-2} - x_{n-1}) + \cdots + a_n(1 - x_1)]^n} \quad (7.2.30)$$

La démonstration de cette formule se fait par induction sur n ; elle est donnée, par exemple, dans l'appendice A5 de Jauch et Rohrlich.

Le dénominateur de (7.2.30) est de la forme générale

$$D^n = [(k-p) - a^2 + i\epsilon]^n \quad (7.2.31)$$

où p_μ et a ne dépendent plus des k_μ , mais dépendent des impulsions externes et des variables auxiliaires.

Supposons que le degré de $F(k)$ et n sont tels que l'intégrale I est convergente; alors, on peut changer de variables d'intégration par translations

$$k'_\mu = k_\mu - p_\mu; \quad d^4k' = d^4k. \quad (7.2.32)$$

ce qui transforme I en

$$I = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{F(k' + p)}{[k'^2 - A^2 + i\epsilon]^n} \quad (7.2.33)$$

où A^2 est un invariant relativiste. L'intégration sur d^4k' se fait sur un domaine symétrique par rapport à l'origine: le dénominateur étant devenu une fonction paire de k'_μ , les puissances impaires de k'_μ présentes dans $F(k' + p)$ ne contribuent pas à l'intégrale, tandis que pour les puissances paires de k'_μ , on a, en analysant la variance des intégrales sous les transformations de Lorentz,

$$\int d^4k' k'_\mu k'_\nu f(k'^2) = g_{\mu\nu} \int d^4k' \frac{1}{4} k'^2 f(k'^2), \quad (7.2.34)$$

$$\int d^4k' k'_\mu k'_\nu k'_\alpha k'_\beta f(k'^2) = [g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}] \int d^4k' \frac{1}{24} (k'^2)^2 f(k'^2). \quad (7.2.35)$$

$$\dots \quad (7.2.36)$$

De ce fait, l'intégrale (7.2.33) se ramène à une somme d'intégrales du type

$$I_{mn} = \int d^4k \frac{(k^2)^{m-2}}{[k^2 - A^2 + i\epsilon]^n}. \quad (7.2.37)$$

Si A^2 est positif, la fonction $[k^2 - A^2 + i\epsilon]^{-1}$ a, dans le plan complexe k_0 , des pôles en $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + A^2} - i\eta$ et en $k_0 = -\sqrt{\vec{k}^2 + A^2} + i\eta$. On peut donc, en vertu du théorème de Cauchy, remplacer l'intégrale sur la variable k_0 le long de l'axe réel de $-\infty$ à $+\infty$ par l'intégrale le long de l'axe imaginaire (les contributions des quarts de cercles à l'infini sont nulles, puisque l'intégrale est convergente). En résumé:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_0[\dots] = \int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0[\dots]. \quad (7.2.38)$$

Il est ensuite indiqué d'effectuer le changement de variable suivant

$$k_0 = ik_{E,0}, \quad dk_0 = idk_{E,0}. \quad (7.2.39)$$

Lorsque k_0 va de $-i\infty$ à $+i\infty$ le long de l'axe imaginaire, $k_{E,0}$ va de $-\infty$ à $+\infty$ le long de l'axe réel. En complétant ce changement de variables par

$$\vec{k} = \vec{k}_E, \quad d^3k = d^3k_E, \quad (7.2.40)$$

de sorte que

$$k^2 = (k_0)^2 - (\vec{k})^2 = -(k_{E,0})^2 - (\vec{k}_E)^2 = -k_E^2, \quad (7.2.41)$$

il vient

$$I_{mn} = i(-)^{m-n-2} \int d^4k_E \frac{(k_E^2)^{m-2}}{[k_E^2 + A^2]^n}. \quad (7.2.42)$$

L'introduction de coordonnées sphériques dans l'espace euclidien à 4 dimensions, pour lesquelles l'élément de volume devient

$$d^4k_E = \kappa^3 d\kappa \sin^2\theta_2 d\theta_2 \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi, \quad (7.2.43)$$

avec $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi$, permet l'intégration sur les angles par

$$\int d\Omega = 2\pi^2. \quad (7.2.44)$$

Il reste donc

$$I_{mn} = (-)^{m-n-2} i\pi^2 \int_0^\infty d\kappa^2 \frac{(\kappa^2)^{m-1}}{[\kappa^2 + A^2]^n} \quad (7.2.45)$$

$$= (-)^{m-n-2} i\pi^2 (A^2)^{m-n} \int_0^\infty du u^{m-1} (1+u)^{-n} \quad (7.2.46)$$

$$= (-)^{m-n-2} i\pi^2 (A^2)^{m-n} B(m, n-m) \quad (7.2.47)$$

où B est la fonction d'Euler

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (7.2.48)$$

C'est une fonction analytique de x et de y qui possède des pôles simples lorsque x ou y sont des entiers non positifs. Avec n et m entiers non négatifs, l'intégrale (7.2.46) existe et est finie lorsque $n > m > 0$. Si nous reprenons les diagrammes cités en exemples dans le paragraphe précédent, nous constatons que dans tous ces cas, la condition de convergence des intégrales n'est pas satisfaite. Les fonctions à intégrer ne décroissent pas assez rapidement pour $\kappa \rightarrow \infty$: de telles divergences sont de ce fait appelées divergences ultra-violettes (on se rappellera la relation entre le vecteur nombre d'ondes et la longueur d'onde). Si l'on veut pouvoir donner un sens à la théorie quantique des champs, avant toute chose, il faut se débarrasser de ces infinis et introduire un procédé de régularisation des intégrales divergentes.

7.3 Régularisation dimensionnelle.

Plusieurs méthodes de régularisation ont été proposées, celle que nous privilégions ici est la régularisation dimensionnelle: elle a l'avantage sur les autres de préserver la covariance relativiste et de préserver les identités de Ward de l'électrodynamique quantique. Elle pose cependant problème dans la théorie unifiée des interactions électromagnétiques et faibles (à cause du $\gamma_5!$). Dans la plupart des méthodes de régularisation, la technique proposée consiste à introduire dans les intégrales à calculer un paramètre de sorte que les nouvelles fonctions soient des fonctions analytiques de ce paramètre, dans un domaine. On calcule alors ces intégrales dans le domaine d'analyticité du paramètre, puis, on cherche un prolongement du résultat au voisinage de la valeur qu'il faut donner à ce paramètre pour retrouver les fonctions définies initialement par des intégrales divergentes. Par cette technique, on sépare les termes divergents des termes finis. Une telle séparation reste cependant arbitraire puisque ($\infty + (fini) = \infty$). Cet arbitraire sera levé par l'introduction d'une prescription de renormalisation.

Dans la régularisation dimensionnelle, le paramètre de régularisation est la dimension de l'espace temps, notée 2ω . On constate que, si l'on remplace dans les intégrales précédemment données en exemple, l'élément de volume $d^4k/(2\pi)^4$ par $d^{2\omega}k/(2\pi)^{2\omega}$, pour $Re\ 2\omega$ suffisamment petit, les intégrales convergent. C'est donc dans le demi-plan complexe $Re\ 2\omega \leq 1$ [ou 2] selon le cas, que l'on peut calculer les intégrales. Une fois exprimé en termes de fonctions Γ d'Euler, ce résultat sera évidemment prolongeable en dehors du domaine de convergence des intégrales.

Nous allons appliquer cette technique aux diagrammes à une boucle de la théorie en ϕ^4 et de l'électrodynamique spinorielle. Auparavant, pour rendre cohérente la théorie des champs dans un espace-temps à 2ω dimensions dans laquelle les champs portent les dimensions suivantes

$$[\phi] = L^{1-\omega}, \quad [A_\mu] = L^{1-\omega}, \quad [\psi] = L^{\frac{1}{2}-\omega} \quad (7.3.49)$$

et pour conserver des constantes de couplage sans dimensions [comme c'est le cas pour $2\omega = 4$], on introduit un paramètre d'échelle, μ , qui a les dimensions d'une masse ($M =$

L^{-1}), par les remplacements

$$\lambda \rightarrow \lambda(\mu^2)^{2-\omega}, \quad e \rightarrow e(\mu)^{2-\omega}. \quad (7.3.50)$$

En electrodynamique quantique, le changement de dimensions de l'espace-temps (dans lequel on suppose qu'il n'y a qu'une seule dimension de temps) induit des modifications des matrices γ . Elles satisfont toujours les relations

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I \quad (7.3.51)$$

mais sont, dans une représentation irréductible, des matrices à 2^ω lignes et colonnes. De ce fait, on trouve, par exemple:

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 2^\omega g^{\mu\nu} \quad (7.3.52)$$

$$Tr(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\mu) = 2^\omega (g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu} - g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\lambda}) \quad (7.3.53)$$

mais aussi

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 2\omega I \quad (7.3.54)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_\mu = 2(1-\omega)\gamma^\alpha \quad (7.3.55)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu = 4g^{\alpha\beta} I - 2(2-\omega)\gamma^\alpha \gamma^\beta \quad (7.3.56)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma_\mu = -2\gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\alpha + 2(2-\omega)\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda \quad (7.3.57)$$

Dans le calcul des intégrales, après rotation de Wick dans le plan k^0 , on rencontre

$$d^{2\omega} k_E = \kappa^{2\omega-1} d\kappa d\Omega_{2\omega-1} = \frac{1}{2} \kappa^{2\omega-2} d\kappa^2 d\Omega_{2\omega-1} \quad (7.3.58)$$

où

$$d\Omega_{2\omega-1} = (\sin\theta_{2\omega-1})^{2\omega-2} d\theta_{2\omega-1} (\sin\theta_{2\omega-2})^{2\omega-3} d\theta_{2\omega-2} \cdots \sin\theta_2 d\theta_2 d\theta_1 \quad (7.3.59)$$

$0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, 0 \leq \theta_j \leq \pi, j = 2, \dots, 2\omega - 1$. Il vient donc

$$\int d\Omega_{2\omega-1} = 2\pi \prod_{N=1}^{2\omega-2} \int_0^\pi d\theta_N (\sin\theta_N)^N. \quad (7.3.60)$$

Or,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt (\sin t)^{2x-1} (\cos t)^{2y-1} = \frac{1}{2} B(x, y), \quad (7.3.61)$$

pour $Re x > 0$ et $Re y > 0$. Pour $y = \frac{1}{2}$ et $x = (N+1)/2$, ceci devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt (\sin t)^N = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{(N+1)}{2}\right) \quad (7.3.62)$$

et donc

$$\int_0^\pi dt (\sin t)^N = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt (\sin t)^N = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{(N+1)}{2})}{\Gamma(\frac{(N+2)}{2})} \quad (7.3.63)$$

On obtient ainsi, pour l'intégrale sur la partie angulaire l'expression

$$\int d\Omega_{2\omega-1} = 2\pi^\omega \frac{1}{\Gamma(\omega)}. \quad (7.3.64)$$

A l'aide de ce résultat, nous pouvons établir les formules suivantes qui remplacent, à 2ω dimensions, les formules du paragraphe précédent:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[k^2 - A^2 + i\epsilon]^\alpha} = i(-1)^\alpha \frac{1}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{(A^2)^{\alpha-\omega}} \frac{\Gamma(\alpha-\omega)}{\Gamma(\alpha)} \quad (7.3.65)$$

et

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - A^2 + i\epsilon]^\alpha} = \frac{i}{2} g^{\mu\nu} (-1)^{\alpha-1} \frac{1}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{(A^2)^{\alpha-\omega-1}} \frac{\Gamma(\alpha-\omega-1)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (7.3.66)$$

Nous avons à présent en main tous les outils nécessaires pour calculer les diagrammes de Feynman à une boucle de la théorie en ϕ^4 et de l'électrodynamique quantique, dans l'espace-temps à 2ω dimensions. Prenons d'abord, le propagateur du champ scalaire,

$$i\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) \rightarrow i\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; 2\omega) = i(p^2 - m^2) - i\Sigma(p; 2\omega) \quad (7.3.67)$$

$$-i\Sigma(p; 2\omega) = \frac{-i}{2} \lambda(\mu^2)^{2-\omega} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (7.3.68)$$

$$= -i \frac{\lambda m^2}{2(4\pi)^2} \left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right]^{2-\omega} \Gamma(1-\omega) \quad (7.3.69)$$

Au voisinage de $\omega = 2$ ou de $\epsilon = 2 - \omega = 0$, il vient

$$\left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right]^\epsilon = \exp \log[\dots]^\epsilon = 1 + \epsilon \log \left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right] + O(\epsilon^2). \quad (7.3.70)$$

De plus, en utilisant la propriété $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, $z(z+1)\Gamma(z) = \Gamma(z+2)$, on a

$$\Gamma(1-\omega) = \Gamma(\epsilon-1) \quad (7.3.71)$$

$$= \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon(\epsilon-1)} \quad (7.3.72)$$

$$= \frac{-1}{\epsilon} (1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots) (\Gamma(1) + \epsilon\Gamma'(1) + \dots) \quad (7.3.73)$$

$$= \frac{-1}{\epsilon} [1 + \epsilon(1 + \Gamma'(1)) + O(\epsilon^2)] \quad (7.3.74)$$

En mettant ensemble tous ces résultats partiels, il vient enfin, au voisinage de $\epsilon = 0$,

$$-i\Sigma(p; 2\omega) = i\lambda \frac{m^2}{2(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right] + 1 + \Gamma'(1) + O(\epsilon) \right]. \quad (7.3.75)$$

Ceci n'est autre que le développement en série de Laurent, autour de $\epsilon = 0$ de la fonction $-i\Sigma(p; 2\omega)$. La singularité attendue pour $\epsilon = 0$, puisque l'intégrale à 4-dimensions est

divergente, apparaît ici comme pôle simple en $\epsilon = 0$ de la fonction $-i\Sigma(p; 4 - 2\epsilon)$.

Comme deuxième exemple issu de la théorie en ϕ^4 , considérons la boucle qui définit la fonction $i\tilde{\Gamma}^{(4)}$, soit

$$F(p^2; 2\omega) = \lambda^2(\mu^2)^{4-2\omega} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \cdot \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (7.3.76)$$

$$= \lambda^2(\mu^2)^{4-2\omega} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dx \frac{1}{[(k-px)^2 + p^2x(1-x) - m^2 + i\epsilon]^2} \quad (7.3.77)$$

$$= (\mu^2)^{2-\omega} \frac{i\lambda^2}{(4\pi)^2} \Gamma(2-\omega) \int_0^1 dx \left[\frac{m^2 - p^2x(1-x)}{4\pi\mu^2} \right]^{\omega-2} \quad (7.3.78)$$

Son développement de Laurent autour de $\epsilon = 2 - \omega = 0$ est le suivant

$$F(p^2; 4 - 2\epsilon) = (\mu^2)^\epsilon \frac{i\lambda^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \Gamma'(1) + \log\left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right] - \int_0^1 dx \log\left[1 - \frac{p^2}{m^2}x(1-x)\right] + O(\epsilon) \right]. \quad (7.3.79)$$

Il vient ainsi

$$i\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4; 2\omega) = (-i)\lambda(\mu^2)^{2-\omega} \quad (7.3.80)$$

$$+ \frac{1}{2} [F((p_1 + p_2)^2; 2\omega) + F((p_1 + p_3)^2; 2\omega) + F((p_1 + p_4)^2; 2\omega)] \quad (7.3.81)$$

En électrodynamique quantique, on obtient, pour la self-énergie de l'électron

$$-i\Sigma(p; 2\omega) = (-ie\mu^{2-\omega})^2 \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\mu}{[(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 + i\epsilon]} \quad (7.3.82)$$

$$= -i[\not{p} A(p^2; 2\omega) + m B(p^2; 2\omega)] \quad (7.3.83)$$

où, avec $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$,

$$A(p^2; 2\omega) = \frac{\alpha}{2\pi} (1-\omega) \Gamma(2-\omega) \int_0^1 dx (1-x) \left[\frac{m^2x - p^2x(1-x)}{4\pi\mu^2} \right]^{\omega-2} \quad (7.3.84)$$

$$= -\frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{2\epsilon} + \frac{(\Gamma'(1) - 1)}{2} + \int_0^1 dx (1-x) \log\left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2x - p^2x(1-x)} \right] \right] + O(\epsilon) \quad (7.3.85)$$

et

$$B(p^2; 2\omega) = \frac{\alpha}{2\pi} \omega \Gamma(2-\omega) \int_0^1 dx \left[\frac{m^2x - p^2x(1-x)}{4\pi\mu^2} \right]^{\omega-2} \quad (7.3.86)$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{2}{\epsilon} + 2\Gamma'(1) - 1 + 2 \int_0^1 dx \log\left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2x - p^2x(1-x)} \right] \right] + O(\epsilon) \quad (7.3.87)$$

Pour la polarisation du photon, il vient

$$-i\Pi^{\alpha\beta}(p; 2\omega) = (-ie\mu^{2-\omega})^2 \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \text{Tr} \left[\frac{\gamma^\alpha(\not{k} + m)\gamma^\beta(\not{p} + \not{k} + m)}{[k^2 - m^2 + i\epsilon][(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \right] \quad (7.3.88)$$

$$= \frac{2i\alpha}{\pi} (p^\alpha p^\beta - p^2 g^{\alpha\beta}) \Gamma(2-\omega) \int_0^1 dx x(1-x) \left[\frac{2\pi\mu^2}{m^2 - p^2 x(1-x)} \right]^{2-\omega} \quad (7.3.89)$$

$$= \frac{2i\alpha}{\pi} (p^\alpha p^\beta - p^2 g^{\alpha\beta}) \left[\frac{1}{6\epsilon} + \frac{\Gamma'(1)}{6} + \int_0^1 dx x(1-x) \log \left[\frac{2\pi\mu^2}{m^2 - p^2 x(1-x)} \right] \right] \quad (7.3.90)$$

On remarquera que dans la régularisation dimensionnelle le tenseur $\Pi^{\alpha\beta}$ est automatiquement transverse. Sa partie longitudinale $L(p^2; 2\omega) = 0$ comme imposé par les identités de Ward. La partie transverse définie précédemment vaut

$$T(p^2; 2\omega) = \frac{2\alpha p^2}{\pi} \left[\frac{1}{6\epsilon} + \frac{\Gamma'(1)}{6} + \int_0^1 dx x(1-x) \log \left[\frac{2\pi\mu^2}{m^2 - p^2 x(1-x)} \right] \right]. \quad (7.3.91)$$

Enfin, l'expression du vertex électromagnétique est donnée par

$$i\tilde{\Gamma}_\mu^{(3)}(p', q, p; 2\omega) = -ie\mu^{2-\omega} \gamma_\mu \quad (7.3.92)$$

$$+i(-ie\mu^{2-\omega})^3 \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\gamma^\alpha(\not{k} + \not{p}' + m)\gamma_\mu(\not{k} + \not{p} + m)\gamma_\alpha}{[(k+p')^2 - m^2 + i\epsilon][(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 + i\epsilon]} \quad (7.3.93)$$

Après introduction de 2 variables auxiliaires, le dernier terme de l'équation ci-dessus se réécrit comme

$$i(-ie\mu^{2-\omega})^3 \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \gamma^\alpha(\not{k} + \not{p}' + m)\gamma_\mu(\not{k} + \not{p} + m)\gamma_\alpha 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy. \quad (7.3.94)$$

$$\frac{1}{[(2kq + p'^2 - p^2)y + (2kp + p^2 - m^2)x + k^2 + i\epsilon]^3} \quad (7.3.95)$$

dont le dénominateur se met encore sous la forme

$$[(k + px + qy)^2 - (px + qy)^2 + (p'^2 - p^2)y + (p^2 - m^2)x + i\epsilon]^3. \quad (7.3.96)$$

