Math F 112 — Mathématiques pour les bacheliers en Bio-ingénieur, Biologie, Chimie, Géographie, Géologie, Informatique, Sciences (polyvalente)

Julie de Saedeleer, Dimitri Leemans[1], Michele D'Adderio

Année académique 2019 — 2020

[1] dleemans@ulb.ac.be

Soit $f : A \to B$ une fonction.

Soit $f : A \to B$ une fonction.

- f est **surjective** si

Soit $f : A \to B$ une fonction.

- f est **surjective** si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A ;

Soit $f : A \to B$ une fonction.

- f est **surjective** si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A ;
- f est **injective** si

Soit $f : A \to B$ une fonction.

- f est **surjective** si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A ;
- f est **injective** si deux éléments distincts de A ont des images distinctes ;

Soit $f : A \to B$ une fonction.

- f est **surjective** si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A ;
- f est **injective** si deux éléments distincts de A ont des images distinctes ;
- f est **bijective** si

Soit $f : A \to B$ une fonction.

- f est **surjective** si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A ;
- f est **injective** si deux éléments distincts de A ont des images distinctes ;
- f est **bijective** si f est à la fois injective et surjective.

Soit $f : A \to B$ une fonction.

- f est **surjective** si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A ;
- f est **injective** si deux éléments distincts de A ont des images distinctes ;
- f est **bijective** si f est à la fois injective et surjective.

Remarque

Une fonction est injective si et seulement si

Soit $f : A \to B$ une fonction.

- f est **surjective** si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A ;
- f est **injective** si deux éléments distincts de A ont des images distinctes ;
- f est **bijective** si f est à la fois injective et surjective.

Remarque

Une fonction est injective si et seulement si toute droite horizontale coupe son graphe en maximum un point !

Soit $f : A \to B$ une fonction.

Soit $f : A \to B$ une fonction. L'ensemble image de f, noté $Im(f)$ ou $f(A)$, est l'ensemble $\{f(x) \mid x \in A\}$.

Soit $f : A \to B$ une fonction. L'ensemble image de f, noté $Im(f)$ ou $f(A)$, est l'ensemble $\{f(x) \mid x \in A\}$.
L'ensemble image de la fonction...

Soit $f : A \to B$ une fonction. L'ensemble image de f, noté $Im(f)$ ou $f(A)$, est l'ensemble $\{f(x) \mid x \in A\}$.
L'ensemble image de la fonction...

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est

Soit $f : A \to B$ une fonction. L'ensemble image de f, noté $Im(f)$ ou $f(A)$, est l'ensemble $\{f(x) \mid x \in A\}$.
L'ensemble image de la fonction...

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}^+$

Soit $f : A \to B$ une fonction. L'ensemble image de f, noté $Im(f)$ ou $f(A)$, est l'ensemble $\{f(x) \mid x \in A\}$.
L'ensemble image de la fonction...

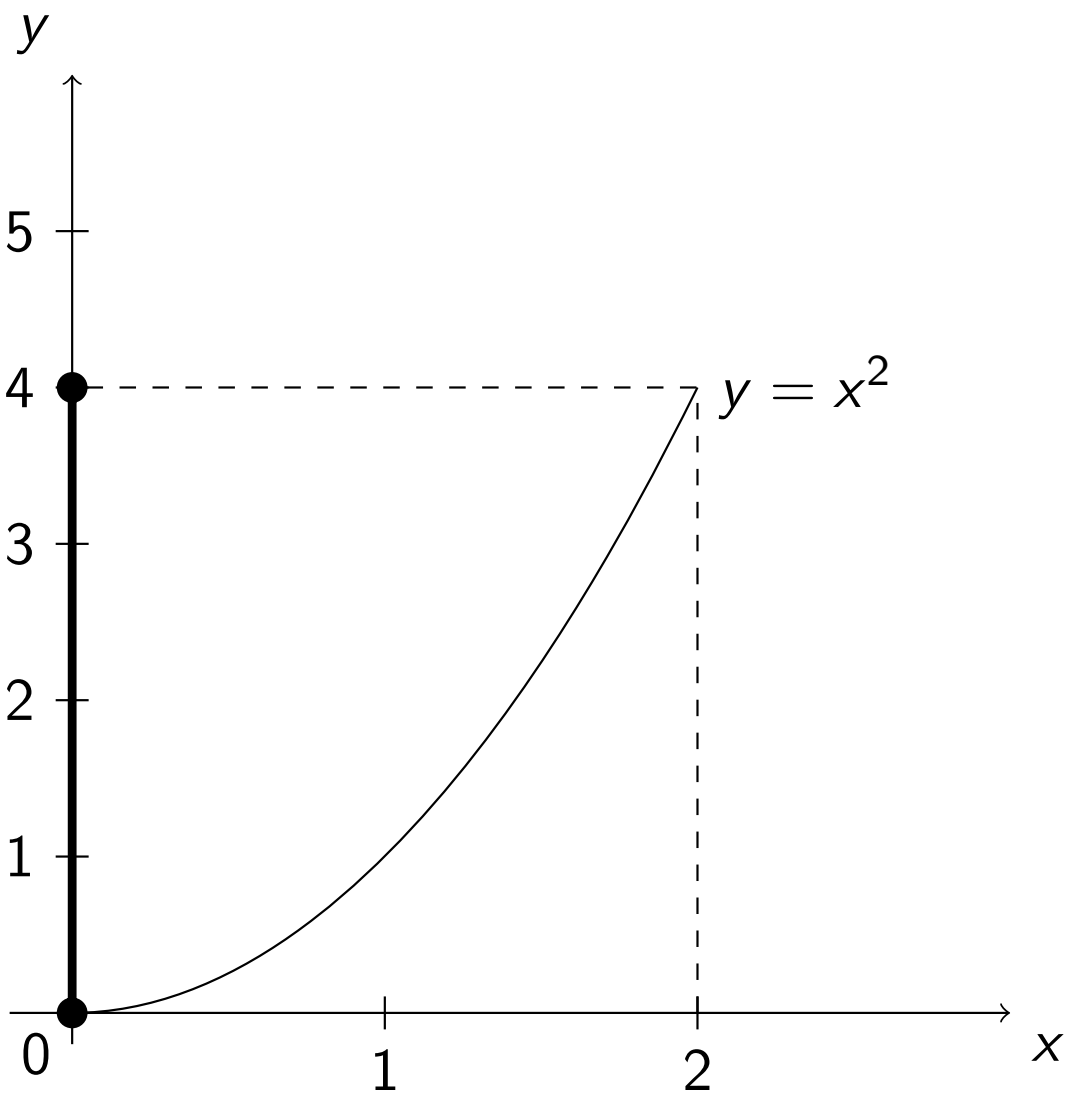
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}^+$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est

Soit $f : A \to B$ une fonction. L'ensemble image de f, noté $Im(f)$ ou $f(A)$, est l'ensemble $\{f(x) \mid x \in A\}$.
L'ensemble image de la fonction...

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}^+$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est $\mathbb{R}$

Le graphe de $[0, 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ et son ensemble image

Le graphe de $[0, 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ et son ensemble image



Injectivité, surjectivité et graphe

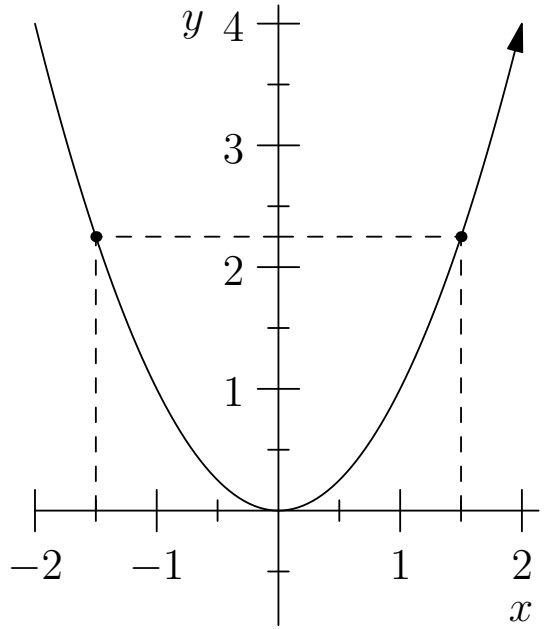
- On peut voir les antécédents d'un nombre y sur le graphe de f en traçant une droite horizontale à hauteur y

Injectivité, surjectivité et graphe

- On peut voir les antécédents d'un nombre y sur le graphe de f en traçant une droite horizontale à hauteur y : les antécédents sont les abcisses des points d'intersection.

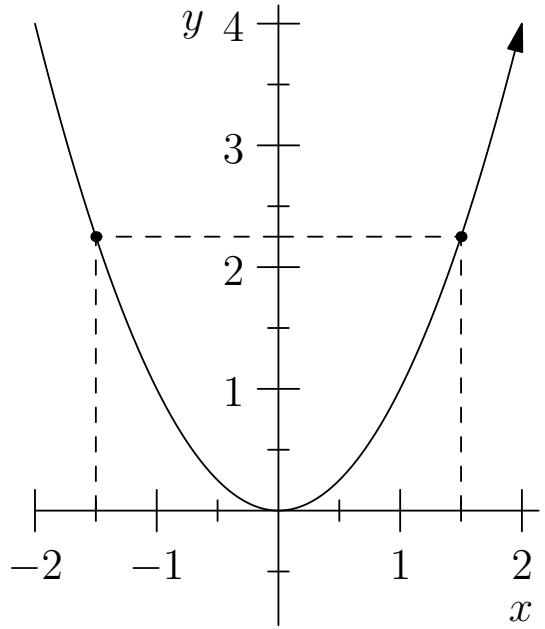
Injectivité, surjectivité et graphe

- On peut voir les antécédents d'un nombre y sur le graphe de f en traçant une droite horizontale à hauteur y : les antécédents sont les abcisses des points d'intersection.



Injectivité, surjectivité et graphe

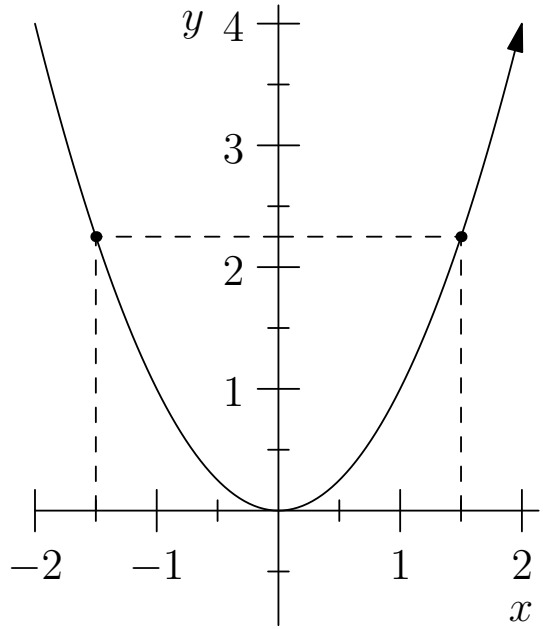
- On peut voir les antécédents d'un nombre y sur le graphe de f en traçant une droite horizontale à hauteur y : les antécédents sont les abcisses des points d'intersection.



