Math F 112 — Mathématiques pour les bacheliers en Bio-ingénieur, Biologie, Chimie, Géographie, Géologie, Informatique, Sciences (polyvalente)

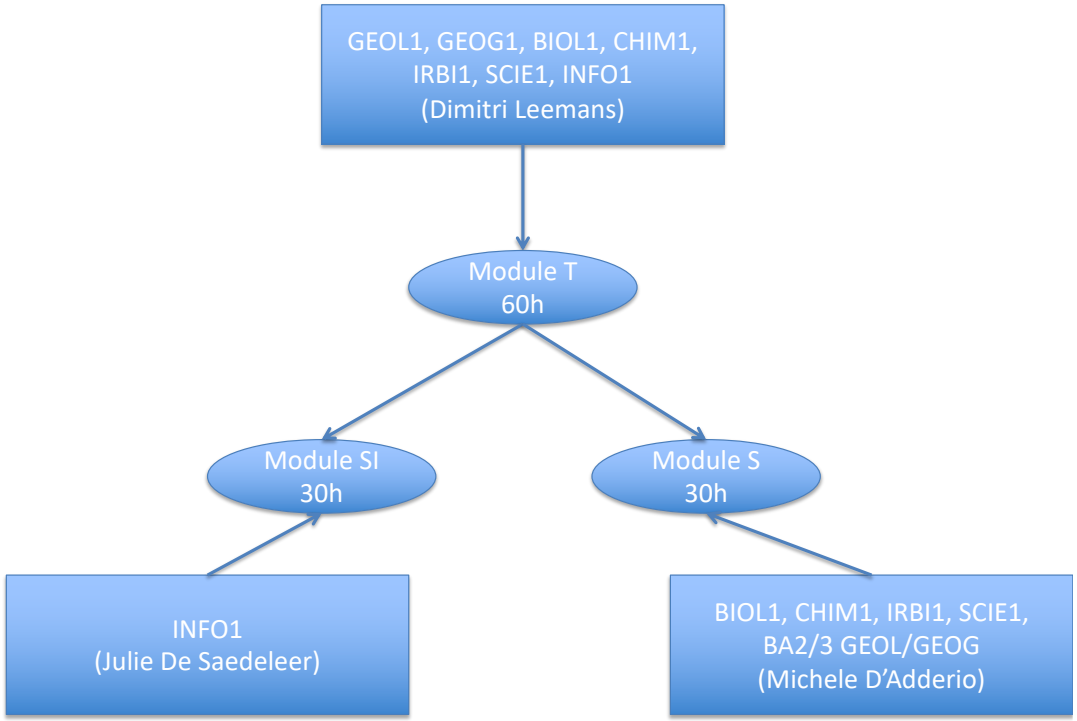
Julie de Saedeleer, Dimitri Leemans[1], Michele D'Adderio

Année académique 2019 — 2020

[1] dleemans@ulb.ac.be

Agencement du cours

- Le cours concerne sept sections !
- Agencé en modules : T, S, SI.



En bref

Réussite Obtenir au moins 10/20.

Échec Obtenir strictement moins que 10/20.

- un test facultatif en novembre,
- un examen en janvier (obligatoire !),
- un examen en juin :
  - Sur la partie du 2e quadri : obligatoire
  - Sur la partie du 1er quadri : non-obligatoire (report de la note de janvier possible)
- un examen en août par partie

Durées et pondérations en janvier et juin

GEOL1, GEOG1 : 60h Janvier : 3h. Juin : 2h pour le Q1, 1h pour le Q2

- 13 points pour le Q1
- 7 points pour le Q2

GEOL2 GEOG2 : 30h le cours est au Q2. Un seul examen de 1h en juin.

BIOL1, SCIE1, CHIM1, IRBI1, INFO1 Janvier: 3h. Juin: 2h pour le Q1, 2h pour le Q2

- 10 points pour le Q1
- 10 points pour le Q2

À prendre avec soi

Aux évaluations (= examens), vous vous munirez de :

- Carte d'étudiant et carte d'identité.
- Stylo et papier
- (éventuellement) à boire et un snack au cas où.

Le reste est **interdit**. En particulier (liste non-exhaustive):

- GSM, ordinateur, calculatrice : sont interdits !
- Notes de cours et syllabus : sont interdits !

Test d'octobre ...

Pour l'étudiant

- qui a un test en octobre, *et*
- qui a réussi mieux en novembre qu'en janvier.

sa note finale pour le Q1 est la moyenne pondérée :

- pour un quart de celle d'octobre, et
- pour trois-quarts de celle de janvier

L'interro d'octobre ne compte pas dans la note de Q1 de juin.

Durées et pondérations en septembre

L'examen du mois d'août (seconde session) est un examen en deux parties comme en juin.
La durée est la même qu'en juin.
La pondération des quadrimestres est identique à celle de juin.

Syllabus et exercices

- Le syllabus pour le module T se trouve aux PUB
- Les énoncés pour les séances d'exercices de ces modules sont également aux PUB (un fascicule pour tout).
- Site web du cours:
  http://homepages.ulb.ac.be/∼dleemans/mathf112/

Tous les syllabi disponibles aux PUB sont sur le site web du cours.