S'impose alors le changement de variables d'intégration suivant (translation):

$$k' = k + px + qy, \quad k = k' - px - qy. \quad (7.3.97)$$

De ce fait, le numérateur devient

$$\gamma^\alpha(\not{k}' - \not{p}x - \not{q}y + \not{p}' + m)\gamma_\mu(\not{k}' - \not{p}x - \not{q}y + \not{p} + m)\gamma_\alpha. \quad (7.3.98)$$

Dans les nouvelles variables k' , le dénominateur est devenu une fonction paire; seuls les termes pairs en k' du numérateur contribueront donc à l'intégrale, puisque l'intégration se fait sur un domaine symétrique par rapport à l'origine. Le numérateur peut donc être décomposé en la somme de deux termes, dont

$$\gamma^\alpha \not{k}' \gamma_\mu \not{k}' \gamma_\alpha \quad (7.3.99)$$

et le reste des termes pairs qui est indépendant de k' , c'est à dire

$$\gamma^\alpha(-\not{p}x - \not{q}y + \not{p}' + m)\gamma_\mu(-\not{p}x - \not{q}y + \not{p}' + m)\gamma_\alpha. \quad (7.3.100)$$

Cette décomposition du numérateur induit la décomposition correspondante de la fonction de vertex électromagnétique:

$$i\tilde{\Gamma}_\mu^{(3)}(p', q, p; 2\omega) = -ie\mu^{2-\omega}\gamma_\mu + i\tilde{\Gamma}_\mu^I + i\tilde{\Gamma}_\mu^{II}. \quad (7.3.101)$$

Par simple comptage de puissances de k' , on constate que l'intégrale définissant la fonction $i\tilde{\Gamma}_\mu^{II}(p', q, p; 2\omega)$ est finie pour $2\omega = 4$; c'est cette propriété qui a permis, avant tout procédé de renormalisation d'obtenir l'anomalie du moment magnétique de l'électron. Nous y reviendrons plus loin. Nous ne nous occupons, pour le moment, que du calcul de la fonction $i\tilde{\Gamma}_\mu^I(p', q, p; 2\omega)$ au voisinage de $2\omega = 4$ qui est donnée par

$$\begin{aligned} & -2e^3\mu^{6-3\omega} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int \frac{d^{2\omega}k'}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\gamma^\alpha \not{k}' \gamma_\mu \not{k}' \gamma_\alpha}{[k'^2 - (px + qy)^2 + (p'^2 - p^2)y + (p^2 - m^2)x + i\epsilon]^3} \\ & = -ie^3(\mu^{2-\omega})^3 \gamma_\mu 2(1-\omega)^2 \frac{\Gamma(2-\omega)}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{[(px + qy)^2 + (p^2 - p'^2)y + (m^2 - p^2)x]^{2-\omega}} \\ & = -ie\mu^{2-\omega} \gamma_\mu \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{2\epsilon} - 1 - \frac{\gamma}{2} + \int_0^1 dx \int_0^x dy \log \left[\frac{4\pi\mu^2}{(px + qy)^2 + (p^2 - p'^2)y + (m^2 - p^2)x} \right] + O(\epsilon) \right]. \end{aligned} \quad (7.3.102)$$

$$(7.3.103)$$

$$(7.3.104)$$

Elle est proportionnelle à la matrice γ_μ .

On vérifie aisément que les parties singulières [en $\frac{1}{\epsilon}$] de $\tilde{\Sigma}$ et $\tilde{\Gamma}_\mu^{(3)}$ satisfont l'identité de Ward.

Les fonctions $\tilde{\Sigma}$ et $\tilde{\Gamma}_\mu^{(3)}$ ont des parties finies pour $\epsilon \rightarrow 0$ qui présentent encore des divergences infra-rouges lorsque les électrons sont sur leur couche de masse, c'est-à-dire pour des valeurs des impulsions externes telles que $p^2 = m^2 = p'^2$. Ces divergences sont dues à la présence, dans leur définition, du propagateur du photon à masse nulle. En fait, ces singularités traduisent l'existence de forces de longue portée qui mettent en défaut la définition des états asymptotiques in et out.

Notons encore que la fonction

$$i\tilde{\Gamma}_\mu^{II} = 2e^3(\mu^{2-\omega})^3 \int_0^1 dx \int_0^x dy \gamma^\alpha(\not{p}x + \not{q}y - \not{p}' - m)\gamma_\mu(\not{p}x + \not{q}y - \not{p}' - m)\gamma_\alpha \quad (7.3.105)$$

$$i \frac{1}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(3-\omega)}{\Gamma(3)} \frac{1}{[(px + qy)^2 + (p^2 - p'^2)y + (m^2 - p^2)x]^{3-\omega}} \quad (7.3.106)$$

est régulière au voisinage de $\omega = 2$.

Chapitre 8

Renormalisation à une boucle.

8.1 Renormalisation de la théorie en ϕ^4 .

La méthode de renormalisation [méthode des contre-termes] que nous présentons ici bien que la plus usitée en physique des hautes énergies n'est pas celle dont l'interprétation physique est la plus claire. L'idée maîtresse de la renormalisation est cependant toujours la même: elle consiste à prouver que, à tout ordre du développement perturbatif, il est possible de renormaliser la masse, la constante de couplage et le facteur de normalisation du champ, de manière à obtenir une théorie finie. Comme nous l'avons déjà annoncé précédemment, elle sera finie mais arbitraire, car dépendant d'une prescription de renormalisation; deux prescriptions différentes de renormalisation fournissent des parties finies différentes. Il nous restera alors à invoquer le groupe de renormalisation pour démontrer qu'un changement de prescription se traduit en un changement de paramétrisation des éléments de matrice S , c'est-à-dire des amplitudes physiques.

Dans cette méthode, nous regardons les paramètres du lagrangien initial

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda(\mu^2)^{2-\omega}\phi^4 \quad (8.1.1)$$

comme paramètres physiques. Comme nous l'avons montré plus haut, ce lagrangien fournit des fonctions de Green singulières pour $\epsilon = 0$. Cependant, en ajoutant à ce lagrangien, ordre par ordre en λ , des contre-termes, traités comme des termes d'interaction, il est possible d'éliminer les divergences.

En premier lieu, calculons, au premier ordre en λ , la modification $\delta_1(-i\tilde{\Sigma}(p; 2\omega))$ induite par le terme

$$\delta_1\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\lambda m^2\phi^2 A \quad (8.1.2)$$

où A est une constante. Il vient tout de suite, en traitant ce terme comme une interaction et donc en ajoutant une nouvelle règle de Feynman

$$-i(\tilde{\Sigma} + \delta_1\tilde{\Sigma}) = i\lambda\frac{m^2}{2(4\pi)^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + \log\left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right] + 1 + \Gamma'(1)\right] - i\lambda m^2 A + \dots \quad (8.1.3)$$

$$\begin{aligned}
\text{---}\times\text{---} &= -i m^2 A \lambda \\
\text{---}\bigcirc\text{---} &= \frac{1}{2} \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\times\text{---}
\end{aligned}$$

FIG. 8.1 – *Contre-terme de masse*

On voit donc que ceci devient fini pour $\epsilon = 0$ à la condition que

$$A = \frac{1}{2(4\pi)^2\epsilon} + A_1 \quad (8.1.4)$$

où A_1 est une partie finie arbitraire. La prescription de renormalisation consiste à fixer A_1 . Dans la prescription de 't Hooft et Weinberg on choisit $A_1 = 0$: les contre-terme y sont alors minimaux. On voit donc que le nouveau lagrangien

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} + \delta_1 \mathcal{L} \quad (8.1.5)$$

fournit, avec (8.1.4) une théorie finie au premier ordre du calcul perturbatif. Notons que (8.1.5) peut se récrire comme

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 (1 + \lambda A) \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda (\mu^2)^{2-\omega} \phi^4 \quad (8.1.6)$$

qui a la même forme que le lagrangien initial mais dans lequel le paramètre de masse est devenu

$$m^2 \rightarrow m_1^2 = m^2 (1 + \lambda A) \quad (8.1.7)$$

qui, en vertu de (8.1.4) est infini pour $\epsilon = 0$.

Passons au second ordre en λ ; le terme $\delta_1 \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \lambda m^2 \phi^2 A$ modifie la fonction de Green G_4 mais pas le vertex Γ_4 ni sa transformée de Fourier $\tilde{\Gamma}_4$. Considérons la modification $\delta_2 \tilde{\Gamma}_4$ induite par

$$\delta_2 \mathcal{L} = -\frac{1}{4!} \lambda^2 (\mu^2)^\epsilon B \phi^4 \quad (8.1.8)$$

avec la nouvelle règle de Feynman

$$\begin{aligned}
\text{---}\blacksquare\text{---} &= -i B \lambda^2 \mu^{2\epsilon} \\
\text{---}\bigcirc\text{---} &= \text{---}\blacksquare\text{---} + \text{---}\blacksquare\text{---}
\end{aligned}$$

FIG. 8.2 – *Contre-terme de couplage*

$$i \delta_2 \tilde{\Gamma}_4 = -i \lambda^2 (\mu^2)^\epsilon B. \quad (8.1.9)$$

Avec (7.3.81), on voit que si

$$B = \frac{3}{2} \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon} + B_1, \quad (8.1.10)$$

le nouveau vertex $i(\tilde{\Gamma}_4 + \delta_2\tilde{\Gamma}_4)$ est fini pour $\epsilon \rightarrow 0$. Cette opération a nécessité une renormalisation de la constante de couplage: le lagrangien

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \delta_2\mathcal{L} \quad (8.1.11)$$

qui fournit ce résultat a la même forme que le lagrangien \mathcal{L}_1 mais

$$\lambda(\mu^2)^\epsilon \rightarrow \lambda_2 = \lambda(\mu^2)^\epsilon(1 + \lambda B) \quad (8.1.12)$$

qui est aussi infinie pour $\epsilon \rightarrow 0$.

Au second ordre, les termes $\delta_1\mathcal{L} + \delta_2\mathcal{L}$ modifient le propagateur G_2 mais ne le rendent pas encore fini: cette opération nécessite une renormalisation supplémentaire de la masse et une renormalisation du champ ϕ . Au total, la théorie est rendue finie à l'ordre deux en ajoutant au lagrangien initial

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda(\mu^2)^{2-\omega}\phi^4 \quad (8.1.13)$$

les contre-terms

$$\mathcal{L}_{CT} = \mathcal{C}\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\mathcal{A}m^2\phi^2 - \mathcal{B}\frac{1}{4!}\lambda\mu^{2\epsilon}\phi^4 \quad (8.1.14)$$

où $\mathcal{A} = \lambda A + \lambda^2 A'$, $\mathcal{B} = \lambda B$ et $\mathcal{C} = \lambda^2 C$. Le lagrangien total appelé aussi lagrangien nu ("bare lagrangian") est

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT} \quad (8.1.15)$$

$$= (1 + \mathcal{C})\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - (1 + \mathcal{A})\frac{1}{2}m^2\phi^2 - (1 + \mathcal{B})\frac{1}{4!}\lambda\mu^{2\epsilon}\phi^4 \quad (8.1.16)$$

On voit que l'effet des contre-terms est équivalent à la multiplication de ϕ, m, λ par des facteurs de renormalisation "Z"; si l'on définit les quantités nues par

$$\phi_B = \sqrt{Z_\phi}\phi, \quad Z_\phi = 1 + \mathcal{C} \quad (8.1.17)$$

$$m_B = Z_m m, \quad Z_m = (1 + \mathcal{A})/(1 + \mathcal{C}) \quad (8.1.18)$$

$$\lambda_B = \lambda(\mu^2)^\epsilon Z_\lambda, \quad Z_\lambda = (1 + \mathcal{B})/(1 + \mathcal{C})^2 \quad (8.1.19)$$

le lagrangien nu devient

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_B\partial^\mu\phi_B - \frac{1}{2}m_B^2\phi_B^2 - \frac{1}{4!}\lambda_B\phi_B^4. \quad (8.1.20)$$

Dans la théorie complète, les quantités $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sont données par des séries de puissances de λ dont les coefficients sont des polynômes en $\frac{1}{\epsilon}$.

Dans le langage des contre-terms, une théorie est dite renormalisable si les contre-terms nécessaires pour éliminer les divergences, à tous les ordres du calcul de perturbation, ont la même forme que ceux qui figurent dans le lagrangien initial. Si c'est le cas, les quantités nues sont reliées aux paramètres physiques par des facteurs multiplicatifs (infinis) et le lagrangien nu a la même forme que le lagrangien initial. Le lagrangien nu est, rappelons-le, celui qui donne une théorie finie à tous les ordres du développement perturbatif. Les paramètres nus ne sont pas mesurables, peu importe donc qu'ils soient infinis!

8.2 Renormalisation de l'électrodynamique quantique.

Par la même technique de contre-terme, nous allons montrer qu'il est possible d'éliminer les parties singulières pour $\epsilon \rightarrow 0$ de la self-énergie de l'électron, de la polarisation du photon et du vertex électromagnétique obtenus à partir du lagrangien

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 - e\mu^\epsilon \bar{\psi}\gamma^\mu \psi A^\mu. \quad (8.2.21)$$

Voyons d'abord ce qu'apporte le contre-terme suivant

$$\delta_1 \mathcal{L} = -\alpha m A \bar{\psi} \psi. \quad (8.2.22)$$

On voit, qu'au second ordre du calcul de perturbation, ce terme modifie la self-énergie de l'électron par

$$-i(\Sigma + \delta_1 \Sigma) = -i\Sigma(p; 4 - 2\omega) - i\alpha m A. \quad (8.2.23)$$

Avec

$$A = -\frac{1}{\pi\epsilon} + A_1 \quad (8.2.24)$$

le pôle est donc éliminé de la fonction $B(p^2; 4 - 2\epsilon) + \delta_1 B(p^2; 4 - 2\epsilon)$. Voyons ensuite que

$$\delta_2 \mathcal{L} = i\alpha B \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \quad (8.2.25)$$

ajoute à (8.2.23) le terme

$$-\alpha B \hat{p}. \quad (8.2.26)$$

La fonction $A(p^2; 4 - 2\omega) + \delta_2 A(p^2; 4 - 2\omega)$ sera donc finie à la condition de choisir

$$B = -\frac{1}{4\pi\epsilon}. \quad (8.2.27)$$

Ceci correspond à une renormalisation du champ ψ : le champ nu est défini comme

$$\psi_B = \sqrt{Z_2} \psi = \sqrt{(1 + \alpha B)} \psi \quad (8.2.28)$$

tandis que la masse nue de l'électron est

$$m_B = m \frac{(1 + \alpha A)}{(1 + \alpha B)}. \quad (8.2.29)$$

De cette façon, le lagrangien nu de l'électron s'écrit

$$\mathcal{L}_{eB} = \bar{\psi}_B (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_B - m_B \psi_B). \quad (8.2.30)$$

Les contre-terme éliminant les singularités de la polarisation du photon sont de la forme

$$\mathcal{L}_{\gamma, CT} = \alpha C \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right] - \alpha E \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (8.2.31)$$

Comme nous avons choisi, au départ de travailler dans la jauge de Feynman ($\lambda = 1$), bien que dans la régularisation dimensionnelle, $\Pi^{\mu\nu}$ soit transverse, comme requis par l'invariance de jauge, la transformée de Fourier du propagateur photonique est

$$\tilde{D}'_{\mu\nu}(p; 4 - 2\omega) = -\frac{1}{(p^2 + T(p^2; 4 - 2\omega))}g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p^2 + T)} \right]. \quad (8.2.32)$$

Les paramètres C et E sont nécessaires pour éliminer les infinis respectivement dans le coefficient de $g_{\mu\nu}$ et dans le coefficient de $\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$. Les singularités disparaissent avec

$$C = -\frac{1}{3\pi\epsilon} + C_1, \quad (8.2.33)$$

le calcul de E est laissé comme exercice! Il en résulte une renormalisation du champ photonique:

$$A_B^\mu = \sqrt{Z_3}A^\mu = \sqrt{1 + \alpha C}A^\mu \quad (8.2.34)$$

et une renormalisation du paramètre de fixation de la jauge

$$\lambda_B = 1 \frac{(1 + \alpha(C + E))}{(1 + \alpha C)}. \quad (8.2.35)$$

On remarquera que grâce à l'invariance de jauge, la masse du photon ne nécessite pas de renormalisation. Le contraire eut été désastreux! En négligeant les termes de jauge, la transformée de Fourier du propagateur renormalisé est donnée par

$$\tilde{D}'_{\mu\nu}(p; 4 - 2\omega) = \frac{-g_{\mu\nu}}{p^2} \left[1 - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{p^2}{m^2} + O((p^2)^2) \right] \quad (8.2.36)$$

qui a pour effet une modification du potentiel Coulombien en ce sens que le potentiel entre deux charges e devient

$$\alpha \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{15\pi m^2} \delta^3(\vec{r}) \right]. \quad (8.2.37)$$

Le nouveau terme modifie les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène et fournit une contribution significative au "Lamb shift" qui lève la dégénérescence des niveaux $2S_{\frac{1}{2}}$ et $2P_{\frac{1}{2}}$. L'accord entre théorie et expérience confirme la validité de l'électrodynamique.

Il reste à éliminer la singularité du vertex électromagnétique. Ceci peut se faire en ajoutant au lagrangien le contre-terme suivant

$$\mathcal{L}_{int,CT} = -\alpha D e \mu^\epsilon \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu. \quad (8.2.38)$$

qui contribue à $i\tilde{\Gamma}_\mu^{(3)}$ par l'addition de

$$-i\alpha D e \mu^\epsilon \gamma_\mu \quad (8.2.39)$$

et élimine donc la singularité pour la valeur

$$D = -\frac{1}{4\pi\epsilon} + D_1. \quad (8.2.40)$$

Le lagrangien d'interaction nu s'écrit donc

$$\mathcal{L}_{int,B} = -e\mu^\epsilon(1 + \alpha D)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (8.2.41)$$

$$= -Z_1 e\mu^\epsilon \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (8.2.42)$$

$$= -e_B \bar{\psi}_B \gamma^\mu \psi_B A_\mu^B \quad (8.2.43)$$

où la charge nue est définie par

$$e_B = e\mu^\epsilon \frac{(1 + \alpha D)}{(1 + \alpha B)\sqrt{1 + \alpha C}} = e\mu^\epsilon \frac{Z_1}{Z_2\sqrt{Z_3}}. \quad (8.2.44)$$

Rappelons que les identités de Ward imposent (et la régularisation dimensionnelle respecte ces identités) l'égalité

$$Z_1 = Z_2; \quad (8.2.45)$$

on a donc

$$e_B = e\mu^\epsilon (Z_3)^{-\frac{1}{2}} = e\mu^\epsilon \left(1 + \frac{\alpha}{6\pi\epsilon} + \dots\right). \quad (8.2.46)$$

Le lagrangien nu qui donne des propagateurs et une fonction de vertex finis (ici jusqu'à l'ordre deux) est donc

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT} = \bar{\psi}_B(i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_B - m_B\psi_B) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^B F_B^{\mu\nu} - \frac{\lambda_B}{2}(\partial_\mu A_B^\mu)^2 - e_B \bar{\psi}_B \gamma^\mu \psi_B A_B^\mu. \quad (8.2.47)$$

Toutes les quantités infinies ont donc été absorbées dans la définition des quantités nues. A l'ordre deux, l'électrodynamique quantique est renormalisable; elle l'est à tous les ordres!