- Une fonction est injective si et seulement si

Injectivité, surjectivité et graphe

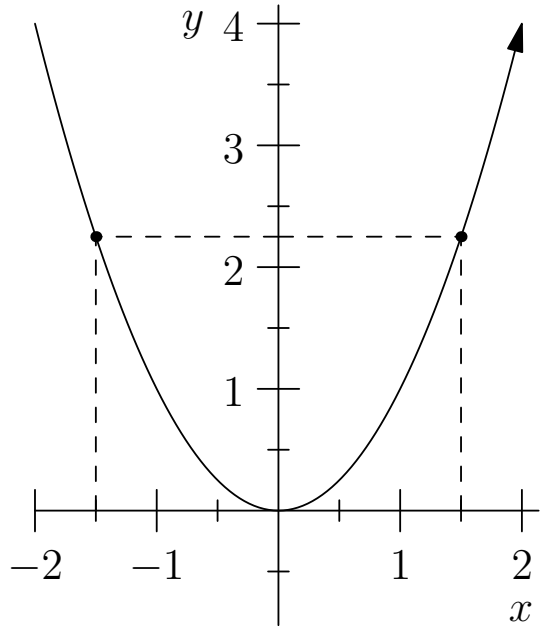
- On peut voir les antécédents d'un nombre y sur le graphe de f en traçant une droite horizontale à hauteur y : les antécédents sont les abcisses des points d'intersection.



- Une fonction est injective si et seulement si tout élément dans son ensemble d'arrivée admet au maximum un antécédent.

Injectivité, surjectivité et graphe

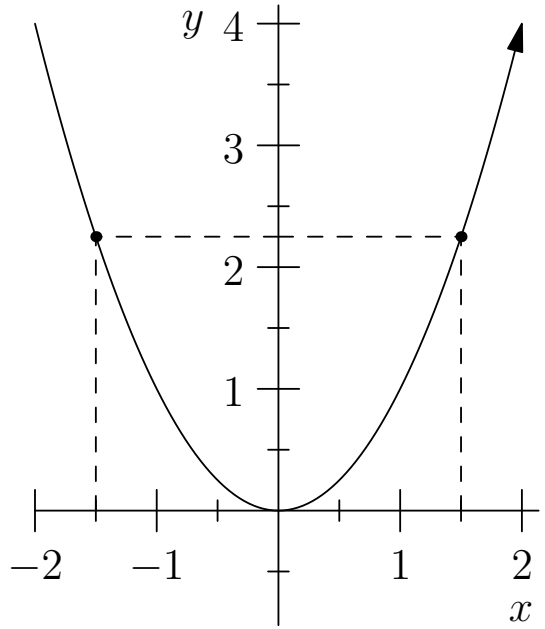
- On peut voir les antécédents d'un nombre y sur le graphe de f en traçant une droite horizontale à hauteur y : les antécédents sont les abcisses des points d'intersection.



- Une fonction est injective si et seulement si tout élément dans son ensemble d'arrivée admet au maximum un antécédent.
- Une fonction est surjective si et seulement si

Injectivité, surjectivité et graphe

- On peut voir les antécédents d'un nombre y sur le graphe de f en traçant une droite horizontale à hauteur y : les antécédents sont les abcisses des points d'intersection.



- Une fonction est injective si et seulement si tout élément dans son ensemble d'arrivée admet au maximum un antécédent.
- Une fonction est surjective si et seulement si tout élément dans son ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent.

Fonctions polynomiales

Definition

Les **fonctions polynômiales**

Fonctions polynomiales

Definition

Les **fonctions polynômiales** sont des fonctions de la forme

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Fonctions polynomiales

Definition

Les **fonctions polynômiales** sont des fonctions de la forme

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des constantes réelles

Fonctions polynomiales

Definition

Les **fonctions polynômiales** sont des fonctions de la forme

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des constantes réelles, et n est un entier.

Fonctions polynomiales

Definition

Les **fonctions polynômiales** sont des fonctions de la forme

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des constantes réelles, et n est un entier.
L'entier n est le **degré** de la fonction (si $a_n \neq 0$).

Fonctions polynomiales

Definition

Les **fonctions polynômiales** sont des fonctions de la forme

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des constantes réelles, et n est un entier.
L'entier n est le **degré** de la fonction (si $a_n \neq 0$).

Fonctions racines

Example

Les fonctions *racine carrée* et *racine cubique* sont :

$$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{et} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

Fonctions racines

Example

Les fonctions *racine carrée* et *racine cubique* sont :

$$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{et} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

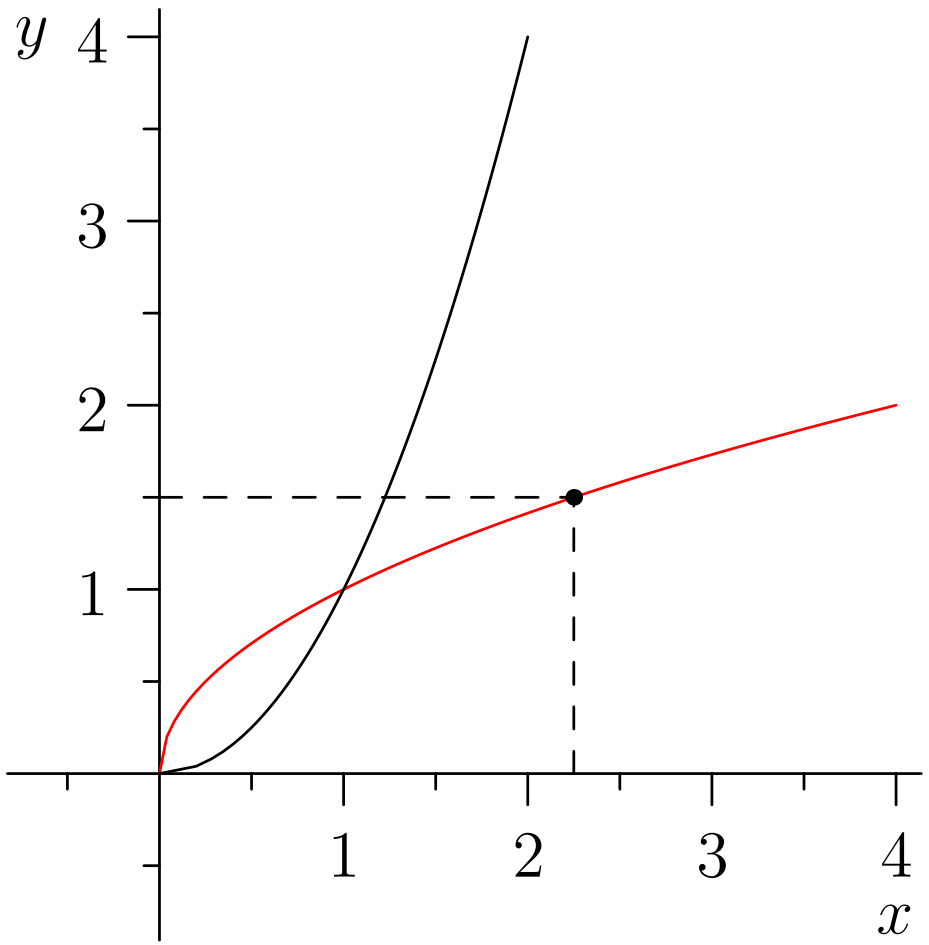
Example

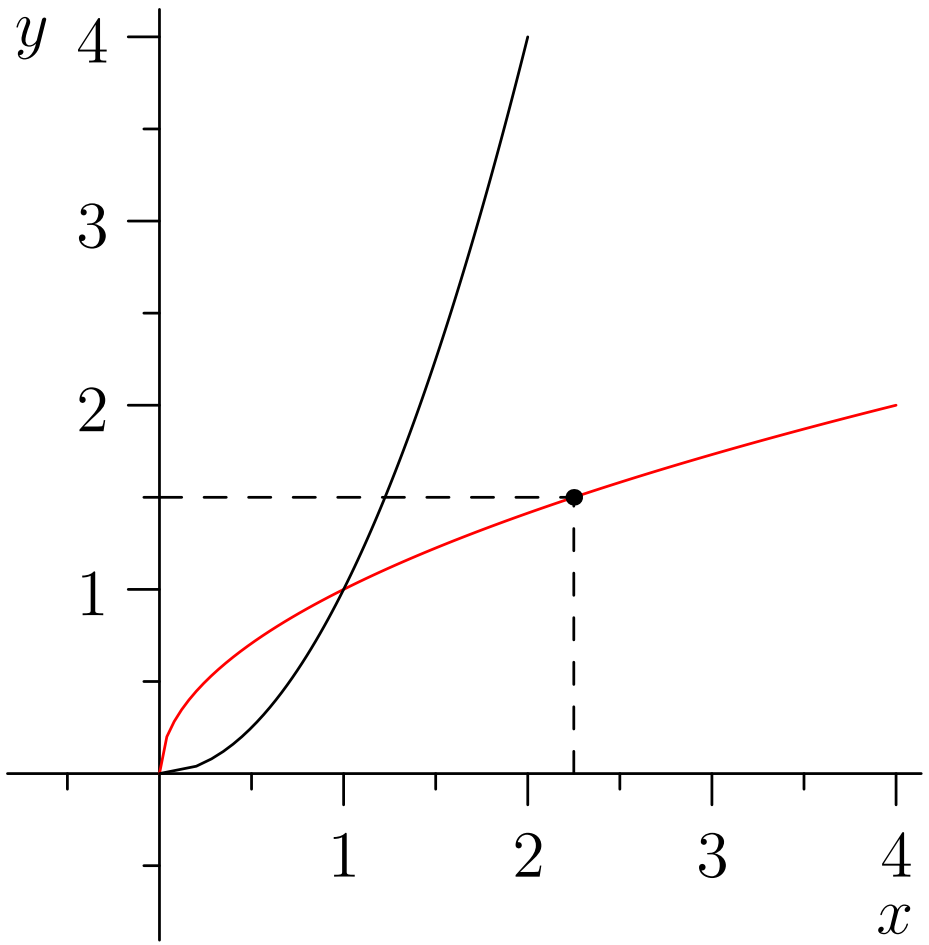
Plus généralement, pour n naturel pair, nous avons une fonction racine $n$ième :

