Math F 112 — Mathématiques pour les bacheliers en Bio-ingénieur, Biologie, Chimie, Géographie, Géologie, Informatique, Sciences (polyvalente)

Julie de Saedeleer, Dimitri Leemans[1], Michele D'Adderio

Année académique 2019 — 2020

[1] dleemans@ulb.ac.be

Définition

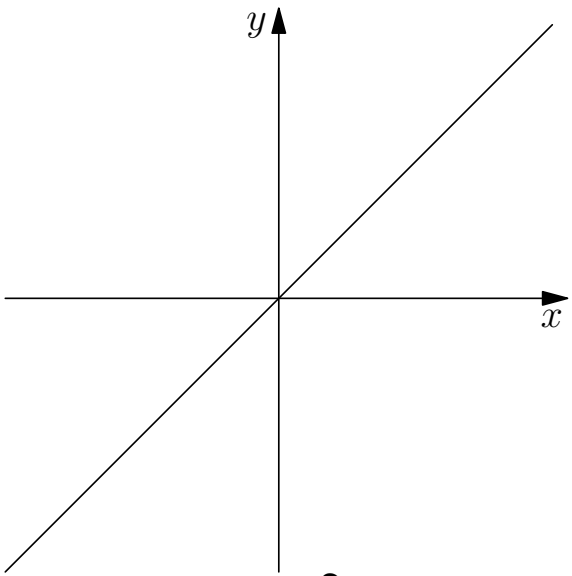
Une fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles est une fonction de la forme $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

On imagine qu'une telle fonction décrit la paramétrisation d'une courbe, d'une trajectoire. À chaque valeur de la variable $t \in A$ correspond un point $f(t) \in \mathbb{R}^n$. Lorsque t évolue, cela rend compte du déplacement du point. La valeur de n indique dans quel espace la courbe vit :

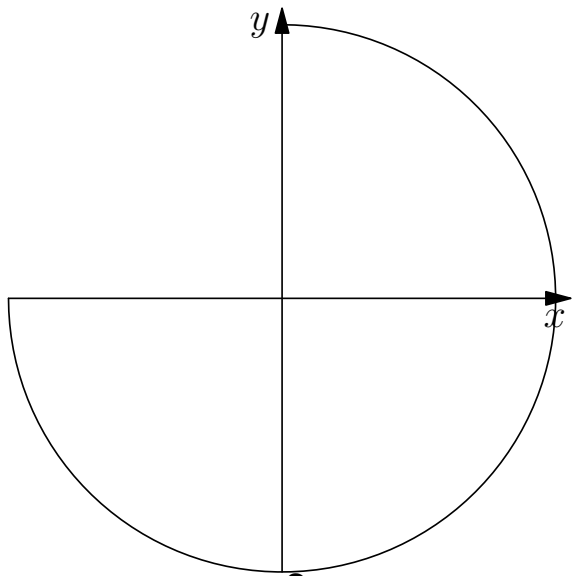
- Si $n = 1$, le mobile se déplace le long d'une droite ;
- si $n = 2$, le mobile se déplace dans un plan ;
- si $n = 3$, le mobile se déplace dans l'espace,
- etc.

Exemple

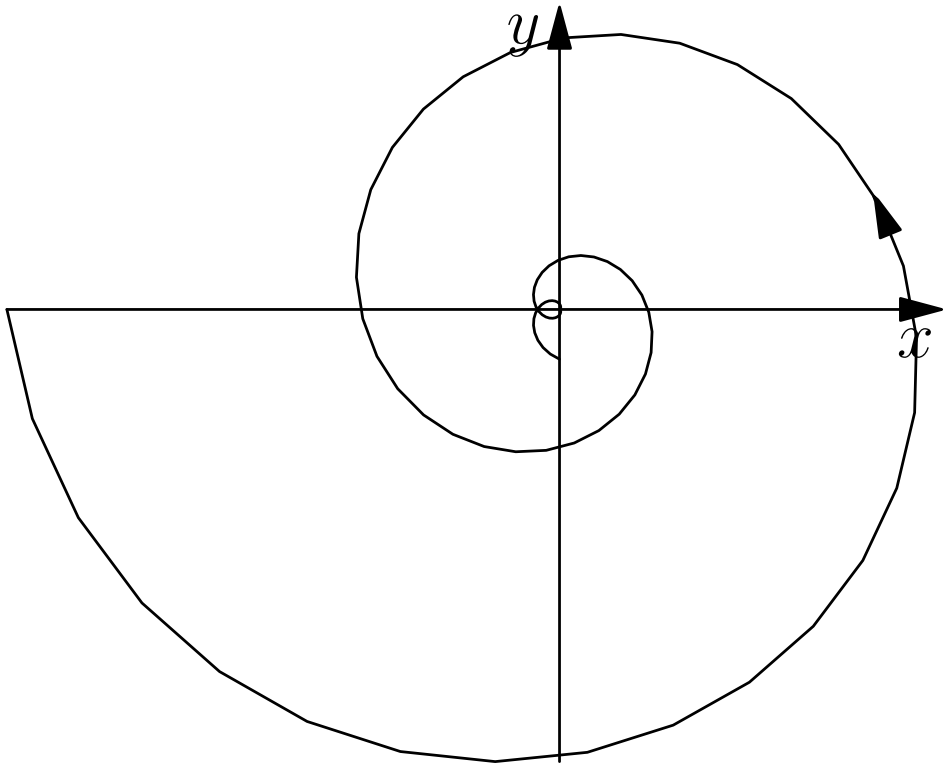
Dans les exemples ci-dessous, c'est l'ensemble image $\Im f$ qui est représenté. Ce n'est pas le graphe de f : il n'a pas d'interprétation utile à ce stade.