Chapitre 9

Groupe de renormalisation.

9.1 Théorie en ϕ^4 .

Nous avons vu, dans les sections précédentes, que le lagrangien $\mathcal{L}_B = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT}$ fournit des vertex propres finis à la limite $\epsilon \rightarrow 0$; ce sont les vertex propres renormalisés

$$\tilde{\Gamma}_n^R = \tilde{\Gamma}_n + \delta_{CT}\tilde{\Gamma}_n = \tilde{\Gamma}_n^R(p_1, \dots, p_n; m, \lambda, \mu, \epsilon). \quad (9.1.1)$$

Ils sont reliés aux vertex propres de la théorie nue, exprimés comme fonctions des paramètres nus, par la relation

$$\tilde{\Gamma}_n^B(p_1, \dots, p_n; m_B, \lambda_B, \epsilon) = (Z_\phi)^{-\frac{n}{2}} \tilde{\Gamma}_n^R(p_1, \dots, p_n; m, \lambda, \mu, \epsilon) \quad (9.1.2)$$

Cette relation découle du fait que

$$G_n^B(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \phi_B(x_1) \cdots \phi_B(x_n) | 0 \rangle \quad (9.1.3)$$

$$= Z_\phi^{\frac{n}{2}} \langle 0 | T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle \quad (9.1.4)$$

$$= Z_\phi^{\frac{n}{2}} G_n(x_1, \dots, x_n) \quad (9.1.5)$$

Pour les fonctions de Green amputées, il en résulte

$$(Z_\phi)^n (G_n^B)_{amp} = (Z_\phi)^{\frac{n}{2}} (G_n)_{amp} \quad (9.1.6)$$

donc aussi, pour leurs transformées de Fourier et pour les transformées de Fourier des vertex propres. Dans la relation (9.1.2), on peut voir les paramètres nus m_B, λ_B comme fonctions de m, λ et μ ou, inversement, on peut choisir m_B et λ_B comme paramètres fondamentaux et exprimer les paramètres physiques comme fonction de m_B, λ_B, μ :

$$= m(m_B, \lambda_B, \mu), \quad \lambda = \lambda(m_B, \lambda_B, \mu) \quad (9.1.7)$$

Avec (9.1.7), le membre de gauche de (9.1.2) ne dépend pas de μ : il est donc invariant sous les transformations $\mu \rightarrow \mu e^t$ qui constituent le groupe de renormalisation. Le membre de

droite de (9.1.2), par contre, dépend de μ explicitement et implicitement via m et λ . On a donc

$$\mu \frac{d}{d\mu} \tilde{\Gamma}_n^B = 0 \quad (9.1.8)$$

$$= \mu \frac{d}{d\mu} (Z_\phi)^{-\frac{n}{2}} \tilde{\Gamma}_n^R(p_1, \dots, p_n; m, \lambda, \mu, \epsilon) \quad (9.1.9)$$

$$= -\frac{n}{2} Z_\phi^{-1-\frac{n}{2}} \mu \frac{d}{d\mu} Z_\phi \cdot \tilde{\Gamma}_n^R + (Z_\phi)^{-\frac{n}{2}} \mu \frac{d}{d\mu} \tilde{\Gamma}_n^R. \quad (9.1.10)$$

Ou, en multipliant le tout par $(Z_\phi)^{\frac{n}{2}}$,

$$0 = -\frac{n}{2} \mu \frac{d}{d\mu} \log Z_\phi \cdot \tilde{\Gamma}_n^R + \mu \frac{d}{d\mu} \tilde{\Gamma}_n^R, \quad (9.1.11)$$

ou encore

$$0 = -\frac{n}{2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \log Z_\phi \cdot \tilde{\Gamma}_n^R + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{\Gamma}_n^R + \mu \frac{\partial m}{\partial \mu} \frac{\partial \tilde{\Gamma}_n^R}{\partial m} + \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \frac{\partial \tilde{\Gamma}_n^R}{\partial \lambda}. \quad (9.1.12)$$

C'est une équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle satisfont tous les vertex propres renormalisés. Avec les définitions suivantes

$$\gamma(\lambda, \frac{m}{\mu}, \epsilon) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \log \sqrt{Z_\phi} \quad (9.1.13)$$

$$\beta(\lambda, \frac{m}{\mu}, \epsilon) = \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \quad (9.1.14)$$

$$m\gamma_m(\lambda, \frac{m}{\mu}, \epsilon) = \mu \frac{\partial m}{\partial \mu} \quad (9.1.15)$$

l'équation (9.1.12) devient

$$[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma + m\gamma_m \frac{\partial}{\partial m}] \tilde{\Gamma}_n^R = 0. \quad (9.1.16)$$

C'est l'équation du groupe de renormalisation.

On peut écrire une seconde équation pour les vertex propres renormalisés en prenant pour point de départ le fait que $\tilde{\Gamma}_n^R$ possède une dimension qui est

$$M^{4-n+\epsilon(n-2)}. \quad (9.1.17)$$

Ceci s'établit sans peine, à partir de l'action effective dont les vertex propres sont les coefficients du développement en puissances de ϕ_{cl} , puis en passant à leurs transformées de Fourier. Il s'en suit que si l'on multiplie tous les paramètres qui ont les dimensions d'une masse (m, μ, p_i) par un facteur s , la fonction $\tilde{\Gamma}_n^R$ sera multipliée par $s^{4-n+\epsilon(n-2)}$:

$$\tilde{\Gamma}_n^R(sp_i, \lambda, sm, s\mu, \epsilon) = s^{4-n+\epsilon(n-2)} \tilde{\Gamma}_n^R(p_i, \lambda, m, \mu, \epsilon). \quad (9.1.18)$$

Donc aussi

$$\tilde{\Gamma}_n^R(p_i, \lambda, m, \mu, \epsilon) = s^{-[4-n+\epsilon(n-2)]} \tilde{\Gamma}_n^R(sp_i, \lambda, sm, s\mu, \epsilon). \quad (9.1.19)$$

Puisque le membre de gauche de (9.1.19) ne dépend pas de s , sa dérivée par rapport à s est nulle, donc aussi

$$0 = [s \frac{\partial}{\partial s} + m \frac{\partial}{\partial m} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} - (4 - n + \epsilon(n - 2))] \tilde{\Gamma}_n^R(sp_i, \lambda, sm, s\mu, \epsilon). \quad (9.1.20)$$

En éliminant $\mu \frac{\partial \tilde{\Gamma}_n^R}{\partial \mu}$ entre (9.1.16) et (9.1.20), il reste, en $\epsilon = 0$, l'équation

$$0 = [-s \frac{\partial}{\partial s} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + (\gamma_m - 1)m \frac{\partial}{\partial m} + (4 - n - n\gamma)] \tilde{\Gamma}_n^R(sp_i, \lambda, m, \mu, \epsilon = 0). \quad (9.1.21)$$

Cette équation permet d'évaluer le comportement des vertex propres pour des grandes impulsions externes. Pour une prescription générale de renormalisation, les fonctions qui forment les coefficients de ces équations aux dérivées partielles dépendent des deux variables λ et $\frac{m}{\mu}$. Dans la prescription de 't Hooft et Weinberg dite aussi prescription de soustraction minimale, dans laquelle toutes les parties finies des contre-termes sont nulles, les fonctions définies en (9.1.15) ne dépendent que de la seule variable λ . Par exemple, dans cette prescription, on a

$$\lambda_B = \mu^{2\epsilon} [\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\lambda)}{\epsilon^k}] \quad (9.1.22)$$

et donc, avec λ_B et m_B comme paramètres fondamentaux,

$$\mu \frac{d}{d\mu} \lambda_B = 0 \quad (9.1.23)$$

$$= 2\epsilon \mu^{2\epsilon} [\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\lambda)}{\epsilon^k}] + \mu^{2\epsilon+1} \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} [1 + \sum_k \frac{a'_k}{\epsilon^k}] \quad (9.1.24)$$

Ou, en divisant tout par $\mu^{2\epsilon}$,

$$0 = 2\epsilon [\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\lambda)}{\epsilon^k}] + \beta [1 + \sum_k \frac{a'_k}{\epsilon^k}]. \quad (9.1.25)$$

En égalant à zéro la partie analytique en ϵ , et en tenant compte de ce que les a_k sont des développements en puissances de λ , il vient

$$\beta = -2\epsilon\lambda - 2a_1 + 2\lambda a'_1 \quad (9.1.26)$$

d'où, à la limite $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\beta = \beta(\lambda) = -2a_1 + 2\lambda a'_1. \quad (9.1.27)$$

β ne dépend que de λ et est déterminée par le résidu du pôle d'ordre 1 en $\epsilon = 0$.

Nous avons trouvé précédemment en renormalisant la théorie en ϕ^4 , et en utilisant la prescription de 't Hooft-Weinberg,

$$\lambda_B = \lambda \mu^{2\epsilon} [1 + \frac{3\lambda}{2(4\pi)^2 \epsilon}], \quad (9.1.28)$$

on en déduit donc, au second ordre,

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2}. \quad (9.1.29)$$

Puisque $\beta = \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}$, l'équation ci-dessus peut être résolue pour $\lambda = \lambda(\mu)$; on trouve, avec la condition $\lambda_0 = \lambda(\mu_0)$:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\left[1 - \frac{3\lambda_0}{(4\pi)^2} \log \frac{\mu}{\mu_0}\right]}. \quad (9.1.30)$$

Ainsi, partant d'un petit λ_0 à une échelle μ_0 , la constante de couplage effective $\lambda(\mu)$ croît avec μ ; ceci implique aussi que la série perturbative devient caduque. λ devient infinie pour $1 = \frac{3\lambda_0}{(4\pi)^2} \log \frac{\mu}{\mu_0}$, ou $\mu = \mu_0 \exp \frac{(4\pi)^2}{3\lambda_0}$.

On ne sait pas calculer $\beta(\lambda)$ pour λ grand, mais on peut présenter des situations possibles, partant de $\beta = 0$, pour $\lambda = 0$ qui est le point de non interaction.

1) $\beta(\lambda)$ est positif et croît avec λ .

2) il existe une valeur λ_F appelée point fixe, stable, ultra-violet tel que, au voisinage de λ_F ,

$$\beta = \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = (\lambda - \lambda_F) \beta'(\lambda_F) + \dots \quad (9.1.31)$$

et $\beta'(\lambda_F)$ est négatif. Pour $\lambda < \lambda_F$, $\mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}$ est > 0 donc λ augmente avec μ jusqu'à λ_F ; pour $\lambda > \lambda_F$, $\mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}$ est < 0 donc λ diminue jusqu'à λ_F quand μ augmente.

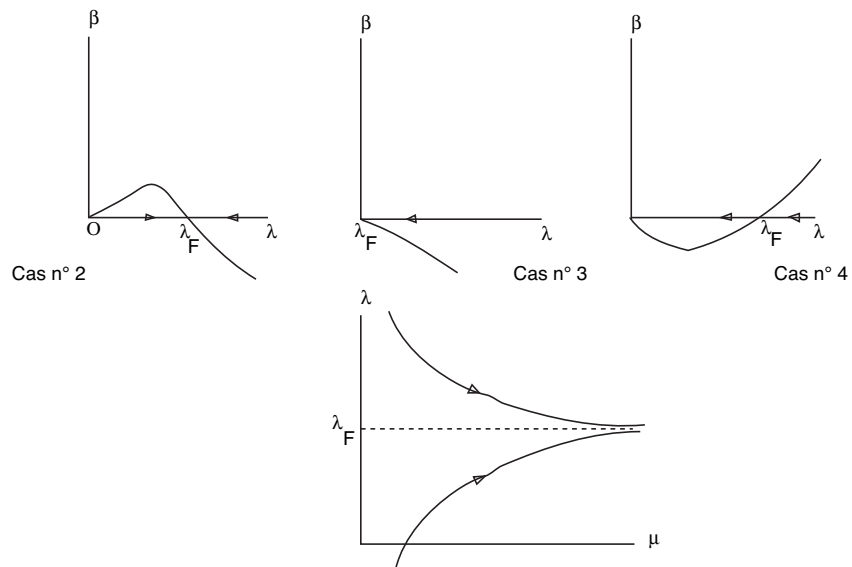


FIG. 9.1 – Comportements possibles pour β

3) $\lambda_F = 0$, pour $\mu \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 0$. Ce cas réalise la condition dite de "liberté asymptotique". C'est la situation que l'on rencontre dans les théories de jauge non-abéliennes.

4) λ_F est un point fixe stable infra-rouge si, au voisinage de λ_F , on a $\mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = (\lambda - \lambda_F) \beta'(\lambda_F) + \dots$ avec $\beta'(\lambda_F)$ positif. Dans ce cas, si $\lambda < \lambda_F$, $\lambda \rightarrow 0$ quand μ augmente, tandis que pour $\lambda > \lambda_F$, $\lambda \rightarrow \infty$ quand μ augmente. Cette situation est celle de la théorie en ϕ^4 pour $\epsilon > 0$.

9.1.1 Résolution de l'équation (9.1.16) dans la prescription de 't Hooft-Weinberg.

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma + m\gamma_m \frac{\partial}{\partial m} \right] \tilde{\Gamma}_n^R = 0. \quad (9.1.32)$$

1) équation homogène associée et courbes caractéristiques.

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + m\gamma_m \frac{\partial}{\partial m} \right] \tilde{\Gamma}_n^R = 0 \quad (9.1.33)$$

$$d\tilde{\Gamma}_n^R = \left[d\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + d\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + dm \frac{\partial}{\partial m} \right] \tilde{\Gamma}_n^R = 0. \quad (9.1.34)$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{d\lambda}{\beta(\lambda)} = \frac{dm}{m\gamma_m(\lambda)} = dt. \quad (9.1.35)$$

On en tire,

a)

$$\frac{d\mu}{\mu} = dt, \quad t = \int_{\mu}^{\bar{\mu}} \frac{d\mu'}{\mu'} = \log \frac{\bar{\mu}}{\mu} \quad (9.1.36)$$

ou

$$\bar{\mu}(t) = \mu e^t, \quad \bar{\mu}(0) = \mu. \quad (9.1.37)$$

b)

$$\frac{d\lambda}{\beta(\lambda)} = dt, \quad t = \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} \quad (9.1.38)$$

ou

$$\bar{\lambda}(t) = \bar{\lambda}(\lambda, t), \quad \bar{\lambda}(0) = \lambda. \quad (9.1.39)$$

c)

$$\frac{dm}{m\gamma_m(\lambda)} = dt, \quad \frac{dm}{m} = dt \gamma_m(\bar{\lambda}(t)) \quad (9.1.40)$$

d'où

$$\bar{m}(t) = m e^{\int_0^t dt' \gamma_m(t')} = \bar{m}(m, t), \quad \bar{m}(0) = m. \quad (9.1.41)$$

Par définition, le long de la caractéristique par (λ, m, μ) ,

$$\tilde{\Gamma}_n^R(p_i, \lambda, m, \mu) = \tilde{\Gamma}_n^R(p_i, \bar{\lambda}(t), \bar{m}(t), \bar{\mu}(t)). \quad (9.1.42)$$

2) L'équation complète détermine la variation de $\tilde{\Gamma}_n^R$ le long de la caractéristique par

$$d\tilde{\Gamma}_n^R = n\gamma(\lambda) \tilde{\Gamma}_n^R dt \quad (9.1.43)$$

ou

$$\frac{d\tilde{\Gamma}_n^R}{n\gamma\tilde{\Gamma}_n^R} = dt \quad (9.1.44)$$

ou

$$\frac{d\tilde{\Gamma}_n^R}{\tilde{\Gamma}_n^R} = n\gamma(\bar{\lambda}(t))dt \quad (9.1.45)$$

d'où il vient enfin

$$\tilde{\Gamma}_n^R(t) = \tilde{\Gamma}_n^R(0).e^{n\int_0^t dt'\gamma_m(t')} \quad (9.1.46)$$

ou, en inversant la relation

$$\tilde{\Gamma}_n^R(p_i, \lambda, m, \mu) = \tilde{\Gamma}_n^R(p_i, \bar{\lambda}(t), \bar{m}(t), \bar{\mu}(t)) e^{-n\int_0^t dt'\gamma_m(t')}. \quad (9.1.47)$$

Ceci est la solution de l'équation du groupe de renormalisation. Elle exprime que le changement de μ en μe^t peut toujours être compensé par les changements $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}(t)$, $m \rightarrow \bar{m}(t)$, et par un changement de normalisation du champ; notons en effet que

$$\int_0^t dt'\gamma_m(t') = \int_\mu^{\bar{\mu}(t)} \frac{d\mu'\gamma(\lambda(\mu'))}{\mu'} = \int_\mu^{\bar{\mu}(t)} d\mu' \frac{\partial \log \sqrt{Z_\phi}}{\partial \mu'} = \log \sqrt{\frac{Z_\phi(\bar{\mu}(t))}{Z_\phi(\mu)}} \quad (9.1.48)$$

on a donc aussi l'égalité

$$\tilde{\Gamma}_n^R(p_i, \lambda, m, \mu) Z_\phi(\mu)^{-\frac{n}{2}} = \tilde{\Gamma}_n^R(p_i, \bar{\lambda}(t), \bar{m}(t), \bar{\mu}(t)) Z_\phi(\bar{\mu}(t))^{-\frac{n}{2}}. \quad (9.1.49)$$

Ceci, utilisé dans la formule de réduction établit l'invariance des éléments de matrice S sous les changements de prescriptions de renormalisation.