$$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

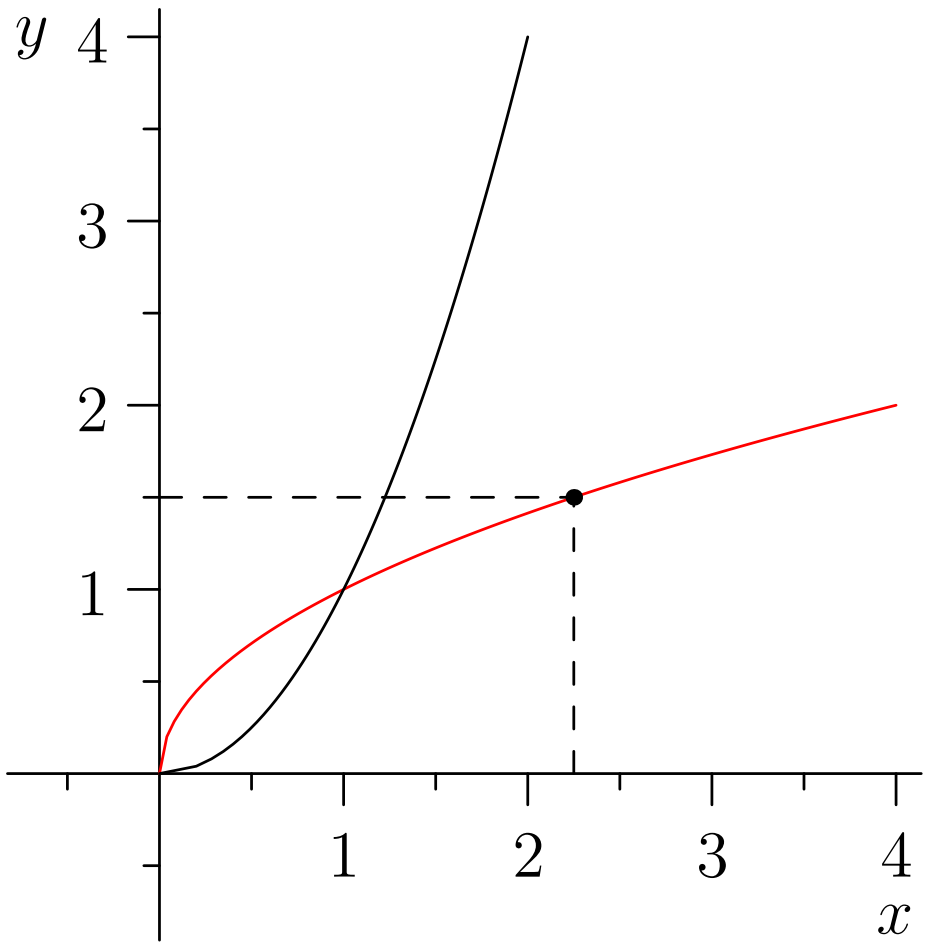
et pour n naturel impair, similairement avec un autre domaine :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$

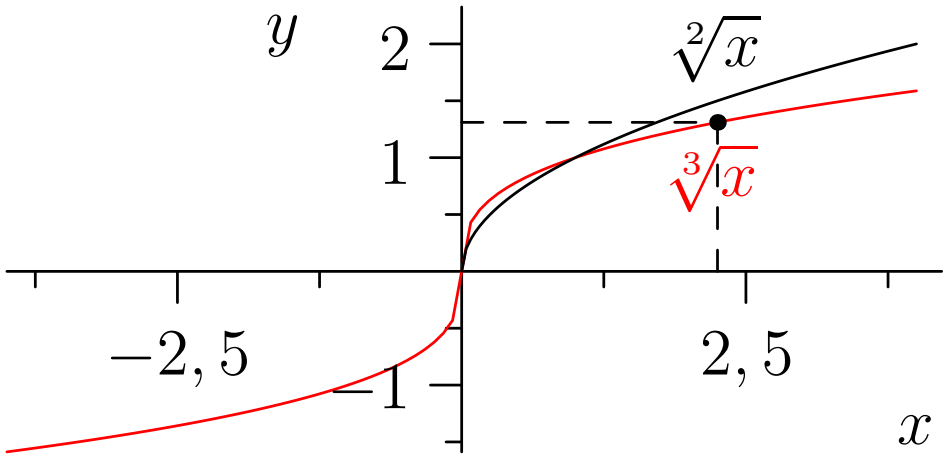

y
4
3
2
1
1
2
3
4
x



La fonction racine carrée est en rouge.



La fonction racine carrée est en rouge. En noir, c'est la fonction $x \mapsto x^2$.


y
2
1
−1
−2, 5
2, 5
x
$\sqrt[2]{x}$
$\sqrt[3]{x}$

Croissance et décroissance

Definition

Soit f une fonction réelle et $A \subset dom(f)$.

Croissance et décroissance

Definition

Soit f une fonction réelle et $A \subset dom(f)$. Cette fonction est

Croissance et décroissance

Definition

Soit f une fonction réelle et $A \subset dom(f)$. Cette fonction est

- **croissante** sur A si

Croissance et décroissance

Definition

Soit f une fonction réelle et $A \subset dom(f)$. Cette fonction est

- **croissante** sur A si

Croissance et décroissance

Definition

Soit f une fonction réelle et $A \subset dom(f)$. Cette fonction est

- **croissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;

Croissance et décroissance

Definition

Soit f une fonction réelle et $A \subset dom(f)$. Cette fonction est

- **croissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- **décroissante** sur A si

Croissance et décroissance

Definition

Soit f une fonction réelle et $A \subset dom(f)$. Cette fonction est

- **croissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- **décroissante** sur A si

Croissance et décroissance

Definition

Soit f une fonction réelle et $A \subset dom(f)$. Cette fonction est

- **croissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- **décroissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;

Croissance et décroissance

Definition

Soit f une fonction réelle et $A \subset dom(f)$. Cette fonction est

- **croissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- **décroissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
- **strictement croissante** sur A si

Croissance et décroissance

Definition

Soit f une fonction réelle et $A \subset dom(f)$. Cette fonction est

- **croissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- **décroissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
- **strictement croissante** sur A si

Croissance et décroissance

Definition

Soit f une fonction réelle et $A \subset dom(f)$. Cette fonction est

- **croissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- **décroissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
- **strictement croissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;

Croissance et décroissance

Definition

Soit f une fonction réelle et $A \subset dom(f)$. Cette fonction est

- **croissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- **décroissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
- **strictement croissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
- **strictement décroissante** sur A si

Croissance et décroissance

Definition

Soit f une fonction réelle et $A \subset dom(f)$. Cette fonction est

- **croissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- **décroissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
- **strictement croissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
- **strictement décroissante** sur A si

Croissance et décroissance

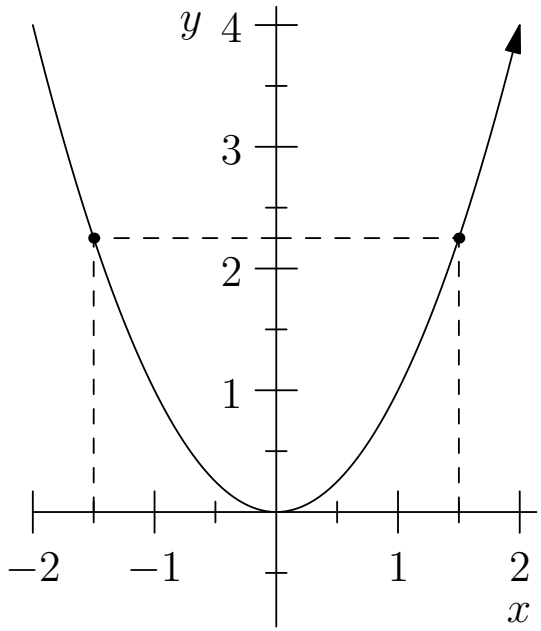
Definition

Soit f une fonction réelle et $A \subset dom(f)$. Cette fonction est

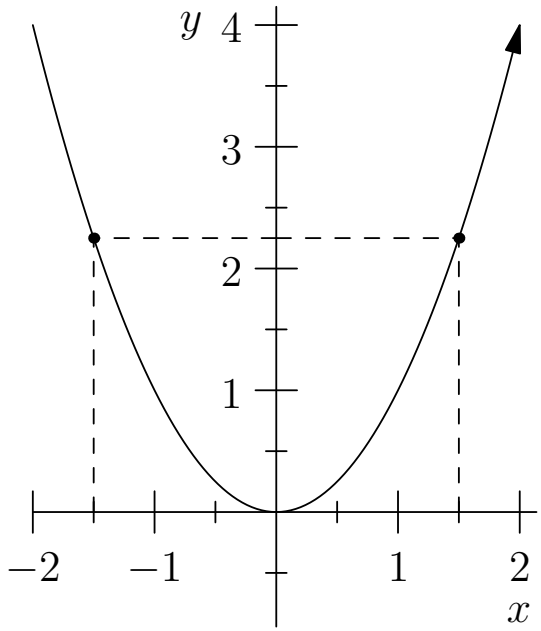
- **croissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- **décroissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
- **strictement croissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
- **strictement décroissante** sur A si pour tout x, y dans A : $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

$x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$:

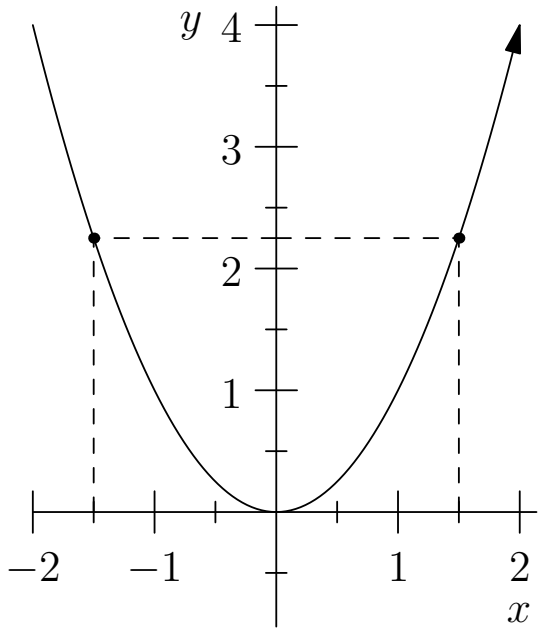


$x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$:



Sur $\mathbb{R}$, elle n'est ni croissante ni décroissante

$x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$:



Sur $\mathbb{R}$, elle n'est ni croissante ni décroissante ; on dit qu'elle n'est pas monotone.

Exponentielles

Definition

Les fonction exponentielles sont les fonctions du type

Exponentielles

Definition

Les fonction exponentielles sont les fonctions du type

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$$

Exponentielles

Definition

Les fonction exponentielles sont les fonctions du type

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$$

pour un certain réel positif $a > 0$, appelé la **base** de l'exponentielle.

Exponentielles

Definition

Les fonction exponentielles sont les fonctions du type

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$$

pour un certain réel positif $a > 0$, appelé la **base** de l'exponentielle.

Definition

La fonction exponentielle

Exponentielles

Definition

Les fonction exponentielles sont les fonctions du type

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$$

pour un certain réel positif $a > 0$, appelé la **base** de l'exponentielle.

Definition

La fonction exponentielle, c'est la fonction exponentielle dont la base est $a = \mathrm{e}$, où $\mathrm{e} \simeq 2.7182818\ldots$ est une constante appelée... le nombre e.

Exponentielles

Definition

Les fonction exponentielles sont les fonctions du type

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$$

pour un certain réel positif $a > 0$, appelé la **base** de l'exponentielle.

Definition

La fonction exponentielle, c'est la fonction exponentielle dont la base est $a = \mathrm{e}$, où $\mathrm{e} \simeq 2.7182818\ldots$ est une constante appelée... le nombre e.

Remarque

- *Domaine* $= \mathbb{R}$ *Image* $= \mathbb{R}_0^+ =]0, \infty]$.

Exponentielles

Definition

Les fonction exponentielles sont les fonctions du type

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$$

pour un certain réel positif $a > 0$, appelé la **base** de l'exponentielle.

Definition

La fonction exponentielle, c'est la fonction exponentielle dont la base est $a = \mathrm{e}$, où $\mathrm{e} \simeq 2.7182818\ldots$ est une constante appelée... le nombre e.