$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, t)$



$f : [-\pi, \pi/2] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$



$$f : [-5\pi, 3\pi/2] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2 \cos t, t^2 \sin t)$$

Remarque

Notons que l'ensemble Im f ne donne pas une information suffisante pour pouvoir connaître le mouvement. Deux courbes peuvent provenir de deux paramétrisations différentes.

Limites et continuité

Définition

Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une application, $a \in A$, et $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^n$. On dit que la limite de f en a est $\mathbf{L}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \mathbf{L}\| \leq \epsilon.$$

On écrit dans ce cas

$$\lim_{x \to a} f(x) = \mathbf{L}.$$

Définition

La fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est **continue** *en $a \in A$ si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

La fonction f est dite **continue** *si elle est continue en chaque point.*

Définition

Une application $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **dérivable** *en $a \in A$ si a est intérieur à A et si la limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$ est appelée la **dérivée** *de f en a.*

En pratique, nous avons le résultat suivant :

Proposition

Une application $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est continue (resp. dérivable) en $a \in A$ si et seulement si pour tout $i = 1 \dots n$, $f_i : A \to \mathbb{R}$ est continue (resp. dérivable) en a. De plus, si elle existe, la dérivée est donnée par

$$f'(a) = (f_1'(a), \dots, f_n'(a)).$$

Définition

Une **courbe paramétrée** *de* $\mathbb{R}^n$ *est une application continue*

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

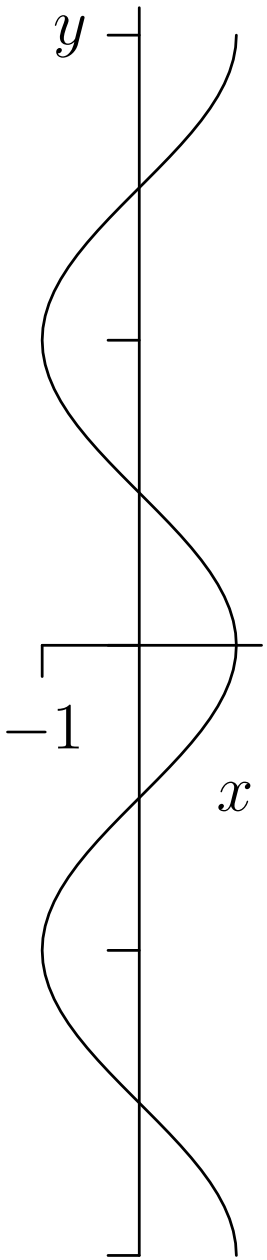
définie sur un intervalle I*.*

Remarque

Si γ *est une courbe paramétrée dérivable correspondant à la trajectoire d'un mobile au cours du temps, alors* $\gamma'(t)$ *correspond au vecteur vitesse de ce mobile à l'instant* t*. La vitesse scalaire est* $\|\gamma'(t)\|$*.*

Exercice

Représenter l'image de γ*, où* $\gamma(t) = (\cos(t), t)$*. Représenter également* $\gamma'(t)$ *pour quelques valeurs de* t*.*


y
−1
x

Remarque

Intuitivement, on peut parcourir une courbe donnée de plusieurs manières :

- *dans un sens ou dans l'autre,*
- *ou à différentes vitesses.*

Définition

Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrée, on dit qu'une courbe paramétrée $\eta : J \to \mathbb{R}^n$ est une **re-paramétrisation** *de γ si il existe une bijection continue $\alpha : I \to J$ telle que $\eta \circ \alpha = \gamma$.*
On dit que γ et η ont même orientation si l'application α est croissante.