9.1.2 Résolution de l'équation (9.1.21) dans la prescription de 't Hooft-Weinberg.

Rappelons cette équation

$$0 = [-s\frac{\partial}{\partial s} + \beta\frac{\partial}{\partial \lambda} + (\gamma_m - 1)m\frac{\partial}{\partial m} + (4 - n - n\gamma)]\tilde{\Gamma}_n^R(sp_i, \lambda, m, \mu, \epsilon = 0). \quad (9.1.50)$$

1) Associons à cette équation, l'équation homogène en les dérivées partielles

$$0 = [-s\frac{\partial}{\partial s} + \beta\frac{\partial}{\partial \lambda} + (\gamma_m - 1)m\frac{\partial}{\partial m}]\tilde{\Gamma}_n^R(sp_i, \lambda, m, \mu), \quad (9.1.51)$$

et recherchons les courbes caractéristiques telles que, le long de ces caractéristiques on ait

$$d\tilde{\Gamma}_n^R = 0. \quad (9.1.52)$$

$$d\tilde{\Gamma}_n^R = \frac{\partial \tilde{\Gamma}_n^R}{\partial s} ds + \frac{\partial \tilde{\Gamma}_n^R}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \tilde{\Gamma}_n^R}{\partial m} dm \quad (9.1.53)$$

D'où on tire

$$-\frac{ds}{s} = \frac{d\lambda}{\beta} = \frac{dm}{m(\gamma_m - 1)}. \quad (9.1.54)$$

En recherchant les équations des caractéristiques comme fonctions du paramètre t , on obtient successivement

$$-\frac{ds}{s} = dt \rightarrow \int_s^{\bar{s}} (-) \frac{ds'}{s'} = t = \log \frac{s}{\bar{s}}, \quad \bar{s}(t) = se^{-t}, \quad \bar{s}(0) = s. \quad (9.1.55)$$

$$\frac{d\lambda}{\beta} = dt \rightarrow \int_\lambda^{\bar{\lambda}} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} = t, \quad \bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\lambda, t), \quad \bar{\lambda}(0) = \lambda. \quad (9.1.56)$$

$$\frac{dm}{m(\gamma_m - 1)} = dt = \frac{dm}{m[\gamma_m(\bar{\lambda}(t) - 1)]} \rightarrow \int_0^t dt' [\gamma_m - 1] = \int_m^{\bar{m}} \frac{dm'}{m'} = \log \frac{\bar{m}}{m} \quad (9.1.57)$$

$$\bar{m}(t) = m \exp \int_0^t dt' [\gamma_m - 1] = \bar{m}(m, t), \quad \bar{m}(0) = m. \quad (9.1.58)$$

Ainsi, le long de la caractéristique qui passe par le point (s, λ, m) , par définition,

$$\tilde{\Gamma}_n^R(sp_i, \lambda, m, \mu) = \tilde{\Gamma}_n^R(\bar{s}(t)p_i, \bar{\lambda}(t), \bar{m}(t), \mu) = \tilde{\Gamma}_n^R(\bar{s}(t_0)p_i, \bar{\lambda}(t_0), \bar{m}(t_0), \mu). \quad (9.1.59)$$

Choisissons pour t_0 la valeur du paramètre t pour laquelle $\bar{s}(t_0) = 1$ c'est-à-dire, $t_0 = \log s$. Pour cette valeur,

$$\bar{s}(t_0) = 1 \quad (9.1.60)$$

$$\bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}(\lambda, \log s) = \bar{\lambda}(\lambda, s) \quad (9.1.61)$$

$$\bar{m}(t_0) = \bar{m}(m, \log s) = \bar{m}(m, s) \quad (9.1.62)$$

$\bar{\lambda}(\lambda, s)$ est la constante de couplage effective, $\bar{m}(m, s)$ est la masse effective. Il vient donc

$$\tilde{\Gamma}_n^R(sp_i, \lambda, m, \mu) = \tilde{\Gamma}_n^R(p_i, \bar{\lambda}(\lambda, s), \bar{m}(m, s), \mu). \quad (9.1.63)$$

2) L'équation (9.1.21) complète va permettre d'exprimer la variation de $\tilde{\Gamma}_n^R$ le long de la caractéristique.

$$\left[-s \frac{\partial}{\partial s} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + (\gamma_m - 1)m \frac{\partial}{\partial m} \right] \tilde{\Gamma}_n^R(sp_i, \lambda, m, \mu) = [n - 4 + n\gamma] \tilde{\Gamma}_n^R \quad (9.1.64)$$

$$= d\tilde{\Gamma}_n^R \quad (9.1.65)$$

donc aussi,

$$\frac{d\tilde{\Gamma}_n^R}{[n - 4 + n\gamma] \tilde{\Gamma}_n^R} = dt \quad (9.1.66)$$

dont la solution est,

$$\tilde{\Gamma}_n^R(t) = \tilde{\Gamma}_n^R(0) \cdot \exp[(n - 4)t + n \int_0^t dt' \gamma(t')] \quad (9.1.67)$$

ou, en inversant et en considérant ce qui se produit en $t = t_0 = \log s$,

$$\tilde{\Gamma}_n^R(sp_i, \lambda, m, \mu) = \tilde{\Gamma}_n^R(p_i, \bar{\lambda}(\lambda, s), \bar{m}(m, s), \mu) s^{4-n} e^{-n \int_1^s \frac{ds'}{s'} \gamma(s')}. \quad (9.1.68)$$

Ceci est la solution recherchée en termes de la constante de couplage et de la masse effectives. Ainsi, lorsqu'on change l'échelle des impulsions externes par le facteur s , les vertex propres de la théorie changent avec s par l'intermédiaire des constante de couplage et masse effectives, par le facteur s^{4-n} qui exprime leur dimension normale et par le facteur exponentiel qui introduit une dimension anormale. Pour $s \rightarrow \infty$, les $\tilde{\Gamma}_n^R(sp_i, \lambda, m, \mu)$ ont leur comportement gouverné par $\bar{\lambda}(\lambda, s)$ et $\bar{m}(m, s)$. Supposons que la théorie admette un point fixe stable ultra-violet, c'est-à-dire que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \bar{\lambda}(\lambda, s) = \lambda_F \quad (9.1.69)$$

alors

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma_m(\bar{\lambda}) = \gamma_m(\lambda_F), \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \gamma(\bar{\lambda}) = \gamma(\lambda_F). \quad (9.1.70)$$

Il vient ensuite

$$\bar{m}(m, logs) \approx m s^{[\gamma_m(\lambda_F) - 1]} \quad (9.1.71)$$

et

$$\int_1^s \frac{ds'}{s'} \gamma(s') \approx \gamma(\lambda_F) \cdot logs \quad (9.1.72)$$

et

$$e^{-n \int_1^s \frac{ds'}{s'} \gamma(s')} \approx s^{-n \gamma(\lambda_F)} \quad (9.1.73)$$

qui est vraiment la signature d'une dimension anormale. Dans ce cas, pour $s \rightarrow \infty$,

$$\tilde{\Gamma}_n^R(sp_i, \lambda, m, \mu) \approx s^{4-n-n\gamma(\lambda_F)} \tilde{\Gamma}_n^R(p_i, \lambda_F, m s^{\gamma_m(\lambda_F) - 1}, \mu). \quad (9.1.74)$$

Ceci est intéressant lorsque $[\gamma_m(\lambda_F) - 1]$ est négatif, puisqu'alors la masse effective devient nulle. On peut voir aussi, en changeant de variable par $-\frac{ds'}{s'} = \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')}$, que

$$-\int_1^s \frac{ds'}{s'} [\gamma_m(s') - 1] = \int_{\bar{\lambda}(s)}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} [\gamma_m(\lambda') - 1]. \quad (9.1.75)$$

A moins que $[\gamma_m - 1]$ et β n'aient des zéros simultanés, on voit que la contribution dominante à la dernière intégrale vient des zéros de β , c'est-à-dire, des points fixes. L'intérêt primordial de cette étude se trouve lorsque le point fixe stable ultra-violet est nul (liberté asymptotique): on voit dans ce cas, que la fonction $\Gamma_n^R(p_i, \lambda_F, m s^{\gamma_m(\lambda_F) - 1}, \mu)$ peut être calculée perturbativement au voisinage de $\lambda_F = 0$, en négligeant les masses si $\gamma_m(0) < 1$.

Dans la théorie en ϕ^4 limitée au second ordre, on a obtenu, utilisant la prescription de 'tHooft-Weinberg,

$$\gamma_m(\lambda) = \frac{\lambda}{(4\pi)^2} + \frac{7}{12} \left(\frac{\lambda}{(4\pi)^2} \right)^2 \quad (9.1.76)$$

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda}{(4\pi)^2} \right)^2 \quad (9.1.77)$$

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} \quad (9.1.78)$$

On en déduit

$$\bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}(\lambda, s) = \frac{\lambda}{1 - \frac{3}{(4\pi)^2} \lambda \log s} \quad (9.1.79)$$

et

$$\bar{m}(m, s) = \frac{m}{s} \left(\frac{\bar{\lambda}(\lambda, s)}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{7[\bar{\lambda}(\lambda, s) - \lambda]}{36(4\pi)^2}}. \quad (9.1.80)$$

Ces résultats ne sont valables que pour s petit!

9.2 Electrodynamique quantique.

Dans la prescription de 'tHooft-Weinberg, à l'ordre deux,

$$e_B = e\mu^\epsilon \left[1 + \frac{\alpha}{6\pi\epsilon}\right]. \quad (9.2.81)$$

On en déduit, à la limite $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\mu \frac{\partial e}{\partial \mu} = \beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} \quad (9.2.82)$$

dont la solution est

$$e^2(\mu) = \frac{e^2(\mu_0)}{1 - \frac{e^2(\mu_0)}{6\pi^2} \log \frac{\mu}{\mu_0}}. \quad (9.2.83)$$

Comme dans la théorie en ϕ^4 , la charge effective $e^2(\mu)$ augmente avec μ jusqu'à la singularité de Landau pour

$$\mu = \mu_0 \exp \frac{6\pi^2}{e^2(\mu_0)}. \quad (9.2.84)$$

Avant d'atteindre cette singularité, le calcul perturbatif limité à l'ordre deux n'est plus valable!

La croissance de e lorsque μ augmente, c'est-à-dire, lorsque la distance diminue est analogue à ce qui se produit en électrostatique dans un milieu diélectrique. Ici, la présence d'une charge électrique polarise le milieu de sorte que la charge mesurée à une certaine distance apparaît plus petite que celle mesurée tout près. A une distance bien inférieure aux distances inter-moléculaires ou inter-atomiques, c'est la charge nue que l'on atteint. La même situation se présente en électrodynamique quantique: le graphe de polarisation du photon peut s'interpréter comme si le vide était rempli de paires virtuelles $e^+ e^-$ qui font écran à la charge nue. La situation est toute différente en chromodynamique quantique qui est une théorie asymptotiquement libre.

Chapitre 10

Moment magnétique anomal de l'électron.

Après avoir éliminé la partie singulière de la fonction de vertex électromagnétique par renormalisation, fixons à présent notre attention sur la contribution finie $\tilde{\Gamma}_\mu^{II}(p',q,p)$ au vertex électromagnétique, avec $2\omega = 4$

$$\tilde{\Gamma}_\mu^{II} = e \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{\gamma^\beta (\not{p}x + \not{q}y - \not{p}' - m) \gamma_\mu (\not{p}x + \not{q}y - \not{p} - m) \gamma_\beta}{[(px + qy)^2 + (p^2 - p'^2)y + (m^2 - p^2)x]}. \quad (10.0.1)$$

Nous allons montrer que si nous interprétons la partie de l'action effective à laquelle elle contribue comme une correction à l'action de Dirac, dans un champ électromagnétique extérieur, elle fournit, à l'ordre α , l'anomalie du moment magnétique de l'électron qui s'ajoute au moment magnétique de Dirac pour donner le moment magnétique

$$\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) \quad (10.0.2)$$

magnétons de Bohr. Nous nous contenterons ici de calculer (10.0.1) sandwiché entre $\bar{u}(p')$ à gauche et $u(p)$ à droite, ce qui permet d'utiliser les équations de Dirac

$$(\not{p} - m)u(p) = 0, (p^2 - m^2)u(p) = 0, \bar{u}(p')(\not{p}' - m) = 0, \bar{u}(p')(p'^2 - m^2) = 0 \quad (10.0.3)$$

et pour le potentiel considéré comme extérieur,

$$\square A_\mu(x) = 0, \quad q^2 \tilde{A}_\mu(q) = 0. \quad (10.0.4)$$

Ainsi, avec $p^2 = p'^2 = m^2$ et $q^2 = 0$ et puisque $q = p' - p$,

$$q^2 = p'^2 + p^2 - 2p.p' = 2m^2 - 2p.p' = 0 \quad (10.0.5)$$

et

$$q.p = (p' - p).p = p'.p - m^2 = 0, \quad (10.0.6)$$

le dénominateur de (10.0.1) se réduit à

$$\text{Dénominateur} = m^2 x^2. \quad (10.0.7)$$

Le calcul du numérateur est un peu plus long: il fait appel aux propriétés des matrices γ ; tous calculs faits, le numérateur vaut

$$\text{Numérateur} = \gamma_\mu F + i\sigma_{\mu\nu} q^\nu (-) 2mx(1-x). \quad (10.0.8)$$

Nous ne nous occuperons pas du coefficient de γ_μ qui ne contribue pas au moment magnétique et qui, de plus, présente une divergence infra-rouge. Le terme en $\sigma_{\mu\nu} q^\nu$ de (10.0.1) vaut

$$-e \frac{\alpha}{4\pi} \frac{2}{m} i\sigma_{\mu\nu} q^\nu \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1-x}{x} = -e \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{2m} i\sigma_{\mu\nu} q^\nu. \quad (10.0.9)$$

Sa contribution à l'action effective

$$\int d^4x d^4y d^4z \bar{\psi}_{cl}(z) \Gamma^{(3)\mu}(z, x, \bar{y}) \psi_{cl}(y) A_{cl, \mu}(x) \quad (10.0.10)$$

$$= \int d^4x d^4y d^4z \bar{\psi}_{cl}(z) \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4p' d^4p d^4q \delta^4(q-p'+p) \tilde{\Gamma}_\mu^{(3)}(p', q, p) e^{-ip'z + ipy + iqx} \psi_{cl}(y) A_{cl, \mu}(x) \quad (10.0.11)$$

est donnée par

$$-e \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{4m} \int d^4x \bar{\psi}_{cl}(x) \sigma_{\mu\nu} F_{cl}^{\mu\nu}(x) \psi_{cl}(x). \quad (10.0.12)$$

En le considérant comme une correction à l'action de Dirac dans un champ électromagnétique extérieur, il modifie le lagrangien de Dirac par l'addition du terme suivant

$$-e \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{4m} \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \psi(x) \quad (10.0.13)$$

et modifie les équations de Dirac par un terme de Pauli avec $\kappa = \frac{\alpha}{2\pi}$

$$i\gamma^\mu [\partial_\mu + ieA_\mu] \psi - m\psi = e \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{4m} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \psi = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\mu_0}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \psi. \quad (10.0.14)$$

Ce qui établit le résultat annoncé.

Chapitre 11

Théorie de jauge non abélienne: lagrangien.

11.1 Symétrie $SU(3)$ globale puis locale

Considérons d'abord, pour simplifier l'exposé qu'il n'y a dans la nature qu'un seul type de quarks, de trois couleurs différentes; il leur est associé un triplet de champs spinoriels de même masse, libellés par un indice $A = 1, 2, 3$. La densité lagrangienne des quarks libres

$$\mathcal{L}_0 = \sum_A \bar{\psi}_A (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi^A - m\psi^A) \quad (11.1.1)$$

est invariante sous les transformations globales du groupe $SU(3)$, que l'on identifie ici à sa représentation fondamentale "3", pour lesquelles

$$\psi'^A(x) = U_B^A \psi^B(x); \quad \bar{\psi}'_A(x) = \bar{\psi}_B(x) (U^+)^B_A. \quad (11.1.2)$$

Le groupe $SU(3)$ est un groupe de Lie connexe et compact, à huit dimensions réelles; les éléments de ce groupe sont les images par l'application \exp de l'algèbre de Lie $su(3)$: la matrice U s'écrit comme

$$U = \exp Y; \quad Y \in su(3), \quad (11.1.3)$$

c'est-à-dire, Y est une matrice antihermitienne de trace nulle (en posant $Y = -i\tilde{Y}$, \tilde{Y} est une matrice hermitienne de trace nulle). Dans la base $\{T_a\}$, $a = 1, \dots, 8$ de $su(3)$, $T_a^+ = -T_a$, les constantes de structure, réelles, sont définies par

$$[T_a, T_b] = T_c C_{ab}^c \quad (11.1.4)$$

et tout élément Y s'écrit comme

$$Y = \sum_a y^a T_a, \quad y^a \in \mathbb{R}. \quad (11.1.5)$$

La théorie de jauge correspondant au modèle ci-dessus se construit en modifiant la densité lagrangienne \mathcal{L}_0 de telle façon qu'elle devienne invariante sous les transformations

locales du type (11.1.2), c'est-à-dire, sous les transformations (11.1.2) avec $U = U(x)$ ou

$$U(x) = \exp Y(x) = \exp y^a(x) T_a, \quad U^+(x) = \exp(-y^a(x) T_a) \quad (11.1.6)$$

Sous les transformations (11.1.6),

$$\psi'^A(x) = (e^{y^a(x) T_a})^A_B \psi^B(x), \quad \bar{\psi}'_A(x) = \bar{\psi}_B(x) (e^{-y^a(x) T_a})^B_A \quad (11.1.7)$$

Leurs dérivées respectives sont liées par

$$\partial_\mu \psi'^A(x) = U(x)^A_B \partial_\mu \psi^B(x) + (\partial_\mu U(x))^A_B \psi^B(x) \quad (11.1.8)$$

$$\partial_\mu \bar{\psi}'_A(x) = \partial_\mu \bar{\psi}_B(x) U^+(x)^B_A + \bar{\psi}_B(x) \partial_\mu U^+(x)^B_A \quad (11.1.9)$$

Ces relations traduisent le fait que, dans l'opération de dérivation, on a soustrait des objets qui n'ont pas la même loi de transformation sous l'action du groupe de jauge. La question se pose dès lors, de remplacer les dérivées ordinaires $\partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi}$ par des dérivées covariantes $\mathcal{D}_\mu \psi, \mathcal{D}_\mu \bar{\psi}$ telles que, sous les transformations (11.1.7), on ait

$$[\mathcal{D}_\mu \psi'(x)]^B = U(x)^B_C [\mathcal{D}_\mu \psi(x)]^C \quad (11.1.10)$$

et

$$[\mathcal{D}_\mu \bar{\psi}'(\xi)]_B = [\mathcal{D}_\mu \bar{\psi}(\xi)]_C U^+(\xi)^C_B \quad (11.1.11)$$

11.2 Dérivées covariantes

Ceci se fait en introduisant une connexion $A_\mu(x)$, qui permet de définir le transport d'un spineur en x en un spineur en $x + \delta x$, variables de la représentation "3" du groupe de jauge, par

$$\psi_t^B(x + \delta x) = \psi^B(x) + \delta x^\mu A_\mu(x)^B_C \psi^C(x). \quad (11.2.12)$$

La condition imposée est donc que

$$\psi_t^B(x + \delta x) = U_C^B(x + \delta x) \psi_t^C(x + \delta x) \quad (11.2.13)$$

ou

$$\psi'^B(x) + \delta x^\mu A'_\mu(x)^B_C \psi'^C(x) = [U(x) + \delta x^\mu \partial_\mu U(x)]^B_C [\psi^C(x) + \delta x^\mu A_\mu(x)^C_D \psi^D(x)] \quad (11.2.14)$$

On en déduit, quel que soit ψ , la loi de transformation de la connexion

$$A'_\mu(x)^B_C U_D^C(x) = \partial_\mu U(x)^B_C + U_C^B(x) A_\mu(x)^C_D \quad (11.2.15)$$

ou encore que

$$A'_\mu(x)^B_D = U_C^B(x) A_\mu(x)^C_E (U^+)^E_D(x) + [\partial_\mu U(x)]^B_C (U^+)^C_D(x). \quad (11.2.16)$$

Puisque U est unitaire, la loi de transformation (11.2.16) est équivalente à

$$A'_\mu(x)^B_D = U_C^B(x) A_\mu(x)^C_E (U^+)^E_D(x) - U_C^B(x) [\partial_\mu U^+(x)]^C_D. \quad (11.2.17)$$

ou encore, sous forme matricielle,

$$A'_\mu(x) = U(x) A_\mu(x) U^+(x) - U(x) \partial_\mu U^+(x). \quad (11.2.18)$$

La différence, $\psi^B(x + \delta x) - \psi_t^B(x + \delta x)$, pour δx^μ infinitésimal, définit la dérivée covariante des variables de la représentation "3" par

$$\psi^B(x + \delta x) - \psi_t^B(x + \delta x) = \delta x^\mu [\mathcal{D}_\mu \psi(x)]^B. \quad (11.2.19)$$

$$[\mathcal{D}_\mu \psi(x)]^B = \partial_\mu \psi^B(x) - A_\mu(x)_C^B \psi^C(x). \quad (11.2.20)$$