Remarque

- *Domaine* $= \mathbb{R}$ *Image* $= \mathbb{R}_0^+ =]0, \infty]$.
- *Si* $a > 1$, *l'exponentielle est croissante !*

Exponentielles

Definition

Les fonction exponentielles sont les fonctions du type

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$$

pour un certain réel positif $a > 0$, appelé la **base** de l'exponentielle.

Definition

La fonction exponentielle, c'est la fonction exponentielle dont la base est $a = \mathrm{e}$, où $\mathrm{e} \simeq 2.7182818\ldots$ est une constante appelée... le nombre e.

Remarque

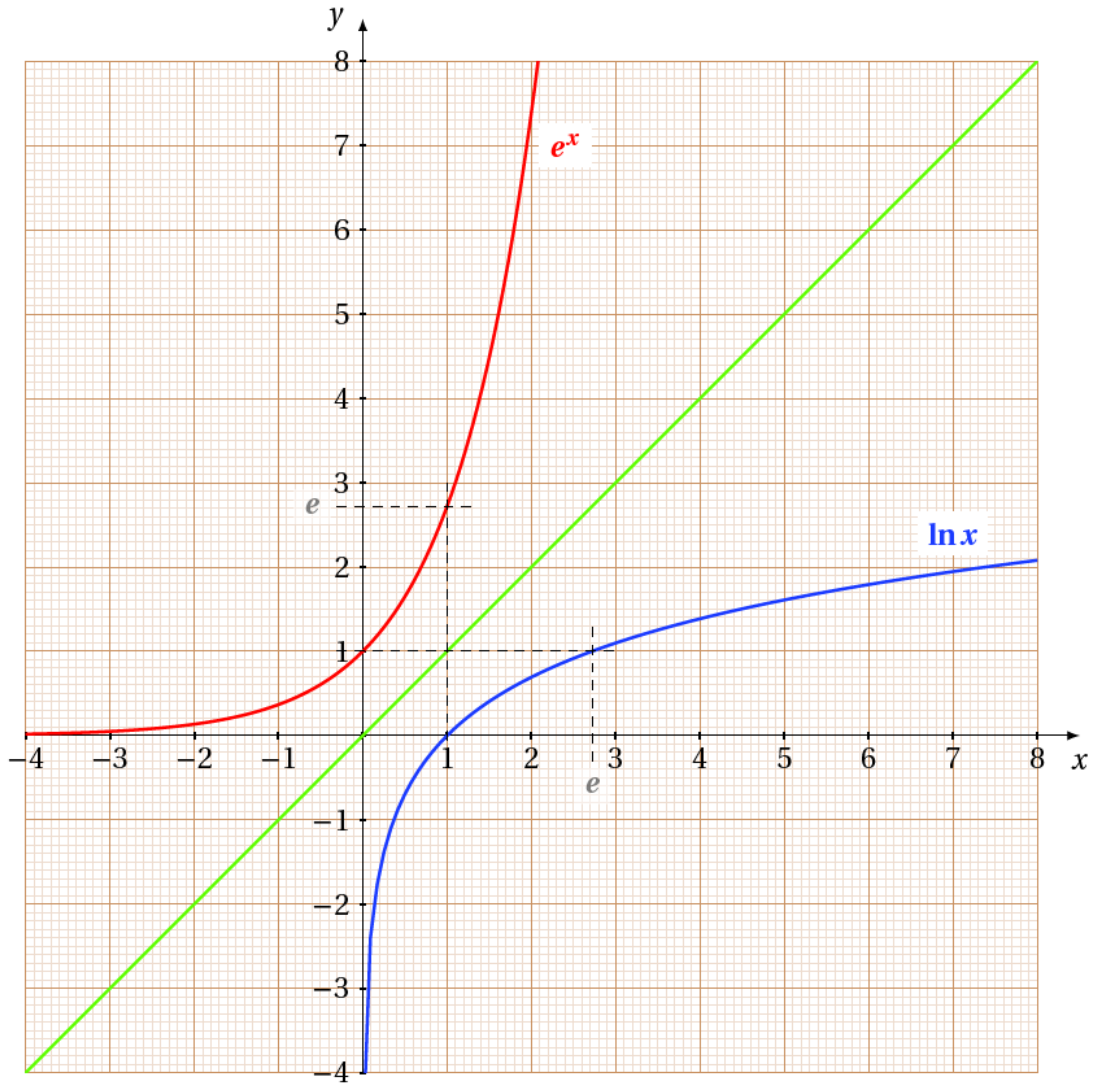
- *Domaine* $= \mathbb{R}$ *Image* $= \mathbb{R}_0^+ =]0, \infty]$.
- *Si* $a > 1$, *l'exponentielle est croissante !*
- *Si* $0 < a < 1$, *l'exponentielle est décroissante !*

Graphe

La ligne rouge est la ligne intéressante pour l'instant :

Graphe

La ligne rouge est la ligne intéressante pour l'instant :



Logarithme

Question

Quel est le nombre x tel que $100000000 = 10^x$ *?*

Logarithme

Question

Quel est le nombre x tel que $100000000 = 10^x$ *?*

Definition

Le logarithme de y en base a est le nombre x tel que $a^x = y$! On le note $\log_a(y)$.

Logarithme

Question

Quel est le nombre x tel que $100000000 = 10^x$ *?*

Definition

Le logarithme de y en base a est le nombre x tel que $a^x = y$! On le note $\log_a(y)$.

$$\log_a(y) = x \iff a^x = y$$

Logarithme

Question

Quel est le nombre x tel que $100000000 = 10^x$ *?*

Definition

Le logarithme de y en base a est le nombre x tel que $a^x = y$! On le note $\log_a(y)$.

$$\log_a(y) = x \iff a^x = y$$

Remarque

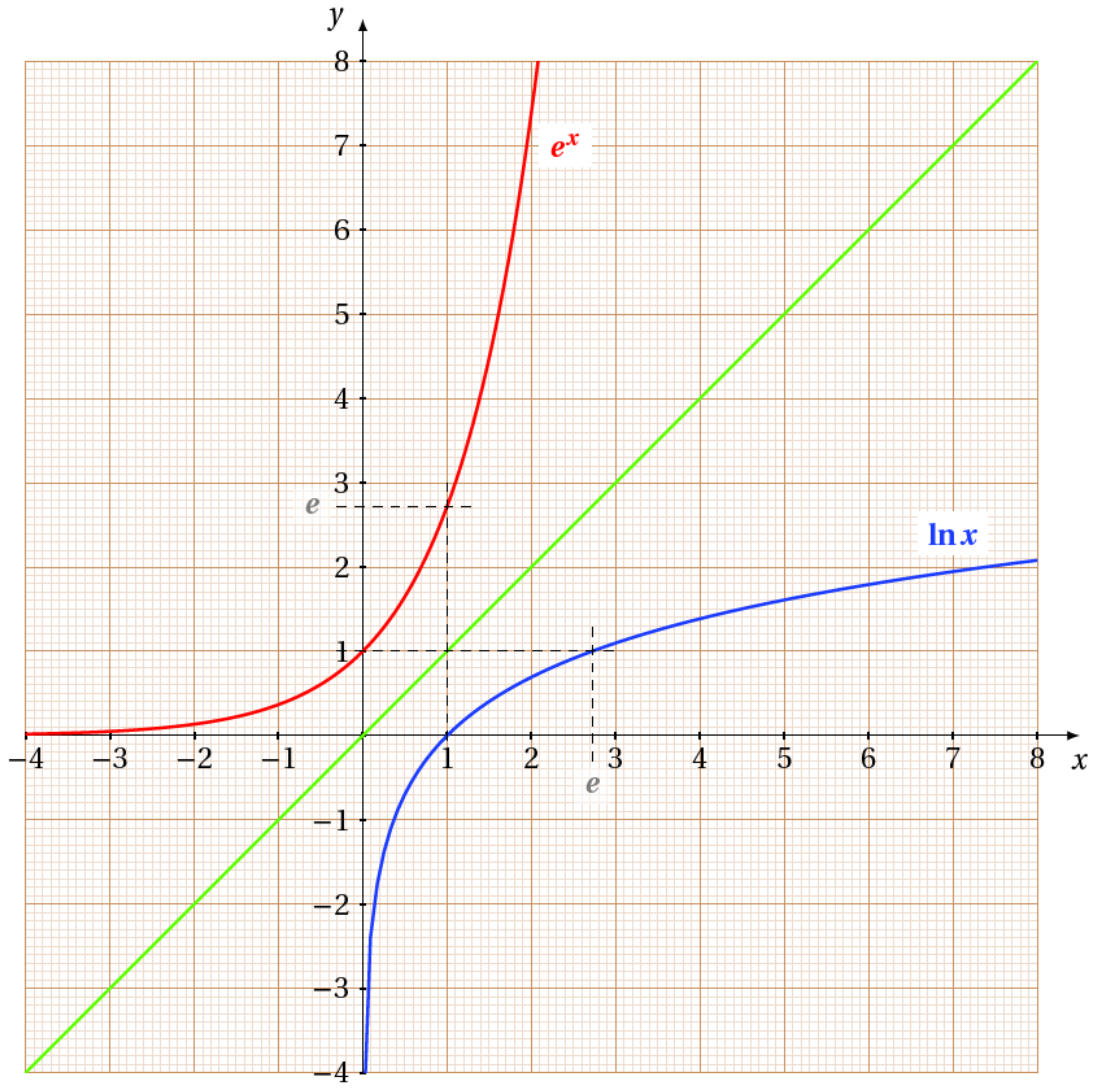
En d'autres termes, le logarithme de y en base a est l'antécédent de y pour la fonction $x \mapsto a^x$

Graphe

Revenons aux graphes :

Graphe

Revenons aux graphes :



Les fonctions logarithmes sont définies sur le domaine $\mathbb{R}_0^+$ et ont pour ensemble image $\mathbb{R}$.

Les fonctions logarithmes sont définies sur le domaine $\mathbb{R}_0^+$ et ont pour ensemble image $\mathbb{R}$.
Il y a quelques fonctions logarithmes fort utilisées :

Les fonctions logarithmes sont définies sur le domaine $\mathbb{R}_0^+$ et ont pour ensemble image $\mathbb{R}$.
Il y a quelques fonctions logarithmes fort utilisées :

- le logarithme décimal, en base 10, souvent noté simplement log,

Les fonctions logarithmes sont définies sur le domaine $\mathbb{R}_0^+$ et ont pour ensemble image $\mathbb{R}$.
Il y a quelques fonctions logarithmes fort utilisées :

- le logarithme décimal, en base 10, souvent noté simplement log,
- le logarithme en base e, souvent noté ln, et

Les fonctions logarithmes sont définies sur le domaine $\mathbb{R}_0^+$ et ont pour ensemble image $\mathbb{R}$.
Il y a quelques fonctions logarithmes fort utilisées :

- le logarithme décimal, en base 10, souvent noté simplement log,
- le logarithme en base e, souvent noté ln, et
- le logarithme en base 2, noté $\log_2$.