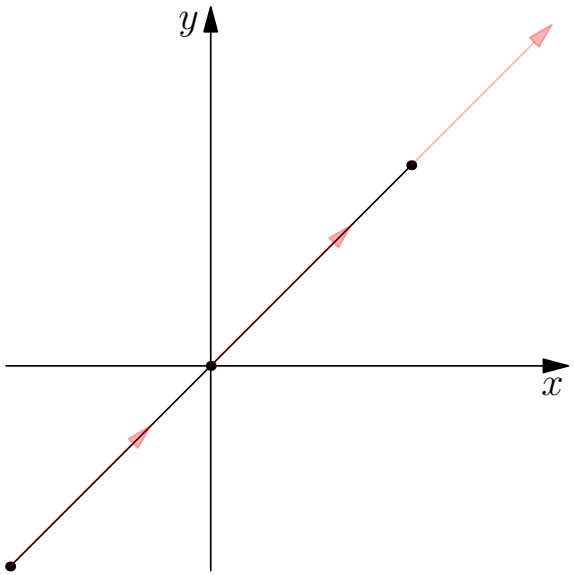
Remarque

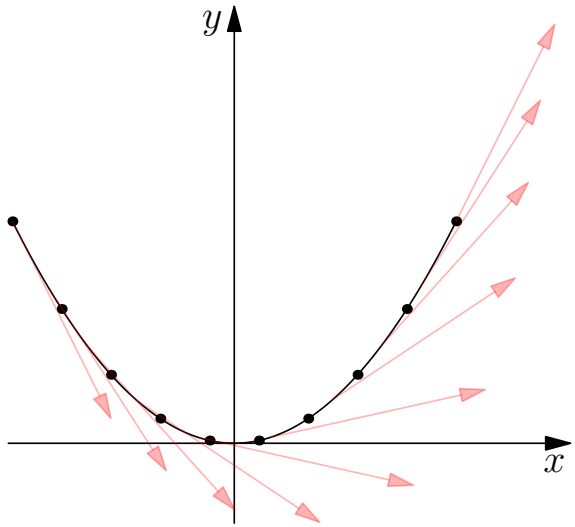
- *Certaines notions, telle que la longueur d'une courbe, devraient idéalement ne pas dépendre de la paramétrisation choisie.*
- *D'autres notions en dépendent de manière évidente, comme par exemple la notion de vitesse.*

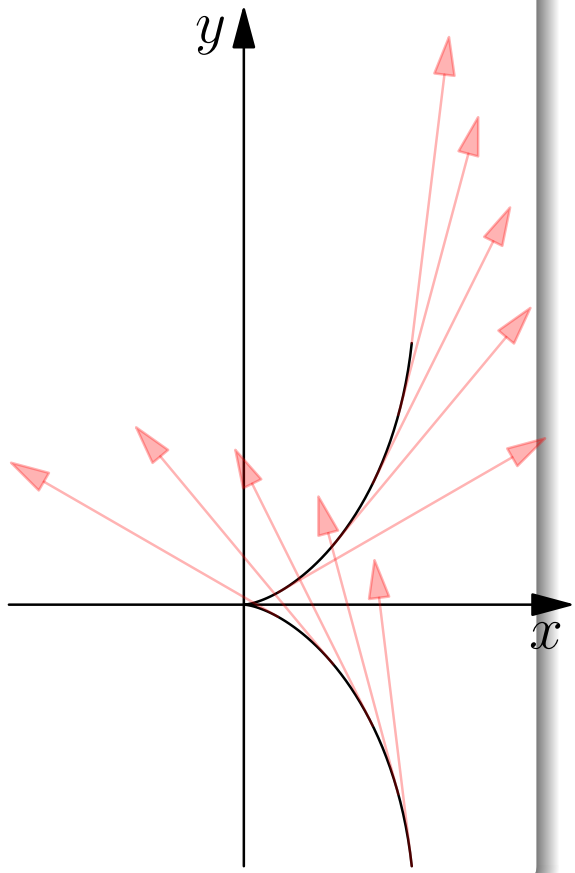
Définition

Le **vecteur vitesse** *ou* **vecteur tangent** *d'une courbe paramétrée* γ *à l'instant* t *est donné par le vecteur* $\gamma'(t)$. *Sa norme est parfois appelée la* **vitesse numérique** *à l'instant* t. *Le vecteur* $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ *est appelé* **vecteur tangent unitaire** *à l'instant* t *et est noté* $T(t)$.

