

MATH-F-112 – MATHÉMATIQUES
Module T du Q1

L'examen comprend 4 questions valant chacune 10 points.
Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées**.
Vous pouvez utiliser UNIQUEMENT de quoi écrire.
Répondez à chaque question sur la page correspondante.
Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille
de réponse.

NOM, PRENOM:

MATRICULE:

SECTION:

Question 1		/10
Question 2		/10
Question 3		/10
Question 4		/10
Total		/40

1. (10 points) Pour quels naturels n l'inégalité

$$2^n > n^2$$

est-elle vraie ?

2. (10 points) Démontrer que la droite d'équation $2x + y + 3 = 0$ coupe le segment limité par les points $a = (-5, 1)$ et $b = (3, 7)$.

3. (10 points) Calculer les limites pour $x \rightarrow \infty$ et $x \rightarrow -\infty$ de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.

4. (10 points) Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Que vaut

$$\frac{d}{dx} \int_5^x (f(t))^2 dt$$

MATH-F-112 – MATHÉMATIQUES

Module T du Q2

GEOG1 – GEOL1

L'examen comprend 2 questions valant chacune 10 points.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées**.

Vous pouvez utiliser **UNIQUEMENT** de quoi écrire.

Répondez à chaque question sur la page correspondante.

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous **ET** sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRENOM:

MATRICULE:

SECTION:

Question 1		/10
Question 2		/10
Total		/20

1. (10 points) Soit l'équation différentielle

$$y'' - y = 2 \cos(x) - 2 \sin(x).$$

- (a) Montrer que $f(x) = x \sin(x)$ est solution de celle-ci.
- (b) Résoudre l'équation différentielle.
- (c) (BONUS) Résoudre l'équation différentielle avec conditions de Cauchy $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$.

2. (10 points) Soit la fonction $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^3+y^3}$.
- (a) Montrer que $f(x, y)$ n'est pas continue en $(0, 0)$.
 - (b) Calculer le gradient ∇f en un point quelconque (x, y) .
 - (c) Si $p = (1, 1)$, calculer $\nabla f(p)$.
 - (d) Avec le même p , et si $\vec{v} = (5, 7)$, calculer $df(p)(\vec{v})$.

MATH-F-112 – MATHÉMATIQUES

Module S du Q2

GEOG2 – GEOL2

L'examen comprend 3 questions valant chacune 10 points.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées**.

Vous pouvez utiliser **UNIQUEMENT** de quoi écrire.

Répondez à chaque question sur la page correspondante.

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous **ET** sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRENOM:

MATRICULE:

SECTION:

Question 1		/10
Question 2		/10
Question 3		/10
Total		/30

1. (10 points) On considère le champ de vecteurs f défini sur \mathbb{R}^2 par

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-y, x^2)$$

- (a) Calculer la divergence et le rotationnel de ce champ en un point (x, y) quelconque de \mathbb{R}^2 ;
- (b) Calculer l'intégrale curviligne de ce champ le long du cercle de rayon 1 centré en $(0, 0)$ parcouru dans le sens trigonométrique.

2. (10 points) On considère la série suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{4^n}$$

- (a) Cette série est-elle convergente ?
- (b) Cette série est-elle absolument convergente ?

3. (10 points) Une application linéaire L de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 (aussi appelé opérateur linéaire sur \mathbb{R}^3) a pour matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Quelle est l'image du vecteur $(1, 1, 2)$ par cette application ?
- (b) Calculer le déterminant de cette matrice et en déduire que 0 est valeur propre. Chercher les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.
- (c) Chercher les éventuelles autres valeurs propres de cet opérateur.

MATH-F-112 – MATHÉMATIQUES
Modules T et S du Q2
BIOL1 – CHIM1 – IRBI1 – SCIE1

L'examen comprend 5 questions valant chacune 10 points.
Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées**.
Vous pouvez utiliser **UNIQUEMENT** de quoi écrire.
Répondez à chaque question sur la page correspondante.
Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRENOM:

MATRICULE:

SECTION:

Question 1		/10
Question 2		/10
Question 3		/10
Question 4		/10
Question 5		/10
Total		/50

1. (10 points) Soit l'équation différentielle

$$y'' - y = 2 \cos(x) - 2 \sin(x).$$

- (a) Montrer que $f(x) = x \sin(x)$ est solution de celle-ci.
- (b) Résoudre l'équation différentielle.
- (c) (BONUS) Résoudre l'équation différentielle avec conditions de Cauchy $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$.