Identités importantes

Proposition

Pour $a, b > 0$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\exp(\ln a) = a$ *et* $\ln(\exp x) = x$,

Identités importantes

Proposition

Pour $a, b > 0$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\exp(\ln a) = a$ *et* $\ln(\exp x) = x$,
- $\exp(0) = 1$ *et* $\ln 1 = 0$,

Identités importantes

Proposition

Pour $a, b > 0$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\exp(\ln a) = a$ *et* $\ln(\exp x) = x$,
- $\exp(0) = 1$ *et* $\ln 1 = 0$,
- $\exp(x + y) = \exp x \exp y$

Identités importantes

Proposition

Pour $a, b > 0$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\exp(\ln a) = a$ *et* $\ln(\exp x) = x$,
- $\exp(0) = 1$ *et* $\ln 1 = 0$,
- $\exp(x + y) = \exp x \exp y$ *et* $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$,

Identités importantes

Proposition

Pour $a, b > 0$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\exp(\ln a) = a$ *et* $\ln(\exp x) = x$,
- $\exp(0) = 1$ *et* $\ln 1 = 0$,
- $\exp(x + y) = \exp x \exp y$ *et* $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$,
- $\ln(a^x) = x \ln a$

Identités importantes

Proposition

Pour $a, b > 0$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\exp(\ln a) = a$ *et* $\ln(\exp x) = x$,
- $\exp(0) = 1$ *et* $\ln 1 = 0$,
- $\exp(x + y) = \exp x \exp y$ *et* $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$,
- $\ln(a^x) = x \ln a$
- $\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$.

Definition

Une **équation** est une égalité faisant intervenir une ou plusieurs quantités inconnues.

Definition

Une **équation** est une égalité faisant intervenir une ou plusieurs quantités inconnues.
Résoudre une équation revient à déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour la quantité inconnue de sorte que l'égalité soit vérifiée. Ces valeurs sont les **solutions** de l'équation.

Dans une de ses formes les plus simples, une équation fait intervenir une unique quantité inconnue : un nombre réel. La quantité inconnue (ou simplement inconnue) est souvent nommée x, mais ce nom n'a rien de magique.

Example

- L'équation $2x - 3 = 1$ a pour seule solution : $x = 2$.

Example

- L'équation $2x - 3 = 1$ a pour seule solution : $x = 2$.
- L'équation $t^2 - 1 = 0$ (dont l'inconnue est t) a pour solutions : $t = 1$ et $t = -1$. On peut écrire que l'ensemble des solutions est $S = \{-1, 1\}$.

Example

- L'équation $2x - 3 = 1$ a pour seule solution : $x = 2$.
- L'équation $t^2 - 1 = 0$ (dont l'inconnue est t) a pour solutions : $t = 1$ et $t = -1$. On peut écrire que l'ensemble des solutions est $S = \{-1, 1\}$.
- L'équation $\sin(x) = 0$ a pour solution $x = 0$, mais il y en a d'autres.

Example

- L'équation $2x - 3 = 1$ a pour seule solution : $x = 2$.
- L'équation $t^2 - 1 = 0$ (dont l'inconnue est t) a pour solutions : $t = 1$ et $t = -1$. On peut écrire que l'ensemble des solutions est $S = \{-1, 1\}$.
- L'équation $\sin(x) = 0$ a pour solution $x = 0$, mais il y en a d'autres.

Example

- L'équation $2x - 3 = 1$ a pour seule solution : $x = 2$.
- L'équation $t^2 - 1 = 0$ (dont l'inconnue est t) a pour solutions : $t = 1$ et $t = -1$. On peut écrire que l'ensemble des solutions est $S = \{-1, 1\}$.
- L'équation $\sin(x) = 0$ a pour solution $x = 0$, mais il y en a d'autres. Par exemple $x = \pi$.

Example

- L'équation $2x - 3 = 1$ a pour seule solution : $x = 2$.
- L'équation $t^2 - 1 = 0$ (dont l'inconnue est t) a pour solutions : $t = 1$ et $t = -1$. On peut écrire que l'ensemble des solutions est $S = \{-1, 1\}$.
- L'équation $\sin(x) = 0$ a pour solution $x = 0$, mais il y en a d'autres. Par exemple $x = \pi$. En fait, l'ensemble des solutions est formé de l'ensemble des multiples entiers de π. On peut noter $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans les nombres réels, car tout réel pris au carré est positif, donc $x^2 + 1$ ne peut jamais être égal à 0. L'ensemble des solutions est donc vide. On peut noter $S = \emptyset$.

Une équation peut faire intervenir plusieurs inconnues. Dans ce cas, *une* solution est la donnée d'une valeur pour chaque inconnue.

Une équation peut faire intervenir plusieurs inconnues. Dans ce cas, *une* solution est la donnée d'une valeur pour chaque inconnue.

Example

L'équation $x^2 + y^2 = 0$ (dont les inconnues sont x et y) a une solution : $x = y = 0$. Il n'y en a pas d'autres. On peut noter $S = \{(0, 0)\}$.

Une équation peut faire intervenir plusieurs inconnues. Dans ce cas, *une* solution est la donnée d'une valeur pour chaque inconnue.

Example

L'équation $x^2 + y^2 = 0$ (dont les inconnues sont x et y) a une solution : $x = y = 0$. Il n'y en a pas d'autres. On peut noter $S = \{(0, 0)\}$.

Dans l'exemple ci-dessus, il y avait une équation, deux inconnues, mais une seule solution. C'est rare. Généralement une seule équation ne permet pas de déterminer les deux inconnues.

Une équation peut faire intervenir plusieurs inconnues. Dans ce cas, *une* solution est la donnée d'une valeur pour chaque inconnue.

Example

L'équation $x^2 + y^2 = 0$ (dont les inconnues sont x et y) a une solution : $x = y = 0$. Il n'y en a pas d'autres. On peut noter $S = \{(0, 0)\}$.

Dans l'exemple ci-dessus, il y avait une équation, deux inconnues, mais une seule solution. C'est rare. Généralement une seule équation ne permet pas de déterminer les deux inconnues.

Example

L'équation $x + y^2 = 0$ possède une infinité de solutions : pour chaque nombre réel r, les valeurs $y = r$ et $x = -r^2$ fournissent une solution. On peut noter $S = \{(r, -r^2) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Lorsqu'il y a plusieurs inconnues, il peut arriver qu'il y ait également plusieurs équations. On parle alors de **système d'équations**.

Lorsqu'il y a plusieurs inconnues, il peut arriver qu'il y ait également plusieurs équations. On parle alors de **système d'équations**.

Example

Considérons le système d'équations suivant, dont les inconnues sont (x, y) :

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ x - y &= 3 \end{cases}$$

Les solutions sont $x = 2$ et $y = -1$. Il y a une unique solution.

Example

Considérons le système d'équations suivant, dont les inconnues sont (x, y) :

$$\begin{cases} x - y^2 &= 1 \\ x + y^2 &= 3 \end{cases}$$

En résolvant, on trouve $x = 2$ et $y^2 = 1$. Dès lors il y a deux possibilités :

- Soit $x = 2$ et $y = 1$,
- soit $x = 2$ et $y = -1$.

Il y a donc ici deux solutions !

Équation cartésienne

Une droite passant par $\mathbf{p}$ dans la direction $\overrightarrow{v}$ est l'ensemble des points (x_1, x_2) vérifiant

$$(x_1 - p_1)v_2 = (x_2 - p_2)v_1$$

ou encore

$$ax_1 + bx_2 + c = 0$$

pour $a = v_2, b = -v_1, c = p_2v_1 - p_1v_2$, c'est-à-dire

$$a(x_1 - p_1) + b(x_2 - p_2) = 0$$

pour $a = v_2, b = -v_1$, ou encore

$$a(x_1 - p_1) + b(x_2 - p_2) = 0$$

ou de manière équivalente

$$\left\langle \overrightarrow{n}, \mathbf{x} - \mathbf{p} \right\rangle = 0$$

Équation vectorielle

Un plan passant par le point $\mathbf{p}$ dans les directions des vecteur $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ est l'ensemble des points de la forme

$$\mathbf{p} + t\overrightarrow{v} + s\overrightarrow{w}$$

lorsque $s, t \in \mathbb{R}$. Les vecteurs $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont les vecteurs directeur.

Équation vectorielle

Un plan passant par le point $\mathbf{p}$ dans les directions des vecteur $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ est l'ensemble des points de la forme

$$\mathbf{p} + t\overrightarrow{v} + s\overrightarrow{w}$$

lorsque $s, t \in \mathbb{R}$. Les vecteurs $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont les vecteurs directeur.

Équations paramétriques

Un plan est l'ensemble des points (x_1, x_2, x_3) de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tv_1 + sw_1 \\ x_2 &= p_2 + tv_2 + sw_2 \\ x_3 &= p_3 + tv_3 + sw_3 \end{aligned}$$

pour certains réel s et t.

Équation cartésienne

Un plan consiste en les points (x_1, x_2, x_3) vérifiant

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

pour certaines constantes a, b, c, d. De manière équivalente :

$$a(x_1 - p_1) + b(x_2 - p_2) + c(x_3 - p_3) = 0$$

où $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ est un point du plan.

Équation cartésienne

Un plan consiste en les points (x_1, x_2, x_3) vérifiant

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

pour certaines constantes a, b, c, d. De manière équivalente :

$$a(x_1 - p_1) + b(x_2 - p_2) + c(x_3 - p_3) = 0$$

où $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ est un point du plan.

Équation cartésienne, version 2

Un plan est l'ensemble des points $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vérifiant

$$\left\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \overrightarrow{n} \right\rangle = 0$$

pour un certain vecteur $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$: le vecteur normal (pour dire perpendiculaire).

Équation cartésienne

Un plan consiste en les points (x_1, x_2, x_3) vérifiant

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

pour certaines constantes a, b, c, d. De manière équivalente :

$$a(x_1 - p_1) + b(x_2 - p_2) + c(x_3 - p_3) = 0$$

où $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ est un point du plan.

Équation cartésienne, version 2

Un plan est l'ensemble des points $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vérifiant

$$\left\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \overrightarrow{n} \right\rangle = 0$$

pour un certain vecteur $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$: le vecteur normal (pour dire perpendiculaire).

Definition

La mesure de l'**angle** entre deux vecteurs est le nombre θ entre 0 et π tel que $\cos\theta = \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}$

Definition

Si $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$, on définit leur **produit vectoriel**

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Definition

Si $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$, on définit leur **produit vectoriel**

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Le produit vectoriel est donc une application

$$\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \mapsto \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}.$$

Proposition

Le produit vectoriel vérifie les identités suivantes :

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{b}$;

pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ *et* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$, *et où* θ *est l'angle formé par les vecteurs* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$.

Proposition

Le produit vectoriel vérifie les identités suivantes :

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{b}$;
- $\left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\|^2 + \left| \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle \right|^2 = \| \overrightarrow{a} \|^2 \left\| \overrightarrow{b} \right\|^2$;

pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ *et* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$, *et où* θ *est l'angle formé par les vecteurs* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$.

Proposition

Le produit vectoriel vérifie les identités suivantes :

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{b}$;
- $\left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\|^2 + \left| \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle \right|^2 = \| \overrightarrow{a} \|^2 \left\| \overrightarrow{b} \right\|^2$;
- $\left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\| = \| \overrightarrow{a} \| \left\| \overrightarrow{b} \right\| \sin \theta$;

pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ *et* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$, *et où* θ *est l'angle formé par les vecteurs* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$.

Proposition

Le produit vectoriel vérifie les identités suivantes :

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{b}$;
- $\left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\|^2 + \left| \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle \right|^2 = \| \overrightarrow{a} \|^2 \left\| \overrightarrow{b} \right\|^2$;
- $\left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\| = \| \overrightarrow{a} \| \left\| \overrightarrow{b} \right\| \sin \theta$;
- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = - \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ *(anti-symétrique)* ;

pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ *et* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$, *et où* θ *est l'angle formé par les vecteurs* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$.