Puisque $(\bar{\psi}_B(x) \psi^B(x))$ est invariant sous le groupe de jauge,

$$\mathcal{D}_\mu(\bar{\psi}_B(x) \psi^B(x)) = \partial_\mu(\bar{\psi}_B(x) \psi^B(x)), \quad (11.2.21)$$

on en déduit la dérivée covariante des variables de la représentation "3"

$$[\mathcal{D}_\mu \bar{\psi}(x)]_B = \partial_\mu \bar{\psi}_B(x) + \bar{\psi}_C(x) A_\mu(x)_B^C. \quad (11.2.22)$$

La connexion A_μ appartient au même espace que $U \partial_\mu U^+ = -(U \partial_\mu U^+)^+$; c'est dire que A_μ est un vecteur en x (1-forme) à valeurs dans l'algèbre de Lie $su(3)$. A l'aide de la base $\{T_a\}$, on écrit

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T_a, \quad A_\mu(x)_C^B = A_\mu^a(x) (T_a)_C^B, \quad (11.2.23)$$

ce qui associe donc à la connexion les 8 champs vectoriels (potentiels) $A_\mu^a(x)$. En chromodynamique quantique, les particules de spin 1 associées à ces champs sont appelées "gluons". En portant (11.2.23) dans la relation (11.2.17), il vient

$$A_\mu^{a'}(x) T_a = A_\mu^a(x) U(x) T_a U^+(x) - U(x) \partial_\mu U^+(x) \quad (11.2.24)$$

$$= A_\mu^a(x) Ad_U(x)(T_a) - U(x) \partial_\mu U^+(x) \quad (11.2.25)$$

où, par définition de la représentation adjointe du groupe,

$$Ad_U(T_a) = U T_a U^+ = T_b [Ad_U]^b_a. \quad (11.2.26)$$

Pour U infiniment proche du neutre,

$$U = I + y^b T_b, \quad (11.2.27)$$

$$Ad_U(T_a) = (I + y^b T_b) T_a (I - y^c T_c) \quad (11.2.28)$$

$$= T_a + y^b [T_b, T_a] \quad (11.2.29)$$

$$= T_a + y^b ad_{T_b}(T_a) \quad (11.2.30)$$

$$= (I + y^b ad_{T_b}) T_a \quad (11.2.31)$$

$$= (I + ad_Y)(T_a). \quad (11.2.32)$$

Pour $U = e^Y$, on peut démontrer que

$$Ad_U = e^{y^b ad_{T_b}} = e^{ad_Y} \quad (11.2.33)$$

Rappelons encore que la représentation adjointe de l'algèbre de Lie, ad , est définie par

$$ad_Y(T_a) = [Y, T_a] = y^b [T_b, T_a] = y^b T_c C_{ba}^c \quad (11.2.34)$$

$$= T_c [ad_Y]_a^c = y^b T_c [ad_{T_b}]_a^c. \quad (11.2.35)$$

Ses générateurs infinitésimaux sont construits à partir des constantes de structure par

$$[ad_{T_b}]_a^c = C_{ba}^c. \quad (11.2.36)$$

Reprenons la loi de transformation (11.2.25) pour $U(x)$ donné par (11.2.27), il vient alors

$$A_\mu'^a(x) T_a = (A_\mu^a(x) + \partial_\mu y^a(x)) T_a + y^b(x) A_\mu^a(x) T_c C_{ba}^c \quad (11.2.37)$$

ou, puisque les $\{T_a\}$ forment une base de l'algèbre de Lie,

$$A_\mu'^a(x) = A_\mu^a(x) + \partial_\mu y^a(x) + y^b(x) A_\mu^c(x) C_{bc}^a \quad (11.2.38)$$

$$= A_\mu^a(x) + \partial_\mu y^a(x) - y^b(x) A_\mu^c(x) C_{cb}^a \quad (11.2.39)$$

$$= A_\mu^a(x) + (\mathcal{D}_\mu y)^a \quad (11.2.40)$$

La présence dans (11.2.40) des constantes de structure traduit le caractère non-abélien du groupe $SU(3)$.

11.3 Lagrangien d'interaction quark-gluon

En remplaçant dans \mathcal{L}_0 , la dérivée ordinaire par la dérivée covariante (11.2.17), on obtient

$$\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} = \bar{\psi}_B [i\gamma^\mu (\mathcal{D}_\mu \psi)^B - m\psi^B] \quad (11.3.41)$$

où \mathcal{L}_{int} est la densité lagrangienne de l'interaction quarks-gluons,

$$\mathcal{L}_{int} = -i \bar{\psi}_B \gamma^\mu [A_\mu(x)]_C^B \psi^C \quad (11.3.42)$$

$$= -i \bar{\psi}_B \gamma^\mu A_\mu^a(x) [T_a]_C^B \psi^C \quad (11.3.43)$$

$$= -\bar{\psi}_B \gamma^\mu A_\mu^a(x) [\tilde{T}_a]_C^B \psi^C \quad (11.3.44)$$

11.4 Lagrangien des gluons

Pour que les champs de gluons puissent être traités comme des variables dynamiques, il nous faut encore ajouter à (11.3.41) la densité lagrangienne de ces champs, invariante sous l'action du groupe de jauge. Rappelons qu'en électrodynamique quantique, cette densité lagrangienne n'est autre que $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, où

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = [\partial_\nu - A_\nu, \partial_\mu - A_\mu] \quad (11.4.45)$$

est le champ électromagnétique, invariant de jauge. Les champs associés aux potentiels de jauge (ou, dans le langage des formes, la 2-forme de courbure associée à la 1-forme de

connexion) se construisent de la même façon, à partir du commutateur des dérivées covariantes des variables de la représentation "3" (cfr la construction du tenseur de Riemann):

$$F_{\mu\nu}(x) = [\mathcal{D}_\nu, \mathcal{D}_\mu] \quad (11.4.46)$$

$$= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - [A_\mu(x), A_\nu(x)] \quad (11.4.47)$$

ou, avec

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^a(x) T_a, \quad (11.4.48)$$

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - C_{bc}^a A_\mu^b(x) A_\nu^c(x). \quad (11.4.49)$$

On vérifie aisément que, sous l'action du groupe de jauge, $F_{\mu\nu}(x)$ se transforme comme

$$F'_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu + [A'_\mu, A'_\nu] \quad (11.4.50)$$

$$= U(x) F_{\mu\nu}(x) U^+(x), \quad (11.4.51)$$

d'où il résulte aussi que

$$Tr[F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)] \quad (11.4.52)$$

est un invariant. En choisissant la normalisation de la base $\{T_a\}$ conformément à

$$Tr(T_a T_b) = g_{ab} = -2\delta_{ab}, \quad (11.4.53)$$

(11.4.52) devient

$$F_{\mu\nu}^a(x) F_a^{\mu\nu}(x) = -2F_{\mu\nu}^a(x) F^{a\mu\nu}(x). \quad (11.4.54)$$

g_{ab} est la métrique de Killing de l'algèbre de Lie; $g^{ab} = -\frac{1}{2}\delta^{ab}$.

Quelle que soit la dimension d de l'espace-temps, la connexion $A_\mu(x)$ a la dimension L^{-1} , $F_{\mu\nu}$ a la dimension L^{-2} et (11.4.54) a la dimension L^{-4} . Ceci est la dimension habituelle d'un champ bosonique pour $d = 4$, alors que, pour $d = 2\omega$, la dimension d'un potentiel bosonique est $L^{1-\omega} = L^{-1} L^{2-\omega}$, celle d'un champ bosonique est $L^{-\omega}$ et celle de la densité lagrangienne est $L^{-2\omega}$. On choisira donc, comme densité lagrangienne de gluons, valable à toute dimension d ,

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{8} F_{\mu\nu}^a(x) F_a^{\mu\nu}(x) g^{-2} = \frac{1}{8} (-) 2F_{\mu\nu}^a(x) F^{a\mu\nu}(x) g^{-2} \quad (11.4.55)$$

où g est une constante de dimension $L^{-2+\omega}$. On est alors amené tout naturellement à absorber cette constante dans une redéfinition des potentiels et des champs

$$A_\mu g^{-1} \rightarrow A_\mu, \quad F_{\mu\nu} g^{-1} \rightarrow F_{\mu\nu} \quad (11.4.56)$$

de sorte que la densité lagrangienne des gluons devient

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{8} Tr[F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)] = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F^{a\mu\nu}(x) \quad (11.4.57)$$

avec, au lieu de (11.4.47),

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g C_{bc}^a A_\mu^b(x) A_\nu^c(x), \quad (11.4.58)$$

et que la densité lagrangienne d'interaction quarks-gluons (11.3.44) s'écrit

$$\mathcal{L}_{int} = -g \bar{\psi}_B \gamma^\mu A_\mu^a(x) [\tilde{T}_a]_C^B \psi^C. \quad (11.4.59)$$

Dans ces nouvelles notations, g joue le rôle de la constante de couplage quarks-gluons. Elle est sans dimension pour $d = 4$; on sera amené plus tard, dans le procédé de régularisation dimensionnelle à la remplacer par $g\mu^{2-\omega}$.

Par rapport à l'électrodynamique quantique, un grand changement apparaît au niveau de \mathcal{L}_g , qui contient, en plus de la partie quadratique en les potentiels A_μ^a , identifiable au lagrangien libre des gluons:

$$\frac{1}{8} [\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a] [\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu] = -\frac{1}{4} [\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a] [\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}] \quad (11.4.60)$$

une partie cubique

$$-\frac{g}{4} [(\partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu}) C_{bc}^a A^{b\mu} A^{c\nu}] = \frac{g}{2} [(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) C_{bc}^a A^{b\mu} A^{c\nu}] \quad (11.4.61)$$

et une partie quartique

$$\frac{g^2}{8} [C_{bc}^a C_{df}^a A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{f\nu}] = -\frac{g^2}{4} [C_{bc}^a C_{df}^a A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{f\nu}] \quad (11.4.62)$$

qui définissent le lagrangien d'interaction entre gluons.

Remarque: comme en électrodynamique, un terme de masse ($m^2 A_\mu^a A^{a\mu}$) briserait l'invariance de jauge du lagrangien; il n'est donc pas autorisé.

En résumé, pour un seul type de quarks (ou pour des quarks d'une seule saveur "s"), la densité lagrangienne décrivant le système quarks-gluons en interaction s'écrit

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{0,q_s} + \mathcal{L}_{0,g} + \mathcal{L}_{Int} \quad (11.4.63)$$

où

$$\mathcal{L}_{0,q_s} = \bar{\psi}_{B,s} (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_s^B - m\psi_s^B), \quad (11.4.64)$$

$$\mathcal{L}_{0,g} = -\frac{1}{4} [\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a] [\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}], \quad (11.4.65)$$

et

$$\mathcal{L}_{Int} = -g \bar{\psi}_{B,s} \gamma^\mu A_\mu^a(x) [\tilde{T}_a]_C^B \psi_s^C + \frac{g}{2} [(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) C_{bc}^a A^{b\mu} A^{c\nu}] \quad (11.4.66)$$

$$-\frac{g^2}{4} [C_{bc}^a C_{df}^a A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{f\nu}]. \quad (11.4.67)$$

Si l'on prend en compte toutes les saveurs des quarks, le lagrangien qui décrit leurs interactions avec les gluons est le même que le précédent, dans lequel on somme sur l'indice répété $s = 1, \dots, n_s$ (n_s est le nombre de saveurs; on a de bonnes raisons de penser que $n_s \geq 6$.) En première approximation, nous négligerons les différences de masses entre quarks de saveurs différentes (dans la prescription de 't Hooft-Weinberg, la renormalisation est indépendante des masses).

Chapitre 12

Intégrale fonctionnelle pour QCD.

12.1 Intégrale fonctionnelle pour les gluons et fantômes de Faddéev - Popov.

Nous appliquerons ici la méthode de Faddéev et Popov que nous avons précédemment utilisée pour le photon. Notre choix de fonctions de fixation de la jauge est encore

$$g^a[A](x) = \partial_\mu A^{a\mu}(x) - c^a(x) = 0; \quad (12.1.1)$$

mais bien que g^a soit linéaire en A^a , donc $g^a[A'](x)$ linéaire en les y , avec A' donné par (11.2.40), le déterminant de la matrice

$$\frac{\delta}{\delta y^b(z)} g^a[A'](x)|_{g^a=0} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} [\delta_b^a \partial_x^\mu \delta^4(x-z) + \delta^4(x-z) A^{c\mu}(x) C_{bc}^a] \quad (12.1.2)$$

dépend encore des A et ne peut pas être négligé dans l'intégrale fonctionnelle. L'introduction des fantômes de Faddéev - Popov permet d'exprimer ce déterminant sous la forme d'une intégrale fonctionnelle grassmannienne par

$$\det \sim \int \mathcal{D}\eta^a \mathcal{D}\bar{\eta}_a e^{i \int d^4x [\partial^\mu \bar{\eta}_a(x) (\delta_b^a \partial_\mu + A_\mu^c(x) C_{bc}^a) \eta^b(x)]} \quad (12.1.3)$$

$$\sim \int \mathcal{D}\eta^a \mathcal{D}\bar{\eta}_a e^{i \int d^4x [\partial^\mu \bar{\eta}_a(x) (\delta_b^a \partial_\mu - A_\mu^c(x) (ad_c)_b^a) \eta^b(x)]} \quad (12.1.4)$$

$$\sim \int \mathcal{D}\eta^a \mathcal{D}\bar{\eta}_a e^{i \int d^4x [\partial^\mu \bar{\eta}_a(x) (\mathcal{D}_\mu \eta(x))^a]} \quad (12.1.5)$$

Dans la dernière expression nous avons fait apparaître la dérivée covariante des fantômes $\eta^a(x)$, variables de la représentation adjointe du groupe $SU(3)$. En tenant compte du changement de notation (11.4.56), elle s'écrit

$$[\mathcal{D}_\mu \eta(x)]^a = \partial_\mu \eta^a(x) - g A_\mu^c(x) [ad_c]_b^a \eta^b(x). \quad (12.1.6)$$

Par la même technique que celle utilisée pour le photon, on obtient la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green du système gluons-fantômes sous la forme

$$Z[J_\mu^a, \xi^a, \bar{\xi}_a] = \quad (12.1.7)$$

$$= \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\eta^b \mathcal{D}\bar{\eta}_b e^{i \int d^4x [-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 + \partial^\mu \bar{\eta}_a (\mathcal{D}_\mu \eta)^a + J_{a\mu} A^{a\mu} + \bar{\xi}_a \eta^a + \bar{\eta}_a \xi^a]} \quad (12.1.8)$$

Les sources $\xi^a, \bar{\xi}_a$ sont grassmanniennes. Cette fonctionnelle fournit, aux ordres les plus bas du calcul de perturbation, les règles de Feynman suivantes

1) le propagateur de Feynman des gluons libres par

$$\langle 0 | T A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) | 0 \rangle = i D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = i \delta^{ab} D_{\mu\nu}^F(x-y) = -2i g^{ab} D_{\mu\nu}^F(x-y) \quad (12.1.9)$$

où $D_{\mu\nu}^F$ a la même expression que le propagateur du photon libre; sa transformée de Fourier est donnée par

$$i \tilde{D}_{\mu\nu}^{ab}(k) = -2i g^{ab} \left[-\frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} - \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + i\epsilon)^2} \right] \quad (12.1.10)$$

(nous l'utiliserons dans la jauge de Feynman où $\lambda = 1$) et est représentée graphiquement par



FIG. 12.1 – Propagateur de gluon

2) le propagateur des fantômes libres par

$$\langle 0 | T \eta^a(x) \bar{\eta}_b(y) | 0 \rangle = i G_b^a(x-y) = i \delta_b^a \Delta_F(x-y; m=0) \quad (12.1.11)$$

où $\Delta_F(x-y; m=0)$ a la même expression que le propagateur d'un champ scalaire de masse nulle; sa transformée de Fourier est donnée par

$$i \tilde{G}_b^a(k) = \frac{i \delta_b^a}{k^2 + i\epsilon} \quad (12.1.12)$$

et est représentée graphiquement par



FIG. 12.2 – Propagateur de fantôme

3) la fonction de Green à 3 points gluon-fantômes

$$\langle 0 | T \eta^a(x) \bar{\eta}_b(y) A_\mu^c(z) | 0 \rangle = \quad (12.1.13)$$

$$= \int d^4x' d^4y' d^4z' i G_{a'}^a(x-x') i \Gamma_{b'c'\nu}^{a'}(x', y', z') | 1 \rangle i G_b^{b'}(y'-y) i D^{c'\nu\mu}(z'-z) = \quad (12.1.14)$$

$$= -ig \int d^4u \left[\frac{\partial}{\partial u^\nu} i G_{a'}^a(x-u) \right] [ad_{c'}]_{b'}^{a'} i G_b^{b'}(u-y) i D^{c'\nu\mu}(u-z) \quad (12.1.15)$$

qui fournit, à l'ordre 1, la fonction de vertex gluon-fantômes

$$i\Gamma_{b'c'\nu}^{a'}(x',y',z')|_1 = ig [ad_{c'}]_{b'}^{a'} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} \delta^4(x' - z') \delta^4(y' - z') \quad (12.1.16)$$

dont la transformée de Fourier vaut

$$\begin{aligned} i(2\pi)^4 \delta^4(q - p' + p) \tilde{\Gamma}_{b'c'\nu}^{a'}(p',p,q)|_1 &= \int d^4x' d^4y' d^4z' e^{ip'.x' - ip.y' - iq.z'} i\Gamma_{b'c'\nu}^{a'}(x',y',z')|_1 \\ &= g p'_\nu [ad_{c'}]_{b'}^{a'} (2\pi)^4 \delta^4(q - p' + p) \end{aligned} \quad (12.1.17)$$

et est représentée graphiquement par

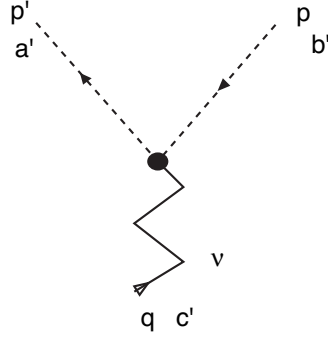


FIG. 12.3 – *Vertex gluon-fantôme*

4) la fonction de Green à trois gluons et la fonction de vertex correspondante

$$\langle 0|T A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) A_\lambda^c(z)|0 \rangle |_1 = \quad (12.1.18)$$

$$= \int d^4x' d^4y' d^4z' iD_{\mu\mu'}^{aa'}(x-x') iD_{\nu\nu'}^{bb'}(y-y') iD_{\lambda\lambda'}^{cc'}(z-z') i\Gamma_{a'b'c'}^{\mu'\nu'\lambda'}(x',y',z')|_1 + \dots \quad (12.1.19)$$

dont la transformée de Fourier

$$(2\pi)^4 \delta^4(p+q+r) i\tilde{\Gamma}_{abc}^{\mu\nu\lambda}(p,q,r)|_1 = \int d^4x d^4y d^4z e^{-i(p.x+q.y+r.z)} i\Gamma_{abc}^{\mu\nu\lambda}(x,y,z)|_1 \quad (12.1.20)$$

est donnée par

$$i\tilde{\Gamma}_{abc}^{\mu\nu\lambda}(p,q,r)|_1 = \frac{g}{2} C_{abc} [(p-q)^\lambda g^{\mu\nu} + (q-r)^\mu g^{\nu\lambda} + (r-p)^\nu g^{\lambda\mu}] \quad (12.1.21)$$

avec $p+q+r=0$. Nous avons utilisé ci-dessus la propriété d'antisymétrie complète des constantes de structure (voir appendice). La représentation graphique de ce vertex est la suivante