2. (10 points) Soit la fonction $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^3+y^3}$.
- (a) Montrer que $f(x, y)$ n'est pas continue en $(0, 0)$.
 - (b) Calculer le gradient ∇f en un point quelconque (x, y) .
 - (c) Si $p = (1, 1)$, calculer $\nabla f(p)$.
 - (d) Avec le même p , et si $\vec{v} = (5, 7)$, calculer $df(p)(\vec{v})$.

3. (10 points) On considère le champ de vecteurs f défini sur \mathbb{R}^2 par

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \rightarrow (-y, x^2)$$

- (a) Calculer la divergence et le rotationnel de ce champ en un point (x, y) quelconque de \mathbb{R}^2 ;
- (b) Calculer l'intégrale curviligne de ce champ le long du cercle de rayon 1 centré en $(0, 0)$ parcouru dans le sens trigonométrique.

4. (10 points) On considère la série suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{4^n}$$

- (a) Cette série est-elle convergente ?
- (b) Cette série est-elle absolument convergente ?

5. (10 points) Une application linéaire L de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 (aussi appelé opérateur linéaire sur \mathbb{R}^3) a pour matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Quelle est l'image du vecteur $(1, 1, 2)$ par cette application ?
- (b) Calculer le déterminant de cette matrice et en déduire que 0 est valeur propre. Chercher les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.
- (c) Chercher les éventuelles autres valeurs propres de cet opérateur.

MATH-F-112 – MATHÉMATIQUES
Modules T et SI du Q2
INFO1

L'examen comprend 5 questions valant chacune 10 points.
Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées**.
Vous pouvez utiliser **UNIQUEMENT** de quoi écrire.
Répondez à chaque question sur la page correspondante.
Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous **ET** sur chaque feuille
de réponse.

NOM, PRENOM:

MATRICULE:

SECTION:

Question 1		/10
Question 2		/10
Question 3		/10
Question 4		/10
Question 5		/10
Total		/50

1. (10 points) Soit l'équation différentielle

$$y'' - y = 2 \cos(x) - 2 \sin(x).$$

- (a) Montrer que $f(x) = x \sin(x)$ est solution de celle-ci.
- (b) Résoudre l'équation différentielle.
- (c) (BONUS) Résoudre l'équation différentielle avec conditions de Cauchy $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$.

2. (10 points) Soit la fonction $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^3+y^3}$.
- (a) Montrer que $f(x, y)$ n'est pas continue en $(0, 0)$.
 - (b) Calculer le gradient ∇f en un point quelconque (x, y) .
 - (c) Si $p = (1, 1)$, calculer $\nabla f(p)$.
 - (d) Avec le même p , et si $\vec{v} = (5, 7)$, calculer $df(p)(\vec{v})$.

3. (10 points) Montrer que la partie suivante est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}_5)^3$:

$$B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (4, 1, 0)\}.$$

Déterminer les composantes d'un vecteur quelconque de $(\mathbb{Z}_5)^3$ dans cette base.

4. (10 points) Considérons l'application linéaire définie par

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 : (x, y, z, t) \mapsto (x + y, t, z, z - t)$$

- (a) Déterminer la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .
- (b) Déterminer le noyau de f et le rang de f . Est-ce que f est une permutation linéaire de \mathbb{R}^4 ?
- (c) Déterminer toutes les valeurs propres de f .

5. (10 points) Soit $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 3 \times 3)$ une matrice réelle 3×3 .
- (a) Qu'est-ce que le rang de A ?
 - (b) Quand dit-on que A est orthogonale ?
 - (c) Quand dit-on que A est symétrique ?
 - (d) Quand dit-on que A est triangulaire ?
 - (e) Déterminer toutes les matrices $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 3 \times 3)$ qui sont à la fois triangulaire et orthogonale. Justifier.