Proposition

Le produit vectoriel vérifie les identités suivantes :

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{b}$;
- $\left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\|^2 + \left| \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle \right|^2 = \| \overrightarrow{a} \|^2 \left\| \overrightarrow{b} \right\|^2$;
- $\left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\| = \| \overrightarrow{a} \| \left\| \overrightarrow{b} \right\| \sin \theta$;
- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = - \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ *(anti-symétrique)* ;
- $(\alpha \overrightarrow{a} + \alpha' \overrightarrow{a'}) \times \overrightarrow{b} = \alpha \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \alpha' \overrightarrow{a'} \times \overrightarrow{b}$

pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ *et* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$*, et où* θ *est l'angle formé par les vecteurs* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$ *.*

Proposition

Le produit vectoriel vérifie les identités suivantes :

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{b}$;
- $\left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\|^2 + \left| \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle \right|^2 = \| \overrightarrow{a} \|^2 \left\| \overrightarrow{b} \right\|^2$;
- $\left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\| = \| \overrightarrow{a} \| \left\| \overrightarrow{b} \right\| \sin \theta$;
- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = - \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ *(anti-symétrique)* ;
- $(\alpha \overrightarrow{a} + \alpha' \overrightarrow{a'}) \times \overrightarrow{b} = \alpha \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \alpha' \overrightarrow{a'} \times \overrightarrow{b}$

pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ *et* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$*, et où* θ *est l'angle formé par les vecteurs* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$ *.*

Proposition

Le produit vectoriel vérifie les identités suivantes :

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{b}$;
- $\left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\|^2 + \left| \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle \right|^2 = \| \overrightarrow{a} \|^2 \left\| \overrightarrow{b} \right\|^2$;
- $\left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\| = \| \overrightarrow{a} \| \left\| \overrightarrow{b} \right\| \sin\theta$;
- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ *(anti-symétrique)* ;
- $(\alpha \overrightarrow{a} + \alpha' \overrightarrow{a'}) \times \overrightarrow{b} = \alpha \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \alpha' \overrightarrow{a'} \times \overrightarrow{b}$

pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ *et* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$*, et où* θ *est l'angle formé par les vecteurs* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$ *.*

Preuve.

Tous ces points se prouvent à partir de la définition. (exercice)
Dans l'égalité $\left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\| = \| \overrightarrow{a} \| \left\| \overrightarrow{b} \right\| \sin\theta$, le sinus est toujours positif car l'angle θ est, par définition, entre 0 et π. □

Distances point-droite et point-plan

Nous savons que la distance entre deux points $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ est la norme $\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|$. Notons $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ cette quantité.

Definition

La **distance** entre deux sous ensembles $E, F \subset \mathbb{R}^n$ est donnée par

$$\min\{d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mid \mathbf{p} \in E, \mathbf{q} \in F\}.$$

Proposition

La distance entre le point $\mathbf{p}$ *et la droite passant par* $\mathbf{q}$ *de vecteur directeur* $\overrightarrow{v}$ *est donnée par*

$$\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|^2 - \frac{(\langle(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \overrightarrow{v}\rangle)^2}{\|\overrightarrow{v}\|^2}.$$

Proposition

La distance entre le point $\mathbf{p}$ *et la droite passant par* $\mathbf{q}$ *de vecteur directeur* $\overrightarrow{v}$ *est donnée par*

$$\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|^2 - \frac{(\langle(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\overrightarrow{v}\rangle)^2}{\|\overrightarrow{v}\|^2}.$$

Le point de la droite réalisant ce minimum est donné par la projection $\mathbf{p}'$ *de* $\mathbf{p}$ *sur la droite :*

$$\mathbf{p}' = \mathbf{q} + \frac{\langle(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\overrightarrow{v}\rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\overrightarrow{v}.$$

Preuve.

Trouver le minimum de la distance revient à trouver le minimum du *carré* de la distance et puis à *en prendre la racine carrée* ; donc il faut trouver le minimum de f définie par $f(t) = \|(\mathbf{q}+t\overrightarrow{v})-\mathbf{p}\|^2$, où $\mathbf{q}+t\overrightarrow{v}$ est un point quelconque de la droite. Or

$$f(t) = \|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|^2 + 2t\langle(\mathbf{q}-\mathbf{p}),\overrightarrow{v}\rangle + t^2\|\overrightarrow{v}\|^2$$

Proposition

La distance entre le point $\mathbf{p}$ *et la droite passant par* $\mathbf{q}$ *de vecteur normal* $\overrightarrow{n}$ *est donnée par*

$$\frac{\left|\left\langle \overrightarrow{n}, (\mathbf{p}-\mathbf{q}) \right\rangle\right|}{\left\| \overrightarrow{n} \right\|}.$$

Proposition

La distance entre le point $\mathbf{p}$ *et la droite passant par* $\mathbf{q}$ *de vecteur normal* $\overrightarrow{n}$ *est donnée par*

$$\frac{\left|\left\langle \overrightarrow{n}, (\mathbf{p}-\mathbf{q})\right\rangle\right|}{\left\| \overrightarrow{n} \right\|}.$$

En d'autres termes, si la droite a pour équation

$$ax + by + c = 0$$

la distance entre cette droite et le point $\mathbf{p}$ *est*

$$\frac{ap_1 + bp_2 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Proposition

La distance entre le point $\mathbf{p}$ *et le plan de vecteur normal* $\overrightarrow{w} = (a, b, c)$ *passant par* $\mathbf{q}$ *est donnée par*

$$\frac{\left|\left\langle \overrightarrow{w}, (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \right\rangle\right|}{\left\| \overrightarrow{w} \right\|}.$$

Proposition

La distance entre le point $\mathbf{p}$ *et le plan de vecteur normal* $\overrightarrow{w} = (a, b, c)$ *passant par* $\mathbf{q}$ *est donnée par*

$$\frac{\left|\left\langle \overrightarrow{w}, (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \right\rangle\right|}{\left\| \overrightarrow{w} \right\|}.$$

En d'autres termes, si le plan a pour équation

$$ax + by + cz + d = 0$$

la distance entre cette droite et le point $\mathbf{p}$ *est*

$$\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Preuve.

Le vecteur

$$\frac{\left\langle \overrightarrow{w}, \mathbf{p}-\mathbf{q} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{w} \right\|^2} \overrightarrow{w}$$

est le projeté de $\mathbf{p}-\mathbf{q}$ sur la droite normale au plan, dès lors sa longueur est la distance recherchée. □

Definition

Un **trièdre orienté** est la donnée d'une séquence de trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$, tous issus d'un même point **p**. L'ordre a son importance.

Definition

Un **trièdre orienté** est la donnée d'une séquence de trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$, tous issus d'un même point **p**. L'ordre a son importance.

Definition

Considérant votre main droite,

- si **p** représente votre poignet,
- $\overrightarrow{u}$ votre pouce et
- $\overrightarrow{v}$ votre index,

on dira que le trièdre est **droit** si le vecteur $\overrightarrow{w}$ est du côté du majeur. Dans le cas contraire, le trièdre n'est pas droit (parfois gauche).

Proposition

Le trièdre formé de vecteurs $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ est de même orientation que le trièdre de base $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

(On choisit généralement un système d'axes avec une orientation positive.)

Preuve.

Non-faite. □

On connait le système de coordonnées cartésiennes du plan, c'est une bijection

$$(x, y) : \text{plan} \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{p} \mapsto (x(\mathbf{p}), y(\mathbf{p}))$$

D'autres systèmes de coordonnées existent : chaque bijection entre le plan et (une partie de) $\mathbb{R}^2$ peut servir de système de coordonnées.

Coordonnées polaires.

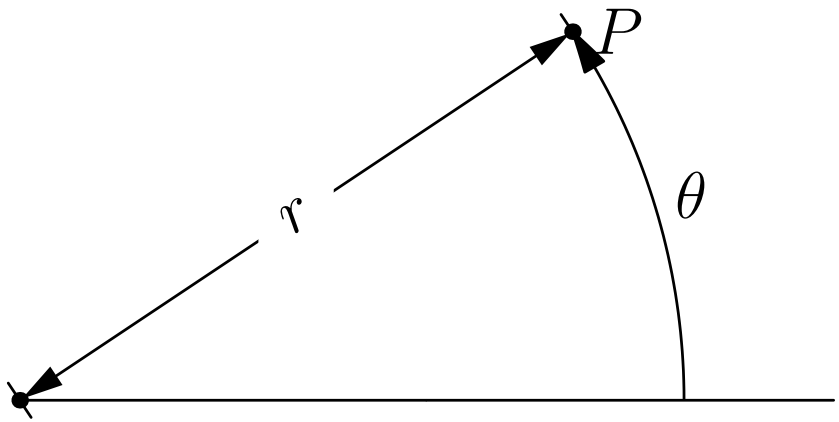
Pour définir des **coordonnées polaires** du plan, on se choisit

- une origine **o** (un point) et
- une demi-droite issue de ce point.

Un point P est alors repéré dans le plan par deux coordonnées, souvent notées (r, θ), où

- r correspond à la distance entre **o** et P, et
- θ correspond à l'angle orienté entre la demi-droite choisie et la demi-droite issue de **o** passant par P.

On choisit généralement $\theta \in [0; 2\pi[$.


P
r
θ

Si P possède des coordonnées cartésiennes (x, y) et des coordonnées polaires (r, θ), elles sont reliées par les relations :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta). \end{cases}$$

Remarque

Il n'est pas possible d'écrire aisément θ en terme de x et y, par contre par le théorème de Pythagore on obtient $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Exemples : coordonnées d'un cercle centré en l'origine en coordonnées

cartésiennes $x^2 + y^2 = R^2$

polaires $r = R$

Exemples : coordonnées d'un cercle centré en l'origine en coordonnées

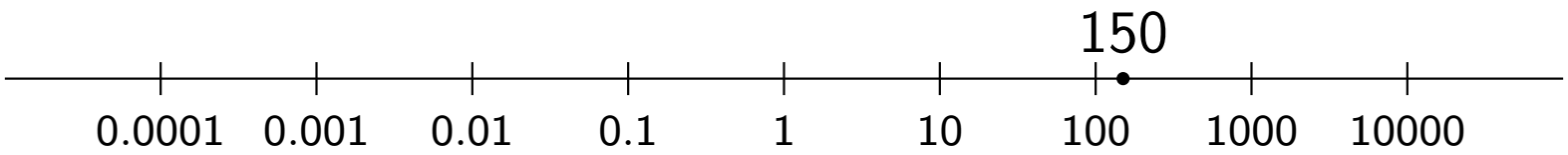
cartésiennes $x^2 + y^2 = R^2$

polaires $r = R$

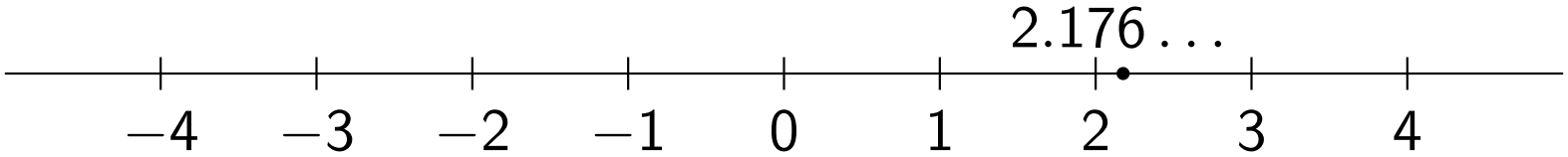
Le cercle $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$, vu en coordonnées polaires :

$$r = cos(\theta)$$

Coordonnées logarithmiques.