5) la fonction de Green à 4 gluons et le vertex correspondant

$$\langle 0|T A_\alpha^a(x) A_\beta^b(y) A_\gamma^c(z) A_\delta^d(u)|0 \rangle |_2 = \quad (12.1.22)$$

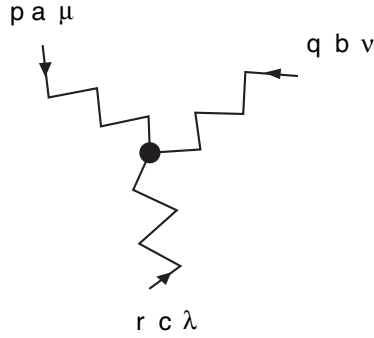


FIG. 12.4 – *Vertex à 3 gluons*

$$= \int d^4x' d^4y' d^4z' d^4u' iD_{\alpha\alpha'}^{aa'}(x-x') iD_{\beta\beta'}^{bb'}(y-y') iD_{\gamma\gamma'}^{cc'}(z-z') iD_{\delta\delta'}^{dd'}(u-u') i\Gamma_{a'b'c'd'}^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}(x',y',z',u')|_2 \quad (12.1.23)$$

dont la transformée de Fourier

$$(2\pi)^4 \delta^4(p+q+r+s) i\tilde{\Gamma}_{abcd}^{\alpha\beta\gamma\delta}(p,q,r,s)|_2 = \quad (12.1.24)$$

$$= \int d^4x d^4y d^4z d^4u e^{-i(p.x+q.y+r.z+s.u)} i\Gamma_{abcd}^{\alpha\beta\gamma\delta}(x,y,z,u)|_2 \quad (12.1.25)$$

est donnée par

$$i\tilde{\Gamma}_{abcd}^{\alpha\beta\gamma\delta}(p,q,r,s)|_2 = i\frac{g^2}{2} [C_{ab}^f C_{fcd}(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \quad (12.1.26)$$

$$+ C_{ac}^f C_{fdb}(g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} - g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}) + C_{ad}^f C_{fbc}(g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta})], \quad (12.1.27)$$

pour $(p+q+r+s=0)$ et est représentée graphiquement par

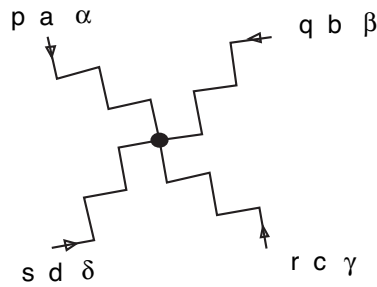


FIG. 12.5 – *Vertex à 4 gluons*

12.2 Intégrale fonctionnelle de la chromodynamique quantique.

La fonctionnelle génératrice des fonctions de Green du système quarks-gluons-(fantômes) est définie par

$$Z[J_\mu^a, \xi^a, \bar{\xi}_a, \zeta_s^B, \bar{\zeta}_{Bs}] = \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\eta^a \mathcal{D}\bar{\eta}_a \mathcal{D}\psi_s \mathcal{D}\bar{\psi}_s \quad (12.2.28)$$

$$e^{i \int d^4x [-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 + \partial^\mu \bar{\eta}_a (\mathcal{D}_\mu \eta)^a + J_{a\mu} A^{a\mu} + \bar{\xi}_a \eta^a + \bar{\eta}_a \xi^a]} \quad (12.2.29)$$

$$e^{i \int d^4x [\bar{\psi}_{Bs} (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_s^B - m\psi_s^B) - g\bar{\psi}_{Bs} \gamma^\mu A_\mu^a (\tilde{T}_a)^B \psi^C + \bar{\zeta}_{Bs} \psi_s^B + \bar{\psi}_{Bs} \zeta_s^B]}. \quad (12.2.30)$$

Elle fournit, en plus des règles de Feynman déjà obtenues précédemment:

1) le propagateur libre des quarks

$$\langle 0 | T \psi_s^B(x) \bar{\psi}_{C's'}(y) | 0 \rangle = i S_{C's's}^B(x-y) = i \delta_C^B \delta_{ss'} S^F(x-y). \quad (12.2.31)$$

où $iS^F(x-y)$ est le propagateur de Feynman d'un champ spinoriel libre de masse m . Sa transformée de Fourier est donnée par

$$i \delta_C^B \delta_{ss'} \frac{1}{\not{k} - m} = i \delta_C^B \delta_{ss'} \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (12.2.32)$$

et est représentée graphiquement par

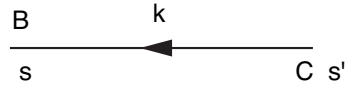


FIG. 12.6 – Propagateur de quark

2) la fonction de Green quarks-gluon et la fonction de vertex correspondante

$$\langle 0 | T \psi_s^B(x) \bar{\psi}_{C's'}(y) A_\mu^a(z) | 0 \rangle_1 = \quad (12.2.33)$$

$$= \int d^4x' d^4y' d^4z' i S_{B's's}^B(x-x') i \Gamma_{C's's'b}^{B'\nu}(x', y', z') | 1 i S_{C's's'}^{C'}(y'-y) i D_{\nu\mu}^{ba}(z'-z) \quad (12.2.34)$$

dont la transformée de Fourier, avec p' sortante, p et q entrantes et $q = p' - p$ est donnée par

$$i \tilde{\Gamma}_{C's's'b}^{B\mu}(p', p, q) | 1 = g \gamma^\mu [T_b]_C^B \delta_{ss'} = -i g \gamma^\mu [\tilde{T}_b]_C^B \delta_{ss'} \quad (12.2.35)$$

et est représentée graphiquement par

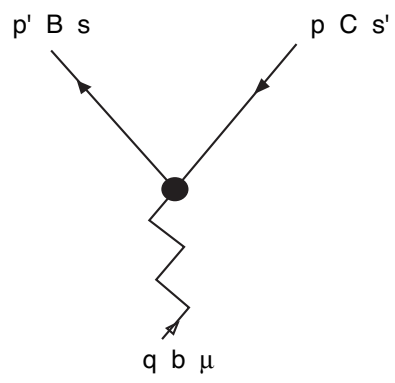


FIG. 12.7 – *Vertex quark-gluon*

Chapitre 13

Renormalisation à une boucle de la chromodynamique quantique.

13.1 Propagateur des quarks.

Jusqu'à l'ordre 2 du développement perturbatif, le propagateur des quarks, dans l'espace-temps à 2ω dimensions, est donné par la somme des diagrammes suivants

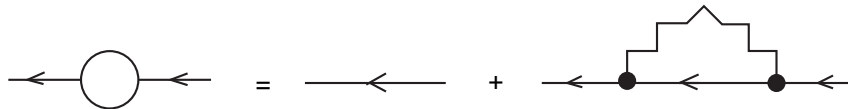


FIG. 13.1 – Propagateur de quark à l'ordre 2

On en déduit que la self-énergie $-i\Sigma_{C s s'}^B(p)$,

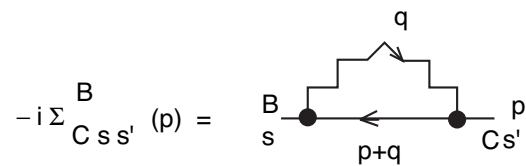


FIG. 13.2 – Self-énergie du quark

(dans la jauge de Feynman, $\lambda = 1$) ne diffère de la self-énergie de l'électron calculée en électrodynamique quantique que par un facteur matriciel lié au groupe $SU(3)$ et à la représentation fondamentale

$$-i\Sigma_C^B(p) = \sum_a [\tilde{T}_a \tilde{T}_a]_C^B \delta_{ss'} (-i)\Sigma(p)|_{e \rightarrow g}. \quad (13.1.1)$$

Ce facteur peut être calculé explicitement en choisissant $\tilde{T}_a = \lambda_a$, matrices de Gell-Mann.

Il vient

$$\sum_a [\tilde{T}_a \tilde{T}_a]_C^B = \frac{16}{3} \delta_C^B. \quad (13.1.2)$$

En fait (voir appendice), $\sum_a [T_a T^a]$ est l'opérateur de Casimir de $su(3)$, ici dans la représentation fondamentale; il commute avec tous les T_b et, en vertu du lemme de Schur, il est multiple de l'opérateur identité:

$$\sum_a [T_a T^a]_C^B = \frac{8}{3} \delta_C^B. \quad (13.1.3)$$

On déduit donc immédiatement des expressions correspondantes en QED, pour $\epsilon = 2 - \omega \rightarrow 0$

$$\Sigma_{C s s'}^B(p) = \frac{16}{3} \delta_C^B \delta_{s s'} \left[-\frac{\alpha}{4\pi\epsilon} \hat{p} + \frac{\alpha}{\pi\epsilon} m + \dots \right] \quad (13.1.4)$$

Ici, $\alpha = \frac{g^2}{4\pi}$.

Ces singularités peuvent être éliminées en ajoutant au lagrangien initial des contre-terms qui correspondent à une renormalisation des champs et à une renormalisation de la masse des quarks par

$$[\psi_s^C]_B = \sqrt{Z_q} \psi_s^C = \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{3\pi\epsilon}} \psi_s^C \quad (13.1.5)$$

$$m_B = m \frac{\left(1 - \frac{16\alpha}{3\pi\epsilon}\right)}{\left(1 - \frac{4\alpha}{3\pi\epsilon}\right)} \quad (13.1.6)$$

13.2 Propagateur des gluons.

Jusqu'à l'ordre deux du développement perturbatif, le propagateur des gluons est donné par la somme des diagrammes suivants. Ils contribuent à la polarisation du gluon $-i\Pi_{ab}^{\mu\nu}(p)$

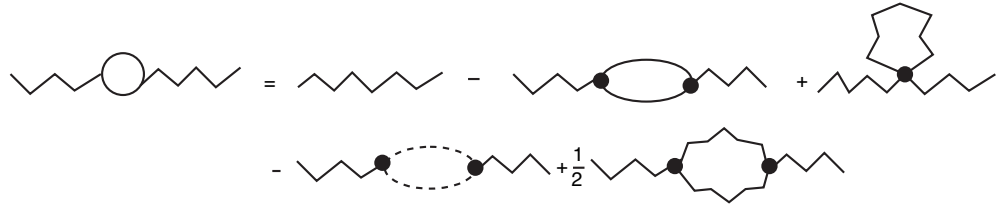


FIG. 13.3 – Propagateur de gluon à l'ordre 2

par

Le premier terme se déduit de la polarisation du photon calculée en QED par

$$(1) = \sum_s \delta_{ss} \text{Tr}[\tilde{T}_a \tilde{T}_b] (-i) \Pi^{\mu\nu}(p)|_{e \rightarrow g} = n_s (2\delta_{ab}) (-i) \Pi^{\mu\nu}(p)|_{e \rightarrow g} \quad (13.2.7)$$

Au voisinage de $\omega = 2$, il reste

$$(1) = 8n_s \delta_{ab} i \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{3\epsilon} (p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) + \dots \quad (13.2.8)$$

FIG. 13.4 – *Polarisation du gluon*

Le deuxième diagramme est nul à (2ω) dimensions: en effet, il est proportionnel à l'intégrale

$$\int d^{2\omega} k \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \quad (13.2.9)$$

déjà rencontrée dans la théorie en ϕ^4 , où elle contribuait à la renormalisation de la masse; mais ici $m = 0$.

Le troisième diagramme vaut

$$(3) = -g^2(\mu^2)^{2-\omega} [ad_c ad^c]_{ab} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(p+k)^\mu k^\nu}{[(p+k)^2 + i\epsilon][k^2 + i\epsilon]} \quad (13.2.10)$$

Par la technique habituelle, on en déduit aisément les termes singuliers pour $\omega \rightarrow 2$

$$(3) = -i \frac{\alpha}{4\pi} [ad_c ad^c]_{ab} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{1}{6} p^\mu p^\nu + \frac{1}{12} p^2 g^{\mu\nu} \right] + \dots \quad (13.2.11)$$

Le coefficient matriciel $[ad_c ad^c]$ n'est autre que l'opérateur de Casimir, dans la représentation adjointe, il est toujours multiple de l'identité:

$$[ad_c ad^c] = 6I; \quad [ad_c ad^c]_{ab} = 6g_{ab} = -12\delta_{ab}. \quad (13.2.12)$$

Donc

$$(3) = i\delta_{ab} \frac{4\alpha}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{2} p^\mu p^\nu + \frac{1}{4} p^2 g^{\mu\nu} \right] + \dots \quad (13.2.13)$$

Enfin, le quatrième terme est donné par

$$(4) = \frac{1}{2} g^2 (\mu^2)^{2-\omega} [ad_c ad^c]_{ab} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{E^{\mu\nu}}{[(p+k)^2 + i\epsilon][k^2 + i\epsilon]} \quad (13.2.14)$$

où

$$E_{\mu\nu} = [(-2p-k)_\sigma g_{\mu\rho} + (p+2k)_\mu g_{\sigma\rho} + (p-k)_\rho g_{\mu\sigma}] \quad (13.2.15)$$

$$\cdot [(p-k)^\rho \delta_\nu^\sigma + (p+2k)_\nu g^{\sigma\rho} - (k+2p)^\sigma \delta_\nu^\rho]. \quad (13.2.16)$$

Par la technique standard, on en extrait les termes singuliers pour $\omega \rightarrow 2$:

$$(4) = -i\delta_{ab} \frac{4\alpha}{4\pi\epsilon} \left[\frac{11}{2} p^\mu p^\nu - \frac{19}{4} p^2 g^{\mu\nu} \right] + \dots \quad (13.2.17)$$

On constate que la somme des contributions des boucles de fantômes et de gluons est transverse

$$(3) + (4) = -i\delta_{ab} \frac{20\alpha}{4\pi\epsilon} [p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}] + \dots \quad (13.2.18)$$

Le total des termes singuliers de la polarisation des gluons est donc finalement donné par

$$(1) + (3) + (4) = i\delta_{ab} \frac{\alpha}{4\pi\epsilon} [p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}] \left[\frac{8n_s}{3} - 20 \right]. \quad (13.2.19)$$

Ces singularités peuvent être éliminées par des contre-termes qui impliquent une renormalisation du champ de gluons par

$$[A_\mu^a]_B = \sqrt{Z_A} A_\mu^a, \quad Z_A = 1 + \left[5 - \frac{2n_s}{3} \right] \frac{\alpha}{\pi\epsilon}. \quad (13.2.20)$$

Nous laissons au lecteur intéressé le calcul de la renormalisation de la constante λ du terme de fixation de la jauge.

13.3 Vertex quarks-gluon.

Les corrections d'ordre 3, $i\tilde{\Gamma}_{C's's'\mu}^{Ba}(p',p,q)|_3$, au vertex quarks-gluons sont données par la somme des diagrammes suivants

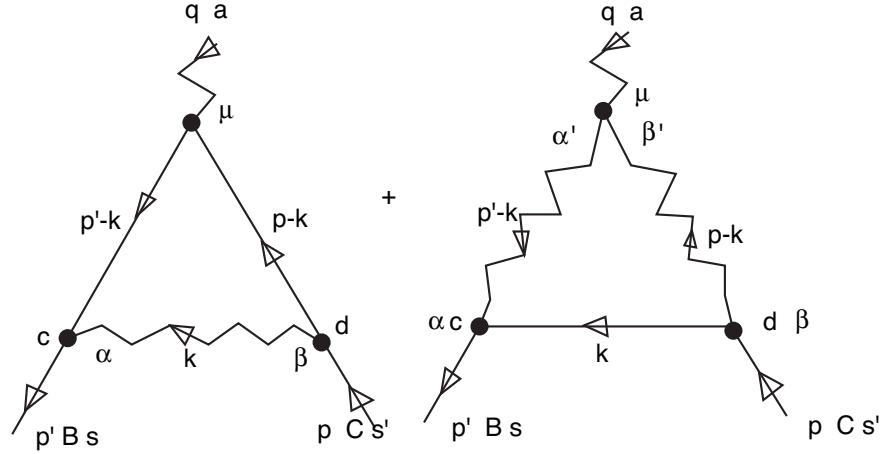


FIG. 13.5 – Vertex quarks- gluon

Le premier a pour expression

$$[1] = g^3(\mu)^{6-3\omega} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \gamma_\alpha [T_c]_D^B \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m} \gamma_\mu [T^a]_E^D \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma_\beta [T_d]_C^E \frac{2ig^{\alpha\beta} g^{cd}}{k^2 + i\epsilon} \delta_{ss'} \quad (13.3.21)$$

Il est égal au vertex électron-photon multiplié par le facteur

$$i^3(-2g^{cd})T_c T^a T_d \delta_{ss'} = 2i\left(-\frac{1}{3}\right)T^a \delta_{ss'} \quad (13.3.22)$$

et se comporte donc, au voisinage de $\omega = 2$ comme

$$\left(-\frac{2i}{3}\right)\gamma_\mu T^a (-ig\mu^{2-\omega}) \frac{\alpha}{4\pi\epsilon} \delta_{ss'} = -g\mu^{2-\omega} \gamma_\mu T^a \frac{2}{3} \frac{\alpha}{4\pi\epsilon} \delta_{ss'}. \quad (13.3.23)$$

Le deuxième diagramme est donné par

$$[2] = g^3 \mu^{6-3\omega} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \gamma_\alpha [T_c]_D^B \frac{i}{\not{k} - m} \gamma_\beta [T_d]_C^D \frac{2ig^{\beta\beta'} g^{de}}{(p-k)^2 + i\epsilon} \frac{1}{2} C_{ef}^a G_{\beta'\alpha'\mu} \frac{2ig^{\alpha'\alpha} g^{fc}}{(p'-k)^2 + i\epsilon} \delta_{ss'} \quad (13.3.24)$$

avec

$$G_{\beta'\alpha'\mu} = (p - 2k + p')_\mu g_{\beta'\alpha'} + (k - p' - q)_{\beta'} g_{\alpha'\mu} + (q - p + k)_{\alpha'} g_{\mu\beta'}. \quad (13.3.25)$$

Par la même technique que celle qui fournit la partie singulière du vertex électromagnétique, on obtient

$$[2] = g\mu^{2-\omega} [T^a]_C^B \gamma_\mu \delta_{ss'} \frac{18\alpha}{4\pi\epsilon} + \dots \quad (13.3.26)$$

La somme des contributions des deux diagrammes est égale à

$$g\mu^{2-\omega}[T^a]_C^B\gamma_\mu\delta_{ss'}\frac{\alpha}{4\pi\epsilon}\left[18-\frac{2}{3}\right]=g\mu^{2-\omega}[T^a]_C^B\gamma_\mu\delta_{ss'}\frac{\alpha}{4\pi\epsilon}\frac{52}{3}. \quad (13.3.27)$$

13.4 Fonction β ; Liberté asymptotique.

En rassemblant tous ces résultats, on obtient la constante de couplage nue comme

$$g_B = g\mu^\epsilon Z_g Z_q^{-1} Z_A^{-\frac{1}{2}} \quad (13.4.28)$$

$$= g\mu^\epsilon \left[1 - \frac{\alpha}{4\pi\epsilon} \frac{52}{3}\right] \left[1 + \frac{\alpha}{4\pi\epsilon} \frac{16}{3}\right] \left[1 - \frac{\alpha}{4\pi\epsilon} \left[10 - \frac{4}{3}n_s\right]\right] \quad (13.4.29)$$

$$= g\mu^\epsilon \left[1 - \frac{\alpha}{4\pi\epsilon} \left(\frac{52}{3} - \frac{16}{3} + 10 - \frac{4}{3}n_s\right)\right] \quad (13.4.30)$$

$$= g\mu^\epsilon \left[1 - \frac{\alpha}{4\pi\epsilon} \left(22 - \frac{4}{3}n_s\right)\right] \quad (13.4.31)$$

$$= g\mu^\epsilon \left[1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \left(11 - \frac{2}{3}n_s\right)\right] \quad (13.4.32)$$

On en déduit

$$\mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = \beta(g) = \frac{g^3}{4\pi^2} \left(-11 + \frac{2}{3}n_s\right). \quad (13.4.33)$$

On constate donc que si le nombre de saveurs de quarks $n_s \leq 16$, (on a de bonnes raisons de penser que $n_s = 6$), β est négative et g décroît lorsque μ augmente. Ceci est l'expression de la liberté asymptotique.