Matière de l'examen

La matière de l'examen est l'union :

- du cours oral, et
- des exercices.

GEOL1 Un seul groupe – Thibaut Kemajou

GEOG1 Un seul groupe – Christine Cutting

BIOL1 et SCIE1
- Groupes 1 et 2 – Julien Remy
- Groupe 3 – Paulien Jansen
- Groupe 4 et SCIE1 – Thibaut Kemajou

INFO1
- Groupes 1 et 2 – Thibaut Kemajou
- Groupes 3 et 4 – Paulien Jansen
- Groupes 5 et 6 – Hussein Cheikh-Ali
- Groupe 7 – Anna Vanden Wyngaerd

CHIM1
- Groupe 1 – Paulien Jansen
- Groupes 2 et 3 – Jessica Mulpas

IRBI1
- Groupes 1 et 2 – Hussein Cheikh-Ali
- Groupes 3 et 4 – Hussein Cheikh-Ali
- Groupe 5 – Bastien Marquis

Définitions et résultats

Définition

Une **définition** *est une manière d'attribuer un mot ou une notation à un concept.*

Exemple

La description du mot "définition" ci-dessus peut-être vue comme une définition.

Exemple

Un exemple plus classique et plus mathématique :

Définition

Si x est un réel, et si k est un entier, on définit :

$$x^k := \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{k \text{ fois}} \tag{1}$$

Démonstration

Définition

Démonstration *: succession d'affirmations qui découlent les unes des autres par applications de règles logiques à des résultats déjà connus.*

En pratique, une démonstration sert à *convaincre* de la véracité d'une affirmation.
Pour démontrer un résultat, il faut connaître les définitions impliquées !

Exemple

Si x est un réel, et si k et l sont des entiers, démontrer que $x^k x^l = x^{k+l}$.

Manipuler le vrai et le faux

Définition

On s'intéresse à la valeur de vérité des affirmations : vrai ou faux ? C'est soit l'un, soit l'autre.

Exemple

Considérons les affirmations suivantes

- x est positif ;
- Si x est plus grand que 1 alors x est positif ;
- Pour tout x entier, x est positif ;
- Il existe x entier tel que x est positif ;

Exemple

Il se fait que :

- la première est vraie ou fausse selon la valeur de x,
- la seconde est vraie quelle que soit la valeur de x,
- la troisième est fausse et
- la dernière est vraie.

Connecteurs logiques

En construisant les affirmations, nous utilisons des connecteurs logique : et (noté $\wedge$), ou (noté $\vee$), implique (noté $\rightarrow$), négation de (noté $\neg$).

Exemple

S'il pleut ou s'il grèle, je prends mon parapluie.

- Notons P l'affirmation Il pleut,
- Notons G l'affirmation Il grèle,
- Notons A l'affirmation Je prends mon parapluie.

Alors on peut ré-écrire l'affirmation initiale sous forme symbolique : (le faire !)

$$(P \vee G) \rightarrow A$$

Quantificateurs

Lorsqu'une proposition dépend d'une variable, sa valeur de vérité dépend de la variable.

Exemple

La proposition x est positif (nommons-la $P(x)$) est parfois vraie, parfois fausse.

Le quantificateur pour tout, noté $\forall$ s'utilise comme suit :

$\forall x, P(x)$ se traduit par pour tout x, P(x) est vraie.

Le quantificateur il existe, noté $\exists$ s'utilise comme suit :

$\exists x : P(x)$ se traduit par Il existe une valeur de x telle que P(x) est vraie.

Exemple

J'ai 3 paires de chaussettes différentes. Si je choisis au hasard sans regarder, combien dois-je prendre de chaussettes dans ma valise pour être totalement certain d'avoir au moins deux chaussettes d'une même paire ?
Réponse : 4.

Raisonnements

L'énigme

Il y a cinq maisons de cinq couleurs différentes.
Dans chacune de ces maisons, vit une personne de nationalité différente.
Chacune de ces personnes boit une boisson différente, fume un cigare différent et a un animal domestique différent.

- *L'Anglais vit dans la maison rouge.*
- *Le Suédois a des chiens.*
- *Le Danois boit du thé.*
- *La maison verte est à gauche de la maison blanche.*
- *Le propriétaire de la maison verte boit du café.*
- $\vdots$
- *(l'énoncé complet se trouve dans le syllabus et sur Internet)*

Question : qui a le poisson ?

Raisonnement par l'absurde

Question

Existe-t-il un nombre qui, multiplé par 0, *vaut* 1 *?*

Exemple

Supposons, par l'absurde, qu'un tel nombre a existe.
Nous voulons $0a = 1$.
Or $a0 = 0$.
Dès lors nous aurions $0 = 1$, qui est une contradiction.

Contraposée

Exemple

Les affirmations S'il pleut je prends mon parapluie et Si je ne prends pas mon parapluie, c'est qu'il ne pleut pas sont équivalentes du point de vue des valeurs de vérité. On peut également facilement passer de l'une à l'autre par un raisonnement par l'absurde.