ce qu'on comprend en prenant le logarithme (en base 10) de tout cela :



Cette seconde droite graduée est liée à la première de la manière suivante :

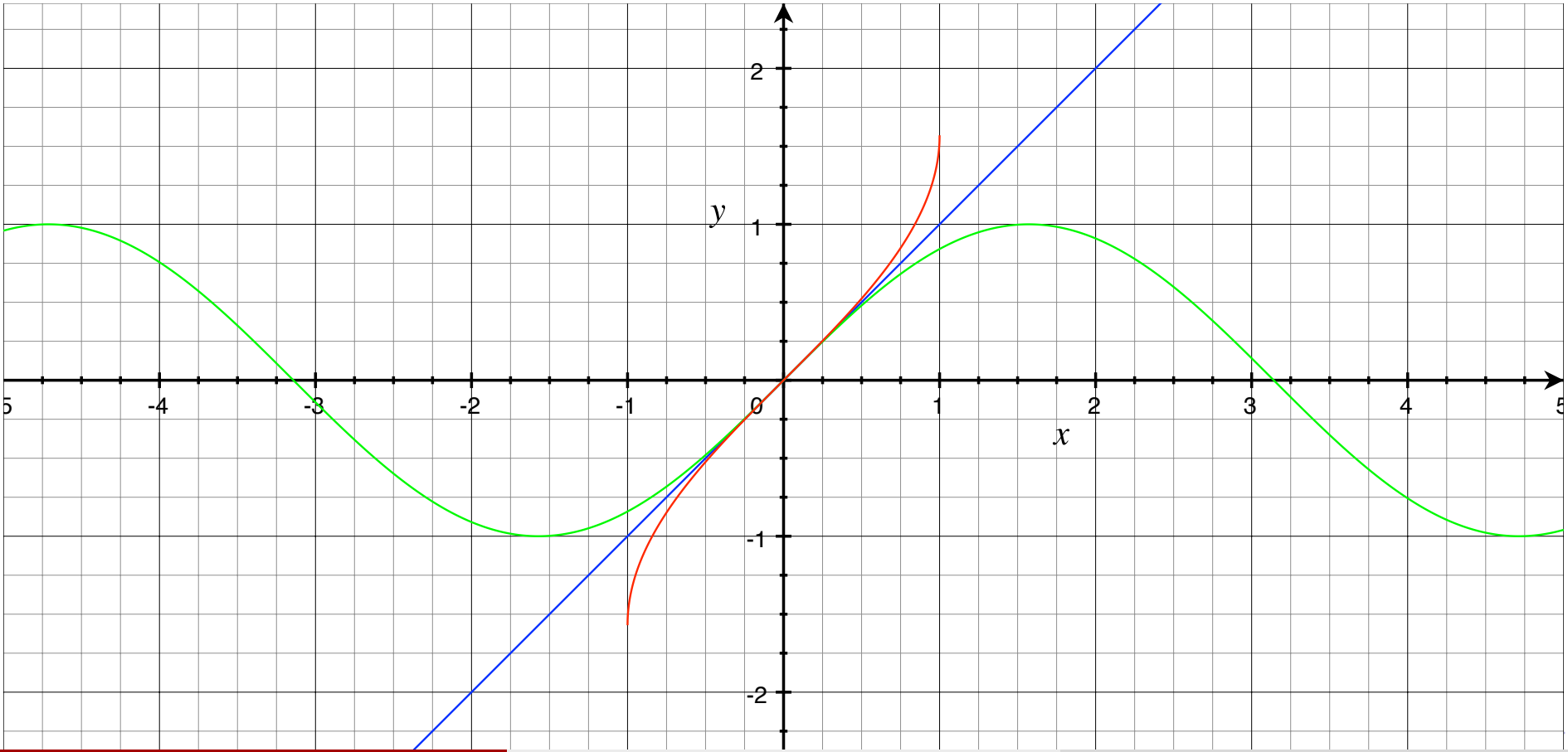
$$10^{-4} = 0.0001,\ 10^{-3} = 0.001,\ \ldots,\ 10^{3} = 1000,\ 10^{4} = 10000,$$

et bien évidemment : $10^{2.176} = 150$.

Arcsinus

La fonction sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ possède une réciproque notée :

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Réciproque

Definition

Une fonction $f : A \to B$ est **inversible** si il existe une fonction $g : B \to A$ telle que

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in A \qquad \text{et} \qquad f(g(y)) = y \quad \forall y \in B.$$

La fonction g est appelée l'**inverse** ou la **fonction réciproque** de f, et se note f^{-1}.

Réciproque

Definition

Une fonction $f : A \to B$ est **inversible** si il existe une fonction $g : B \to A$ telle que

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in A \qquad \text{et} \qquad f(g(y)) = y \quad \forall y \in B.$$

La fonction g est appelée l'**inverse** ou la **fonction réciproque** de f, et se note f^{-1}.

Attention à ne pas confondre $f^{-1}(x)$ avec $f(x)^{-1} := 1/f(x)$! Par exemple, les fonctions

$$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0 : x \mapsto x \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$$

vérifient $f(x)^{-1} = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$, par contre $f^{-1} = f$ et $g^{-1} = g$ (exercice facile).

Proposition

1. *Une fonction est inversible si et seulement si c'est une bijection.*
2. *Si g est l'inverse de f, alors f est l'inverse de g. En d'autres termes,*

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Preuve.

Si f est inversible (d'inverse g)

Proposition

1. *Une fonction est inversible si et seulement si c'est une bijection.*
2. *Si g est l'inverse de f, alors f est l'inverse de g. En d'autres termes,*

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Preuve.

Si f est inversible (d'inverse g), alors f est

- injective car $f(x) = f(y)$ implique $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$.

Proposition

1. *Une fonction est inversible si et seulement si c'est une bijection.*
2. *Si g est l'inverse de f, alors f est l'inverse de g. En d'autres termes,*

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Preuve.

Si f est inversible (d'inverse g), alors f est

- injective car $f(x) = f(y)$ implique $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$.
- surjective car si $z \in B$, alors $g(z)$ est un antécédent de z.

Proposition

1. *Une fonction est inversible si et seulement si c'est une bijection.*
2. *Si g est l'inverse de f, alors f est l'inverse de g. En d'autres termes,*

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Preuve.

Si f est inversible (d'inverse g), alors f est

- injective car $f(x) = f(y)$ implique $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$.
- surjective car si $z \in B$, alors $g(z)$ est un antécédent de z.

Proposition

1. *Une fonction est inversible si et seulement si c'est une bijection.*
2. *Si g est l'inverse de f, alors f est l'inverse de g. En d'autres termes,*

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Preuve.

Si f est inversible (d'inverse g), alors f est

- injective car $f(x) = f(y)$ implique $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$.
- surjective car si $z \in B$, alors $g(z)$ est un antécédent de z.

Si f est bijective, alors pour tout $z \in B$ il existe un (surjectivité) unique (injectivité) antécédent. □

Graphe de la réciproque

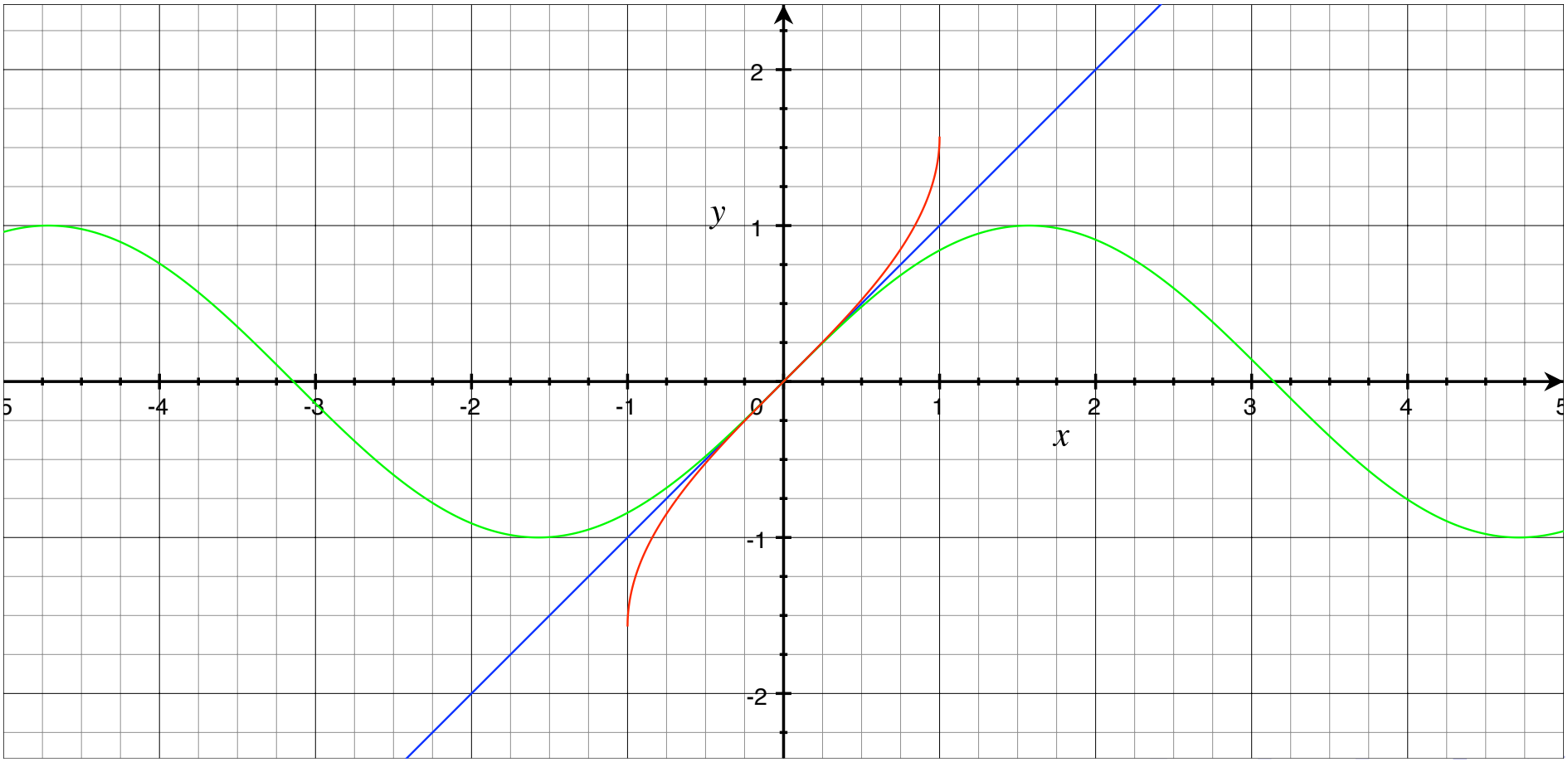
Si $f : A \to B$ est bijective, alors le graphe de sa réciproque $f^{-1} : B \to A$ peut s'obtenir en prenant l'image du graphe de f par une symétrie bilatérale d'axe $x = y$. En effet,