Annexe A

Groupe $SU(3)$, propriétés algébriques

Nous rassemblons ici quelques éléments de la théorie des groupes qui permettent de calculer les coefficients algébriques qui apparaissent dans les diagrammes à une boucle de la chromodynamique quantique.

1) La métrique de Killing est invariante sous l'action adjointe du groupe

$$g_{ab} = Tr[T_a T_b] = Tr[UT_a U^+ U T_b U^+]. \quad (\text{A.0.1})$$

Il en résulte, pour $U = I + y^c T_c$,

$$\delta g_{ab} = 0 = y^c [C_{ca}^d g_{db} + g_{ad} C_{cb}^d] \quad (\text{A.0.2})$$

ou

$$C_{bca} + C_{acb} = 0. \quad (\text{A.0.3})$$

Comme les coefficients de structure étaient déjà antisymétriques en les deux derniers indices, ceci exprime qu'ils sont complètement antisymétriques.

2) Il résulte de ce qui précède que

$$[T_a T^a, T_b] = T^a T^c (C_{cab} + C_{abc}) = 0. \quad (\text{A.0.4})$$

En vertu du lemme de Schur, ceci signifie que $T_a T^a$ est proportionnel à la matrice unité:

$$T_a T^a = kI. \quad (\text{A.0.5})$$

Mais on sait, par ailleurs que

$$Tr[T_a T^a] = \delta_a^a = 8 = 3k. \quad (\text{A.0.6})$$

Donc $k = \frac{8}{3}$.

3) Le même calcul fournit, dans la représentation adjointe,

$$[ad_a ad^a, ad_b] = 0 \quad (\text{A.0.7})$$

et donc aussi $ad_a ad^a = \mu I$. On sait aussi, voir cours de M.Henneaux, que pour $SU(N)$,

$$Tr[ad_a ad_b] = \lambda g_{ab}. \quad (\text{A.0.8})$$

On en déduit que $\lambda = \mu$.

En passant par le choix explicite $T_a = -i\lambda_a$,

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.9})$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.10})$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.11})$$

on calcule sans peine, à l'aide des constantes de structure non nulles que

$$Tr[(ad_1)^2] = -12 = \lambda g_{11} = -2\lambda\delta_{11} \quad (\text{A.0.12})$$

d'où on tire, $\lambda = 6$.

4)

$$C_{abc}T^bT^c = \frac{1}{2}C_{abc}[T^b, T^c] = -3T_a \quad (\text{A.0.13})$$

5)

$$T_a T_b T^a = [T_a, T_b]T^a + T_a T^a T_b = -\frac{1}{3}T_b. \quad (\text{A.0.14})$$

Annexe B

Théorème de Furry

Sous sa forme algébrique, ce théorème exprime l'égalité suivante

$$Tr[\gamma_{\mu_1} S_F(x_1, x_2) \gamma_{\mu_2} S_F(x_2, x_3) \dots \gamma_{\mu_s} S_F(x_s, x_1)] = \quad (B.0.1)$$

$$= (-1)^s Tr[S_F(x_1, x_s) \gamma_{\mu_s} \dots S_F(x_3, x_2) \gamma_{\mu_2} S_F(x_2, x_1) \gamma_{\mu_1}] \quad (B.0.2)$$

Cette égalité se démontre en utilisant la matrice C telle que

$$C \gamma_{\mu} C^{-1} = -\gamma_{\mu}^T \quad (B.0.3)$$

$$C S_F(x, y) C^{-1} = S_F^T(y, x). \quad (B.0.4)$$

En effet,

$$Tr[\gamma_{\mu_1} S_F(x_1, x_2) \gamma_{\mu_2} S_F(x_2, x_3) \dots \gamma_{\mu_s} S_F(x_s, x_1)] = \quad (B.0.5)$$

$$= Tr[C^{-1} C \gamma_{\mu_1} C^{-1} C S_F(x_1, x_2) C^{-1} C \dots C^{-1} C \gamma_{\mu_s} C^{-1} C S_F(x_s, x_1)] \quad (B.0.6)$$

$$= (-1)^s Tr[\gamma_{\mu_1}^T S_F^T(x_2, x_1) \gamma_{\mu_2}^T S_F^T(x_3, x_2) \dots \gamma_{\mu_s}^T S_F^T(x_1, x_s)] \quad (B.0.7)$$

$$= (-1)^s Tr[S_F(x_1, x_s) \gamma_{\mu_s} \dots S_F(x_3, x_2) \gamma_{\mu_2} S_F(x_2, x_1) \gamma_{\mu_1}]^T \quad (B.0.8)$$

$$= (-1)^s Tr[S_F(x_1, x_s) \gamma_{\mu_s} \dots S_F(x_3, x_2) \gamma_{\mu_2} S_F(x_2, x_1) \gamma_{\mu_1}] \quad (B.0.9)$$

On en tire, pour les diagrammes, l'égalité

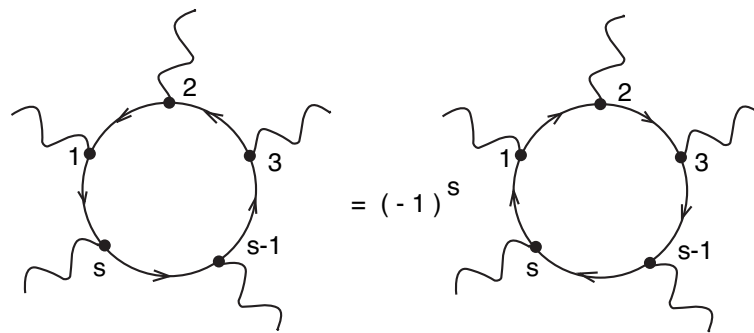


FIG. B.1 – *Théorème de Furry*

Annexe C

Renormalisation

C.1 Fonctionnelles génératrices

C.1.1 Fonctionnelle génératrice des fonctions de Green

$$Z[J] = \int [d\phi] e^{-\frac{1}{\hbar}(S(\phi) - \int d^4x J(x)\phi(x))} \quad (\text{C.1.1})$$

$$= Z[0] \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \hbar^n} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G_n(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \right\} \quad (\text{C.1.2})$$

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\int [d\phi] \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-\frac{1}{\hbar}(S(\phi))}}{\int [d\phi] e^{-\frac{1}{\hbar}(S(\phi))}} \quad (\text{C.1.3})$$

$$= \hbar^n \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (\text{C.1.4})$$

Pour fixer les idées, nous choisirons

$$S(\phi) = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi(x) (-\Delta + m^2) \phi(x) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) \right] \quad (\text{C.1.5})$$

Cas particulier du champ libre ($\lambda = 0$)

$$S_0(\phi) = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi(x) (-\Delta + m^2) \phi(x) \right] \quad (\text{C.1.6})$$

$$Z_0[J] = Z_0[0] e^{\frac{1}{2\hbar} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x-y) J(y)} \quad (\text{C.1.7})$$

$$(-\Delta + m^2) \Delta(x-y) = \delta^4(x-y) \quad (\text{C.1.8})$$

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2 + m^2} = \Delta(-x) \quad (\text{C.1.9})$$

Les fonctions de Green du champ libre sont données par

$$G_{2n+1}^0(x_1, \dots, x_{2n+1}) = 0 \quad (\text{C.1.10})$$

$$G_2^0(x_1, x_2) = \hbar \Delta(x_1 - x_2) \quad (\text{C.1.11})$$

$$G_4^0(x_1, x_2, x_3, x_4) = \hbar \Delta(x_1 - x_2) \hbar \Delta(x_3 - x_4) + \hbar \Delta(x_1 - x_3) \hbar \Delta(x_2 - x_4) + \hbar \Delta(x_1 - x_4) \hbar \Delta(x_2 - x_3) \quad (\text{C.1.12})$$

etc

Elles sont données par des sommes de produits de G_2^0 , correspondant à toutes les façons de grouper $2n$ points en paires, sans tenir compte de leur ordre: il y en a

$$\frac{1}{n!} C_2^{2n} C_2^{(2n-2)} \dots C_2^4 C_2^2 = \frac{(2n)!}{n! 2^n} \quad (\text{C.1.13})$$

C.1.2 Calcul perturbatif des G_n

1) on décompose l'action S en

$$S(\phi) = S_0(\phi) + \lambda S_1(\phi) \quad (\text{C.1.14})$$

2) dans la définition (C.1.3), on remplace, au numérateur et au dénominateur, l'exponentielle $\exp(-\frac{\lambda}{\hbar} S_1)$ par son développement en série de puissances de λ ; en divisant le numérateur et le dénominateur par $Z_0[0]$, les coefficients des différentes puissances λ^m s'expriment en termes des fonctions de Green de la théorie libre.

Ensuite, 3) on remplace le quotient des deux séries par la série-quotient appelée série perturbative.

Par exemple: jusqu'à l'ordre λ ,

$$G_2(x_1, x_2) = \frac{G_2^0(x_1, x_2) + \frac{(-\lambda)}{4! \hbar} \int d^4 y G_6^0(x_1, x_2, y, y, y, y) + \dots}{1 + \frac{(-\lambda)}{4! \hbar} \int d^4 y G_4^0(y, y, y, y) + \dots} \quad (\text{C.1.15})$$

$$= G_2^0(x_1, x_2) + \frac{(-\lambda)}{2\hbar} \int d^4 y G_2^0(x_1, y) G_2^0(y, y) G_2^0(y, x_2) + \dots \quad (\text{C.1.16})$$

$$G_4(x_1, \dots, x_4) = G_4^0(x_1, \dots, x_4) + \frac{(-\lambda)}{\hbar} \int d^4 y G_2^0(x_1, y) G_2^0(x_2, y) G_2^0(x_3, y) G_2^0(x_4, y) + \dots \quad (\text{C.1.17})$$

C.1.3 Représentation graphique des G_n : diagrammes de Feynman

C.1.4 Fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes

La fonction de Green connexe $W_n = G_n^c$ est définie par

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = W_n(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i+j+\dots=n} W_i W_j \dots \quad (\text{C.1.18})$$

La fonctionnelle génératrice de ces fonctions de Green connexes est

$$\frac{1}{\hbar} W[J] = \ln \frac{Z[J]}{Z[0]}, \quad \frac{Z[J]}{Z[0]} = e^{\frac{W[J]}{\hbar}} \quad (\text{C.1.19})$$

$$\frac{1}{\hbar} W[J] = \sum_n \frac{1}{n! \hbar^n} \int d^4x_1 \dots d^4x_n W_n(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \quad (\text{C.1.20})$$

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = \hbar^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (\text{C.1.21})$$

De C.1.7, on tire que

$$\frac{1}{\hbar} W_0[J] = \frac{1}{2\hbar} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x-y) J(y). \quad (\text{C.1.22})$$

Le champ libre ne possède qu'une seule fonction de Green connexe, à savoir, le propagateur

$$W_2^0(x_1, x_2) = G_2^0(x_1, x_2). \quad (\text{C.1.23})$$

C.1.5 Action effective

L'action effective $\Gamma[\varphi]$ est aussi appelée fonctionnelle génératrice des vertex propres ou fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes, amputées et 1PI. Elle se déduit de $W[J]$ par transformation de Legendre: soit

$$\varphi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}, \quad (\text{C.1.24})$$

alors

$$\Gamma[\varphi] = \int d^4x J(x) \varphi(x) - W[J]. \quad (\text{C.1.25})$$

On en tire

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = J(x). \quad (\text{C.1.26})$$

$$\Gamma[\varphi] = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma_n(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \quad (\text{C.1.27})$$

$$\Gamma_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x_1) \dots \delta \varphi(x_n)} \Big|_{\varphi=0} \quad (\text{C.1.28})$$

Pour le champ libre, on a

$$\varphi(x) = \int d^4y \Delta(x-y) J(y), \quad (-\Delta + m^2)\varphi(x) = J(x) \quad (\text{C.1.29})$$

$$\Gamma_0[\varphi] = \int d^4x J(x) \varphi(x) - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x-y) J(y) \quad (\text{C.1.30})$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x J(x) \varphi(x) = S_0(\varphi). \quad (\text{C.1.31})$$

et le seul vertex propre est

$$\Gamma_2^0(x, y) = (-\Delta + m^2)\delta^4(x-y) = K(x-y) = \Delta^{-1}(x-y). \quad (\text{C.1.32})$$

C.1.6 Calcul des Γ_n

Si $W_1(x) = 0$, ce qui est le cas dans la théorie ϕ^4 , alors

$$J(x) = 0 \leftrightarrow \varphi(x) = 0. \quad (\text{C.1.33})$$

En dérivant C.1.26 par rapport à $J(y)$, on obtient

$$\delta^4(x-y) = \frac{\delta}{\delta J(y)} \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} \quad (\text{C.1.34})$$

$$= \int d^4 z \frac{\delta \varphi(z)}{\delta J(y)} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(x)} \quad (\text{C.1.35})$$

$$= \int d^4 z \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(z) \delta J(y)} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(x)} \quad (\text{C.1.36})$$

puis, en $J = 0, \varphi = 0$,

$$\delta^4(x-y) = \frac{1}{\hbar} \int d^4 z W_2(y,z) \Gamma_2(z,x). \quad (\text{C.1.37})$$

On en déduit que le vertex propre Γ_2 n'est autre que l'inverse du propagateur

$$\Gamma_2(x,y) = \hbar [W_2(x,y)]^{-1} = \hbar [G_2(x,y)]^{-1}. \quad (\text{C.1.38})$$

Entre les transformées de Fourier, on a l'égalité

$$\tilde{\Gamma}_2(p) = \hbar [\tilde{G}_2(p)]^{-1}. \quad (\text{C.1.39})$$

En introduisant l'opérateur de masse Σ par

$$\Gamma_2(x,y) = K(x,y) + \hbar \Sigma(x,y) \quad (\text{C.1.40})$$

$$\text{ou } \tilde{\Gamma}_2(p) = p^2 + m^2 + \hbar \tilde{\Sigma}(p), \quad (\text{C.1.41})$$

il vient, pour la transformée de Fourier du propagateur

$$\tilde{G}_2(p) = \frac{\hbar}{p^2 + m^2 + \hbar \tilde{\Sigma}(p)} \quad (\text{C.1.42})$$

$$= \frac{\hbar}{p^2 + m^2} \frac{1}{1 + \frac{\hbar \tilde{\Sigma}(p)}{p^2 + m^2}} \quad (\text{C.1.43})$$

$$= \frac{\hbar}{p^2 + m^2} + \frac{\hbar}{p^2 + m^2} (-\tilde{\Sigma}(p)) \frac{\hbar}{p^2 + m^2} + \quad (\text{C.1.44})$$

$$+ \frac{\hbar}{p^2 + m^2} (-\tilde{\Sigma}(p)) \frac{\hbar}{p^2 + m^2} (-\tilde{\Sigma}(p)) \frac{\hbar}{p^2 + m^2} + \dots \quad (\text{C.1.45})$$

En dérivant C.1.36 par rapport à $\varphi(u)$, il vient

$$0 = \int d^4 z \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \varphi(u) \delta \varphi(z) \delta \varphi(x)} \frac{\delta^2 W}{\delta J(z) \delta J(y)} \quad (\text{C.1.46})$$

$$+ \int d^4 z d^4 t \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(x)} \frac{\delta^3 W}{\delta J(t) \delta J(z) \delta J(y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi(t) \delta \varphi(u)}; \quad (\text{C.1.47})$$

en $\varphi = 0, J = 0$, on en tire

$$\Gamma_3(x, y, z) = -\frac{1}{\hbar^2} \int d^4x' d^4y' d^4z' \Gamma_2(x, x') \Gamma_2(y, y') \Gamma_2(z, z') W_3(x', y', z') \quad (\text{C.1.48})$$

ou

$$W_3(x, y, z) = -\frac{1}{\hbar} \int d^4x' d^4y' d^4z' W_2(x, x') W_2(y, y') W_2(z, z') \Gamma_3(x', y', z'). \quad (\text{C.1.49})$$

De proche en proche, on démontre que $\Gamma_n, n > 2$ est égale, au signe près, à la fonction de Green connexe W_n , amputée et 1PI.

C.2 Approximation semi-classique

Soit $\phi_c(x)$ la solution de l'équation

$$\frac{\delta S(\phi)}{\delta \phi(x)} = J(x) \quad (\text{C.2.50})$$

ou

$$(-\Delta + m^2)\phi + \frac{\lambda}{3!} \phi^3 = J. \quad (\text{C.2.51})$$

Perturbativement, cette équation se résoud en développant ϕ en série de puissances de λ

$$\phi = \phi_0 + \lambda \phi_1 + \lambda^2 \phi_2 + \dots \quad (\text{C.2.52})$$

et en résolvant le système

$$(-\Delta + m^2)\phi_0 = J(x) \quad (\text{C.2.53})$$

$$(-\Delta + m^2)\phi_1 + \frac{1}{3!} \phi_0^3 = 0 \quad (\text{C.2.54})$$

$$(-\Delta + m^2)\phi_2 + \frac{1}{2} \phi_0^2 \phi_1 = 0 \quad (\text{C.2.55})$$

etc

obtenu en égalant les coefficients des mêmes puissances de λ dans les deux membres. Il vient

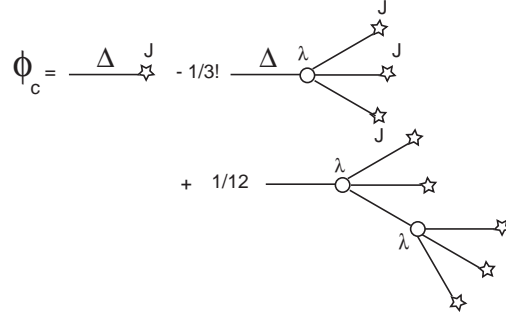
$$\phi_0(x) = \int d^4y \Delta(x-y) J(y) \quad (\text{C.2.56})$$

$$\phi_1(x) = -\int d^4y \Delta(x-y) \frac{1}{3!} \phi_0^3(y) = -\int d^4y \Delta(x-y) \frac{1}{3!} \left[\int d^4z \Delta(y-z) J(z) \right]^3 \quad (\text{C.2.57})$$

etc

d'où

$$\phi_c(x) = \int d^4y \Delta(x-y) J(y) - \int d^4y \Delta(x-y) \frac{\lambda}{3!} \left[\int d^4z \Delta(y-z) J(z) \right]^3 + \dots \quad (\text{C.2.58})$$



que l'on peut représenter par une somme de diagrammes en arbres.