Exemple

Si x est divisible par 6, alors x est pair est équivalente à Si x n'est pas pair, alors x n'est pas divisible par 6.

Théorème (Principe général du raisonnement par contraposée)

Si P et Q sont des affirmations, alors l'affirmation $P \to Q$ est équivalente à $(\neg Q) \to (\neg P)$.

Construisons les tables de vérité (le faire).

Démonstration par récurrence / induction

Principe

Supposons que nous voulions démontrer une proposition $p(n)$ pour tout entier naturel n (c'est-à-dire $n = 0, 1, 2, \ldots$).
Si nous pouvons prouver :

- $p(0)$ (le pas initial), et
- $\forall k \in \mathbb{N}, (p(k) \rightarrow p(k+1))$ (l'étape d'induction),

alors le principe d'induction affirme que $\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$.

Démonstration par récurrence / induction

Exemple

Montrons par récurrence que la somme des entiers de 0 à n vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.
C'est notre affirmation $p(n)$.
L'affirmation $p(0)$ est : La somme des entiers de 0 à 0 vaut 0.
Ceci étant clair, le pas initial est donc prouvé.

Démonstration par récurrence / induction

Exemple

Pour l'étape d'induction, fixons un nombre k quelconque, et supposons $p(k)$, c'est-à dire supposons

$$0 + 1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Nous voulons montrer $p(k+1)$, c'est-à-dire :

$$0 + 1 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Or la somme du membre de gauche passe par k, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sous la forme

$$\underbrace{0 + 1 + \cdots + k}_{= \frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

Démonstration par récurrence / induction

Exemple

En mettant alors au même dénominateur, nous obtenons

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

et, en mettant $k+1$ en évidence, nous avons :

$$\frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

Mettant maintenant bout à bout nos dernières égalités, nous avons obtenu :

$$0 + 1 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ce que nous voulions démontrer !
Par le principe d'induction, l'égalité $p(n)$ est donc vraie pour tout entier n.

Modélisation

Pour beaucoup, les mathématiques seront un outil pour étudier une certaine réalité.
La réalité étant bien généralement trop complexe, il faudra la simplifier.
Le passage d'une réalité complexe à une vision mathématisée, moins complexe, est la **modélisation** du problème.

Exemple

On lance une pièce de monnaie. Il faut d'abord définir ce à quoi on s'intéresse :

- La trajectoire de la pièce ?
- La manière dont elle tourne ?
- Au déplacement d'air qu'elle provoque ?
- Aux processus cognitifs qui font qu'on est capable ou pas de ratrapper la pièce avant qu'elle retombe ?
- Ou, simplement, au résultat pile ou face obtenu ?

Une classification des nombres

Si on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres dits réels, on a des inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

où

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des (entiers) naturels.
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers (relatifs).
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels (nombres qui s'écrivent comme fractions d'entiers).

Les nombres réels qui ne sont pas dans $\mathbb{Q}$ sont dits irrationnels (p.ex. $\sqrt{3}$, π, etc.)

Développement décimal

Le développement décimal d'un nombre est son écriture en chiffres.
Dans le tableau, le développement décimal de x est y :

x	y
1	1
$1/2$	0.5
$1/3$	$0.333...3...$
$1/11$	$0.090909...09...$
π	$3.14159...$

Théorème

Un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique.

Précision, illusion de précision et arrondis

Exemple

En roulant à vélo à 20km/h pendant 10 minutes, la distance parcourue est de 3.333...3...km.

La présence des décimales laisse croire à une précision importante dans le calcul, alors qu'en réalité la vitesse utilisée (20 à l'heure) était probablement une approximation grossière.

$\Rightarrow$ Dans les problèmes physique, on arrondit généralement les réponses.

Les nombres peuvent être comparés entre eux.

Définition

On dit que

- *a est strictement inférieur à b, noté* $a < b$*, si a est plus petit et différent de b ;*
- *a est strictement supérieur à b, noté* $a > b$*, si a est plus grand et différent de b ;*
- *a est inférieur à b (ou inférieur ou égal), noté* $a \leq b$*, si a est plus petit ou égal à b ;*
- *a est supérieur à b (ou supérieur ou égal), noté* $a \geq b$*, si a est plus grand ou égal à b.*

Exemple

Les affirmations suivantes sont vraies :

- $2 \leq 3$
- $2 < 3$
- $-2 \leq 1$
- $-2 \leq -1$
- $2 \leq 2$
- $2 \geq 2$
- $5 > 3$

Exemple

Mais celles-ci sont fausses :

- $2 \geq 3$
- $-2 \geq 1$
- $-2 \geq -1$
- $2 < 2$
- $2 > 2$
- $5 < 3$

Nous supposons les résultats suivant connus.

Propriété

Pour tous réels a, b, c, nous avons :

- *Si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$*
- *Si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$ (propriété de transitivité).*

Propriété

Soient a, b des nombres réels tels que $a \leq b$. Alors pour tout réel c nous avons

$$a + c \leq b + c.$$

De plus, si $c \geq 0$, on a

$$ac \leq bc$$