Exemple







Définition

Le **vecteur accélération** *de γ à l'instant t est défini par $\gamma''(t)$.*

Attention à la définition similaire mais différente suivante, où on dérive maintenant le vecteur tangent unitaire :

Définition

Le **vecteur normal unitaire**, *s'il existe, est donné par* $N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$.

Remarque

Le vecteur normal unitaire est effectivement normal (orthogonal) au vecteur tangent.

Preuve.

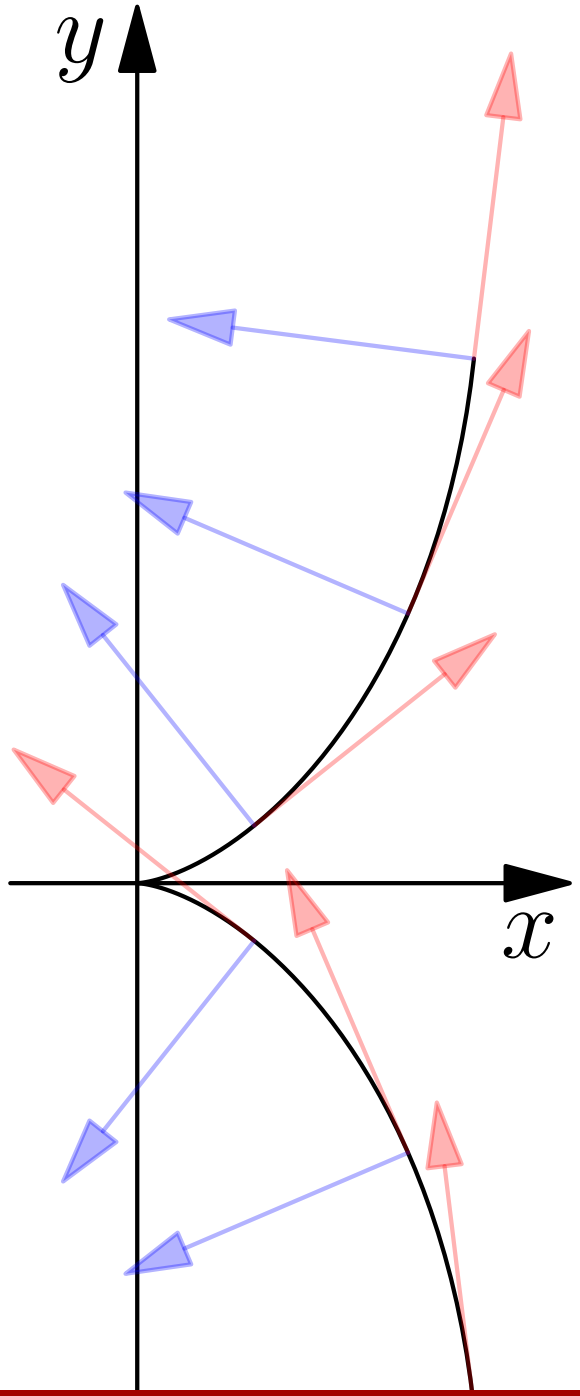
Puisque $T(t)$ est de norme 1, on peut dériver l'égalité

$$\langle T(t), T(t) \rangle = 1$$

pour obtenir

$$2 \langle T'(t), T(t) \rangle = 0$$

ce qui, en divisant par 2 et par la norme de T', donne bien $\langle N(t), T(t) \rangle = 0$ comme attendu. □


y
x

Définition

Si $n = 3$, c'est-à-dire pour une courbe dans l'espace, on définit le vecteur binormal $B = T \times N$.

Son utilité est la suivante :

Proposition

La courbe γ est plane si et seulement si $B'(t) = 0$ pour tout t.

Définition

Une courbe plane est une courbe dont l'image est entièrement contenue dans un plan.

Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable et si $a, b \in I$, la **longueur** de $\gamma([a, b])$ est donnée par l'intégrale :

$$\int_a^b \left\| \gamma'(t) \right\| dt$$

Idée de preuve.

Prenons $a = 0$ et $b = 1$ pour simplifier. Subdivisons le domaine $[a, b]$ en n parties égales, et approchons la longueur par

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \gamma(\frac{i}{n}) - \gamma(\frac{(i-1)}{n}) \right\| = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left\| \gamma(\frac{i}{n}) - \gamma(\frac{(i-1)}{n}) \right\|}{\frac{1}{n}} \frac{1}{n}$$

On remarque que lorsque n est grand, la fraction $\frac{\left\| \gamma(\frac{i}{n}) - \gamma(\frac{(i-1)}{n}) \right\|}{\frac{1}{n}}$ s'approche de $\left\| \gamma'(\frac{i}{n}) \right\|$, de sorte que la somme ci-dessus correspond à l'intégrale de Riemann. □