Pour $J = 0, \phi_c = 0$. Dans $Z[J]$, injectons le changement de variables d'intégration suivant

$$\phi = \phi_c + \sqrt{\hbar} \chi. \quad (\text{C.2.59})$$

Il vient

$$Z[J] = e^{-\frac{1}{\hbar}(S(\phi_c) - \int J\phi_c)} \int [d\chi] e^{-\int d^4x d^4y [\frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} |_{\phi_c} \chi(x)\chi(y) + O(\sqrt{\hbar})]} \quad (\text{C.2.60})$$

$$= e^{-\frac{1}{\hbar}(S(\phi_c) - \int J\phi_c)} \int [d\chi] e^{-\int d^4x d^4y [\frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} |_{\phi_c} \chi(x)\chi(y)]} [1 + O(\hbar)] \quad (\text{C.2.61})$$

$$= e^{-\frac{1}{\hbar}(S(\phi_c) - \int J\phi_c)} [\det \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} |_{\phi_c}]^{-\frac{1}{2}} [1 + O(\hbar)] \quad (\text{C.2.62})$$

En utilisant

$$\det M = e^{\text{tr} \ln M}. \quad (\text{C.2.63})$$

on peut récrire Z sous la forme

$$Z[J] = e^{-\frac{1}{\hbar}(S(\phi_c) - \int J\phi_c)} e^{-\frac{1}{2} \text{tr} (\ln [\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} |_{\phi_c}])} [1 + O(\hbar)] \quad (\text{C.2.64})$$

d'où aussi

$$\frac{Z[J]}{Z[0]} = e^{-\frac{1}{\hbar}(S(\phi_c) - \int J\phi_c)} e^{-\frac{1}{2} \text{tr} (\ln [\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} |_{\phi_c}] - \ln [\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} |_{0}])} [1 + O(\hbar)] \quad (\text{C.2.65})$$

En posant

$$W[J] = W_0[J] + \hbar W_1[J] + O(\hbar^2) \quad (\text{C.2.66})$$

$$\Gamma[\varphi] = \Gamma_0[\varphi] + \hbar \Gamma_1[\varphi] + O(\hbar^2), \quad (\text{C.2.67})$$

on obtient

$$W_0[J] = -S(\phi_c) + \int J\phi_c \quad (\text{C.2.68})$$

$$W_1[J] = -\frac{1}{2} \text{tr} (\ln [\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} |_{\phi=\phi_c}] - \ln [\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} |_{\phi=0}]) \quad (\text{C.2.69})$$

A l'ordre zéro en \hbar :

$$\varphi(x) = \frac{\delta W_0[J]}{\delta J(x)} \quad (\text{C.2.70})$$

$$= \phi_c(x) + \int d^4y \frac{\delta \phi_c(y)}{\delta J(x)} \left[-\frac{\delta S(\phi_c)}{\delta \phi_c(y)} + J(y) \right] \quad (\text{C.2.71})$$

$$= \phi_c(x) \quad (\text{C.2.72})$$

par définition de ϕ_c . On en tire donc pour la transformée de Legendre à l'ordre zéro

$$\Gamma_0[\varphi] = \int J\varphi - W_0 \quad (\text{C.2.73})$$

$$= \int J\varphi + S(\varphi) - \int J\varphi \quad (\text{C.2.74})$$

$$= S(\varphi) \quad (\text{C.2.75})$$

A l'ordre \hbar :

$$\varphi(x) = \frac{\delta W_0[J]}{\delta J(x)} + \hbar \frac{\delta W_1[J]}{\delta J(x)} \quad (\text{C.2.76})$$

$$= \phi_c(x) + \hbar \psi(x) \quad (\text{C.2.77})$$

et

$$\Gamma[\varphi] = \int J\varphi - W_0 - \hbar W_1 \quad (\text{C.2.78})$$

$$= \int J\varphi + S(\varphi - \hbar\psi) - \int J(\varphi - \hbar\psi) - \hbar W_1[J] \quad (\text{C.2.79})$$

$$= S(\varphi) - \hbar \int \psi(x) \left[\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} - J(x) \right]_{\phi=\varphi} - \hbar W_1|_{\phi_c=\varphi} + O(\hbar^2) \quad (\text{C.2.80})$$

$$= S(\varphi) - \hbar \int \psi(x) \left[\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} - J(x) \right]_{\phi=\phi_c} - \hbar W_1|_{\phi_c=\varphi} + O(\hbar^2) \quad (\text{C.2.81})$$

$$= S(\varphi) - \hbar W_1|_{\phi_c=\varphi} + O'(\hbar^2). \quad (\text{C.2.82})$$

D'où on tire

$$\Gamma_1(\varphi) = \frac{1}{2} \text{tr} \left(\ln[K(x,y) + \frac{\lambda}{2} \delta^4(x-y)\varphi^2(y)] - \ln K(x,y) \right) \quad (\text{C.2.83})$$

$$= \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left[\delta(x-y) + \frac{\lambda}{2} \Delta(x-y)\varphi^2(y) \right] \quad (\text{C.2.84})$$

puis encore, en utilisant le développement

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (\text{C.2.85})$$

on obtient le développement perturbatif suivant

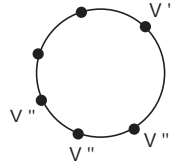
$$\Gamma_1(\varphi) = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda}{2} \int d^4x \Delta(x-x) \varphi^2(x) \right] \quad (\text{C.2.86})$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 \int d^4x d^4y \Delta(x-y) \varphi^2(y) \Delta(y-x) \varphi^2(x) \quad (\text{C.2.87})$$

$$+ \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^3 \int d^4x d^4y d^4z \Delta(x-y) \varphi^2(y) \Delta(y-z) \varphi^2(z) \Delta(z-x) \varphi^2(x) + \dots \quad (\text{C.2.88})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^n \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Delta(x_1-x_2) \varphi^2(x_2) \dots \Delta(x_n-x_1) \varphi^2(x_1) \quad (\text{C.2.89})$$

L'opération de "trace" engendre des boucles. Nous montrerons ci-après que le développement de $W[J]$ (ou de $\Gamma[\varphi]$) en puissances de \hbar correspond au développement en nombre de boucles.



Graphe d'ordre n ($V'' = \lambda / 2 \varphi^2(x)$)

La puissance de \hbar associée à un diagramme de $W[J]$ qui comporte

1. I lignes internes ($\hbar\Delta$),
2. E lignes externes ($\hbar\Delta$) terminées par
3. E sources (J/\hbar)
4. V vertex chacun d'eux apportant $1/\hbar$ et
5. compte tenu du facteur \hbar dans la définition même de $W[J]$

$$Z[J]/Z[0] = \exp(W[J]/\hbar) \quad (\text{C.2.90})$$

est donnée par

$$\hbar^{I+E-(V+E)+1} \quad (\text{C.2.91})$$

Théorème 4. Cette puissance de \hbar est égale au nombre de boucles (L) du diagramme, c'à d

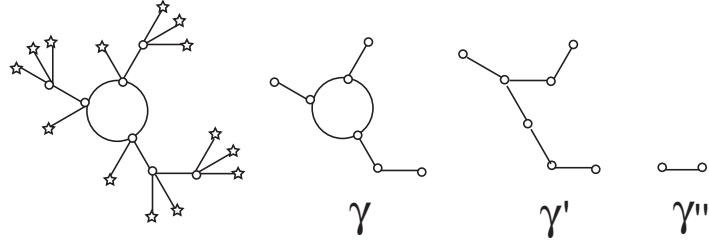
$$I - V + 1 = L \quad (\text{C.2.92})$$

Soit γ un diagramme connexe et γ' le diagramme connexe obtenu en coupant une ligne interne de γ .

Définition 7. Le nombre de boucles de γ est égal au nombre de boucles de γ' plus un:

$$L_\gamma = L_{\gamma'} + 1. \quad (\text{C.2.93})$$

Pour démontrer le théorème, on peut oublier les lignes externes et les sources et considérer un diagramme γ connexe sans ligne externe. Si, lorsqu'on supprime une ligne interne dans γ , on a encore un diagramme connexe γ' , $I_{\gamma'} = I_{\gamma} - 1$ et $L_{\gamma'} = L_{\gamma} - 1$. En otant ainsi toutes les lignes internes donc les boucles, on obtient un diagramme connexe à $L = 0$ boucle, càd un diagramme en arbre. Lorsqu'on supprime un vertex extérieur et la ligne qui le joint au reste du diagramme, $I \rightarrow I - 1$ et $V \rightarrow V - 1$. En continuant de la sorte, le dernier diagramme que l'on obtient (γ'') est formé d'une ligne interne reliant deux vertex et vérifie bien l'égalité $I - V + 1 = 0$.



C.3 $\Gamma_1(\varphi)$ pour un potentiel $V(\varphi)$

La référence de cette section est Zinn-Justin, 4ème édition. L'action est euclidienne et la dimension d'espace-temps est d . A la page 171, on a la définition suivante pour la contribution d'ordre \hbar à l'action effective

$$\Gamma_1(\varphi) = \frac{1}{2} \text{tr} [\ln S^{(2)}(x_1, x_2; \varphi) - \ln S^{(2)}(x_1, x_2; 0)] \quad (\text{C.3.94})$$

où

$$S^{(2)}(x_1, x_2; \phi) = \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)}. \quad (\text{C.3.95})$$

L'expression perturbative de (C.3.94) est donnée par

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int dx_1 \dots dx_n V''[\varphi(x_1)] \Delta(x_1, x_2) V''[\varphi(x_2)] \dots V''[\varphi(x_n)] \Delta(x_n, x_1) \quad (\text{C.3.96})$$

ou, en remplaçant les Δ par leurs transformées de Fourier,

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\varphi) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int dx_1 \dots dx_n V''[\varphi(x_1)] \dots V''[\varphi(x_n)] \\ &\int \frac{dp_1}{(2\pi)^d} \dots \frac{dp_n}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ip_1(x_1-x_2)}}{p_1^2 + m^2} \dots \frac{e^{-ip_n(x_n-x_1)}}{p_n^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.3.97})$$

Le produit des exponentielles peut se récrire comme

$$e^{-ip_1(x_1-x_2)} \dots e^{-ip_n(x_n-x_1)} = e^{-ix_1(p_1-p_n)} e^{-ix_2(p_2-p_1)} \dots e^{-ix_n(p_n-p_{n-1})} \quad (\text{C.3.98})$$

ce qui amène le changement de variables d'intégration suivant

$$p_1 = q_1 \quad (\text{C.3.99})$$

$$p_2 = q_1 + q_2 \quad (\text{C.3.100})$$

$$p_3 = q_1 + q_2 + q_3 \quad (\text{C.3.101})$$

$$\dots = \dots \quad (\text{C.3.102})$$

$$p_n = q_1 + q_2 + \dots + q_n \quad (\text{C.3.103})$$

et inversement

$$p_2 - p_1 = q_2 \quad (\text{C.3.104})$$

$$p_3 - p_2 = q_3 \quad (\text{C.3.105})$$

$$\dots = \dots \quad (\text{C.3.106})$$

$$p_n - p_{n-1} = q_n \quad (\text{C.3.107})$$

$$p_1 - p_n = -(q_2 + q_3 + \dots + q_n). \quad (\text{C.3.108})$$

On vérifie que le Jacobien vaut $J = 1$. Avec cela et $q = q_1$, (C.3.97) devient

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\varphi) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int dx_1 \dots dx_n V''[\varphi(x_1)] \dots V''[\varphi(x_n)] \\ &\quad \int \frac{dq_2}{(2\pi)^d} \dots \frac{dq_n}{(2\pi)^d} e^{ix_1(q_2+\dots+q_n)} e^{-ix_2q_2} \dots e^{-ix_nq_n} \\ &\quad \int \frac{dq}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + m^2)([q + q_2]^2 + m^2) \dots ([q + q_2 + \dots + q_n]^2 + m^2)} \end{aligned} \quad (\text{C.3.109})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int dx_1 \dots dx_n V''[\varphi(x_1)] \dots V''[\varphi(x_n)] \\ &\quad \int \frac{dq_2}{(2\pi)^d} \dots \frac{dq_n}{(2\pi)^d} e^{ix_1(q_2+\dots+q_n)} e^{-ix_2q_2} \dots e^{-ix_nq_n} \gamma^{(n)}(q_2, \dots, q_n) \end{aligned} \quad (\text{C.3.110})$$

où nous avons posé

$$\gamma^{(n)}(q_2, \dots, q_n) = \int \frac{dq}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + m^2)([q + q_2]^2 + m^2) \dots ([q + q_2 + \dots + q_n]^2 + m^2)} \quad (\text{C.3.111})$$

pour $n \neq 1$ et

$$\gamma^{(1)} = \int \frac{dq}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + m^2)}. \quad (\text{C.3.112})$$

Remark 1. *Le produit des exponentielles ci-dessus prend une forme plus symétrique si on tient compte de l'égalité*

$$e^{ix_1(q_2+\dots+q_n)} = \int \frac{dq_1}{(2\pi)^d} \delta(q_1 + q_2 + \dots + q_n) (2\pi)^d e^{-ix_1q_1}. \quad (\text{C.3.113})$$

On peut alors aussi utiliser les nouveaux coefficients

$$\tilde{\gamma}^{(n)}(q_1, q_2, \dots, q_n) = (2\pi)^d \delta(q_1 + q_2 + \dots + q_n) \gamma^{(n)}(q_2, \dots, q_n) \quad (\text{C.3.114})$$

qui sont les transformées de Fourier des vertex propres (à des facteurs constants près).

C.4 Parties singulières des $\gamma^{(n)}$

Les singularités des $\gamma^{(n)}$ et leur nombre dépendent de la dimension d de l'espace temps. Par simple comptage des puissances de q , on voit que $\gamma^{(n)}$ (C.3.111) converge pour $2n < d$.

C.4.1 En dimension $d = 4$

Seules les intégrales $\gamma^{(1)}$ et $\gamma^{(2)}$ sont divergentes. Pour les calculer, on choisit une méthode de régularisation ou on fait des soustractions. Ainsi, par exemple

$$\gamma^{(1)} = \gamma_{div}^{(1)} + \gamma_{fini}^{(1)} = A + \gamma_{fini}^{(1)} \quad (C.4.115)$$

$$\gamma^{(2)}(q_2) = \gamma_{div}^{(2)} + \gamma_{fini}^{(2)}(q_2) = B + \gamma_{fini}^{(2)}(q_2). \quad (C.4.116)$$

A et B sont des constantes infinies.

C.4.2 En dimension $d = 6$

Les intégrales $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ et $\gamma^{(3)}$ sont singulières et

$$\gamma^{(1)} = \gamma_{div}^{(1)} + \gamma_{fini}^{(1)} = A + \gamma_{fini}^{(1)} \quad (C.4.117)$$

$$\gamma^{(2)}(q_2) = \gamma_{div}^{(2)} + \gamma_{fini}^{(2)}(q_2) = B + C q_2^2 + \gamma_{fini}^{(2)}(q_2) \quad (C.4.118)$$

$$\gamma^{(3)}(q_2, q_3) = \gamma_{div}^{(3)} + \gamma_{fini}^{(3)} = D + \gamma_{fini}^{(3)}(q_2, q_3). \quad (C.4.119)$$

A, B, C, D sont des constantes infinies.

C.5 Application à la théorie en $\frac{\lambda}{4!}\varphi^4$ en $d = 4$

Dans ce cas, on a

$$V''[\varphi(x)] = \frac{\lambda}{2}\varphi^2(x). \quad (C.5.120)$$

$$\Gamma_1(\varphi)_{div} = \int dx_1 \frac{\lambda}{2}\varphi^2(x). A + \quad (C.5.121)$$

$$\begin{aligned} (-) & \frac{\lambda^2}{8} \int dx_1 dx_2 \varphi^2(x_1)\varphi^2(x_2) \int \frac{dq_2}{(2\pi)^4} e^{iq_2(x_1-x_2)} B \\ & = \int dx_1 \frac{\lambda}{2}\varphi^2(x). A + \end{aligned} \quad (C.5.122)$$

$$\begin{aligned} (-) & \frac{\lambda^2}{16} \int dx_1 dx_2 \varphi^2(x_1)\varphi^2(x_2) \delta(x_1 - x_2) B \\ & = \int dx_1 \frac{\lambda}{2}\varphi^2(x). A + \end{aligned} \quad (C.5.123)$$

$$\begin{aligned} & = \int dx_1 \frac{\lambda}{2}\varphi^2(x). A + \\ & (-) \frac{\lambda^2}{8} \int dx_1 \varphi^4(x_1) B \end{aligned} \quad (C.5.124)$$

$$\begin{aligned} & = \int dx_1 \frac{\lambda}{2}\varphi^2(x). A + \\ & (-) \frac{\lambda^2}{8} \int dx_1 \varphi^4(x_1) B \end{aligned} \quad (C.5.125)$$

La constante A peut être absorbée par une renormalisation de la masse; B , par une renormalisation de la constante de couplage.

C.6 Application à la théorie en $\frac{\lambda}{3!}\varphi^3$ en $d = 6$

Dans ce cas, on a

$$V''[\varphi(x)] = \lambda\varphi(x). \quad (\text{C.6.126})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\varphi)_{div} &= \int dx_1 \lambda\varphi(x). A + \\ (-) \quad &\frac{\lambda^2}{4} \int dx_1 dx_2 \varphi(x_1)\varphi(x_2) \int \frac{dq_2}{(2\pi)^6} e^{iq_2(x_1-x_2)} (B + Cq_2^2) + \\ &+ \frac{\lambda^3}{6} \int dx_1 dx_2 dx_3 \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3) \int \frac{dq_2}{(2\pi)^6} \frac{dq_3}{(2\pi)^6} e^{iq_2(x_1-x_2)} e^{iq_3(x_1-x_3)} D \end{aligned}$$

ou encore

$$= \int dx_1 \lambda\varphi(x). A + \quad (\text{C.6.127})$$

$$(-) \quad \frac{\lambda^2}{4} \int dx_1 dx_2 \varphi(x_1)\varphi(x_2) [B\delta(x_1 - x_2) - C\Box_{x_1}\delta(x_1 - x_2)] \quad (\text{C.6.128})$$

$$+ \frac{\lambda^3}{6} \int dx_1 dx_2 dx_3 \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3) \int \delta(x_1 - x_2)\delta(x_1 - x_3) D \quad (\text{C.6.129})$$

$$= \int dx_1 \lambda\varphi(x). A + \quad (\text{C.6.130})$$

$$(-) \quad \frac{\lambda^2}{4} \int dx_1 \varphi^2(x_1) B - C\varphi(x_1)\Box_{x_1}\varphi(x_1) + \quad (\text{C.6.131})$$

$$+ \frac{\lambda^3}{6} \int dx_1 dx_2 dx_3 \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3) \int \delta(x_1 - x_2)\delta(x_1 - x_3) D$$

Finalement

$$\Gamma_1(\varphi)_{div} = \int dx_1 \lambda\varphi(x). A + \quad (\text{C.6.132})$$

$$\begin{aligned} (-) \quad &\frac{\lambda^2}{4} \int dx_1 B\varphi^2(x_1) - C\varphi(x_1)\Box_{x_1}\varphi(x_1) + \\ &+ \frac{\lambda^3}{6} \int dx_1 \varphi^3(x_1) D \end{aligned} \quad (\text{C.6.133})$$

La constante B peut être absorbée par une renormalisation de la masse, D , par une renormalisation de la constante de couplage et C par une renormalisation de la fonction d'onde. La présence de A est due au graphe dit "têtarde" de la théorie en ϕ^3 .