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in B\} = \{(f(x), x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}$$

Arcsinus

La fonction sin : $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ possède une réciproque notée :

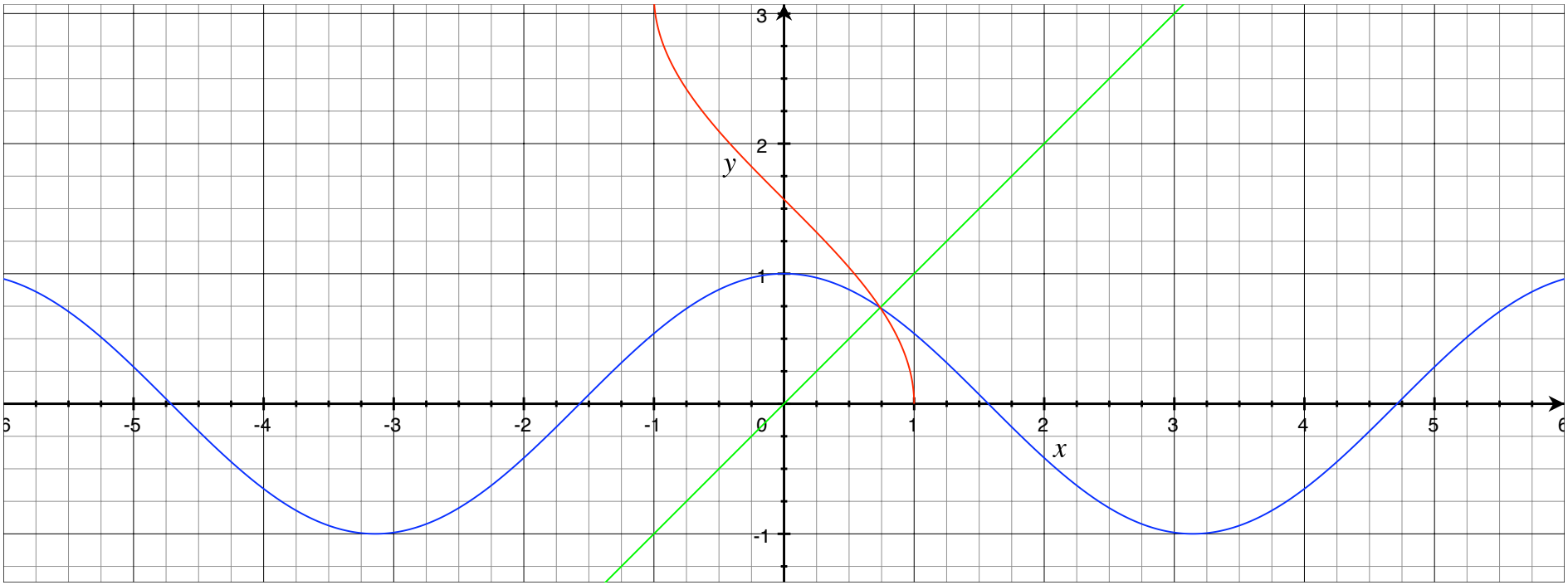
$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Arccosinus

La réciproque de cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$ est

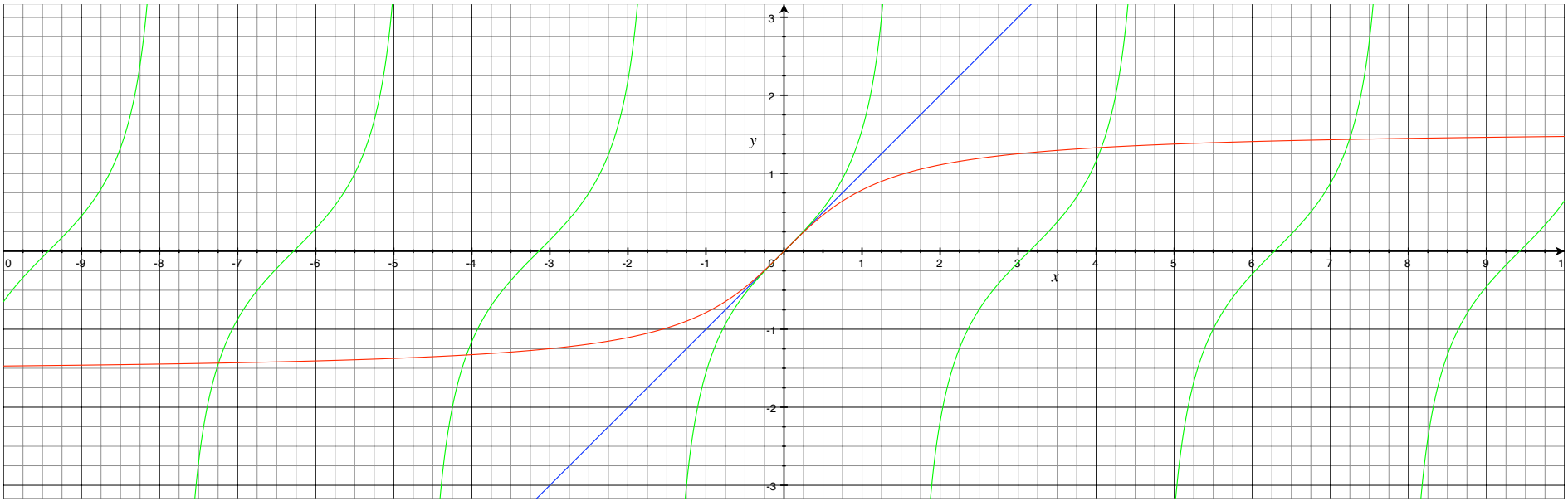
$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$



Arctangente

La réciproque de $\mathrm{tg} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to]-\infty, \infty[$ est

$$\mathrm{arctg} :]-\infty, \infty[\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$



On peut aussi définir la réciproque de $\mathrm{cotg} :]0, \pi[\to]-\infty, \infty[$.

Diagrammes de Venn

Si A et B sont des ensembles, on définit les trois opérations :

Intersection $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$

Union $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Différence $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$

Diagrammes de Venn

Si A et B sont des ensembles, on définit les trois opérations :

Intersection $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$

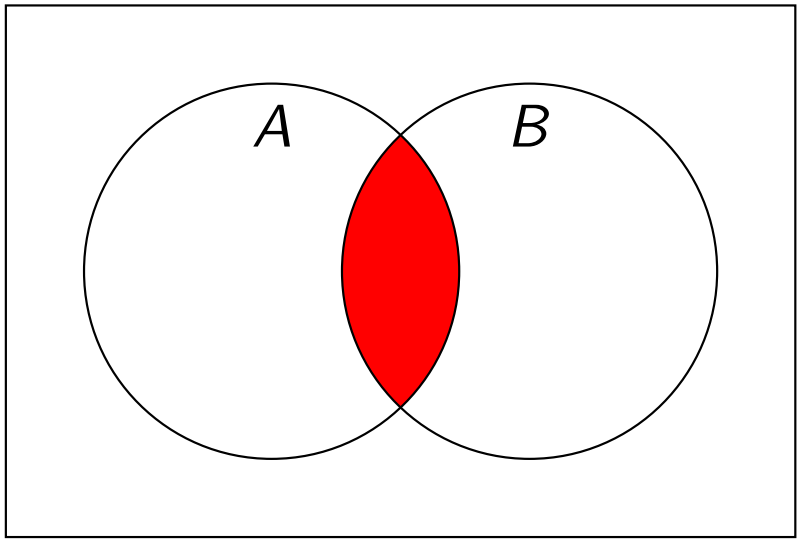
Union $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

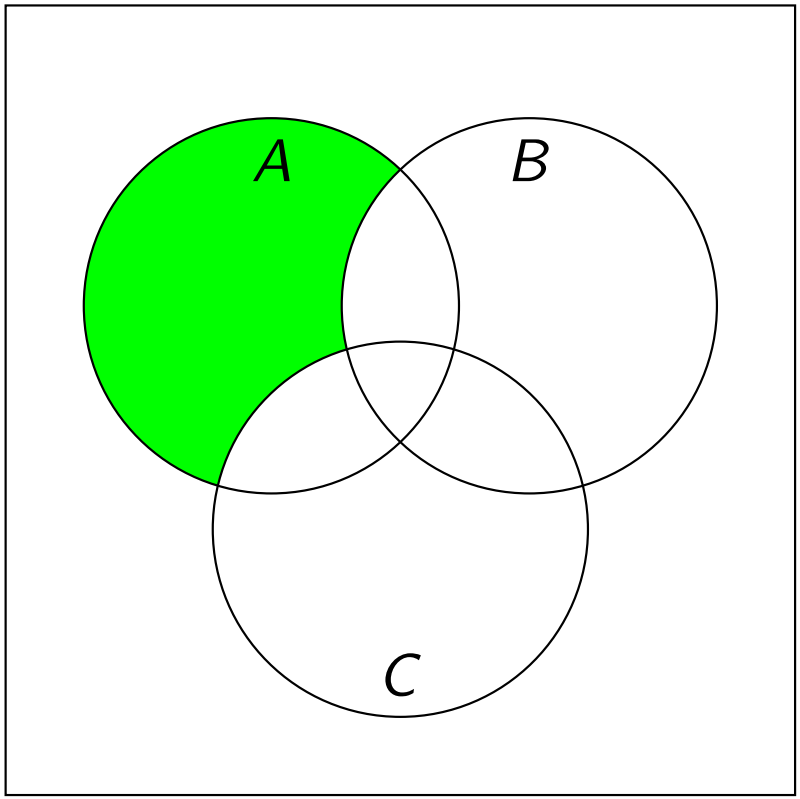
Différence $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$

On peut représenter les opérations sur des diagrammes appelés diagrames de Venn.

Exercice

Voici deux diagrammes de Venn :

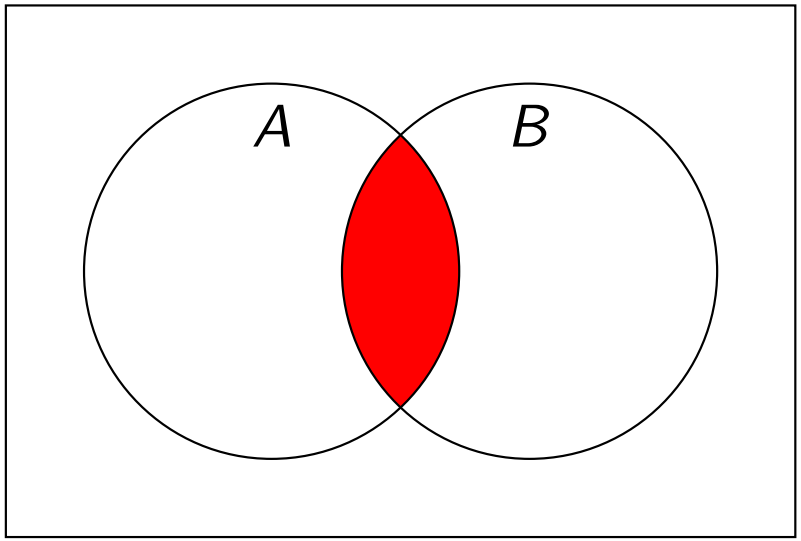


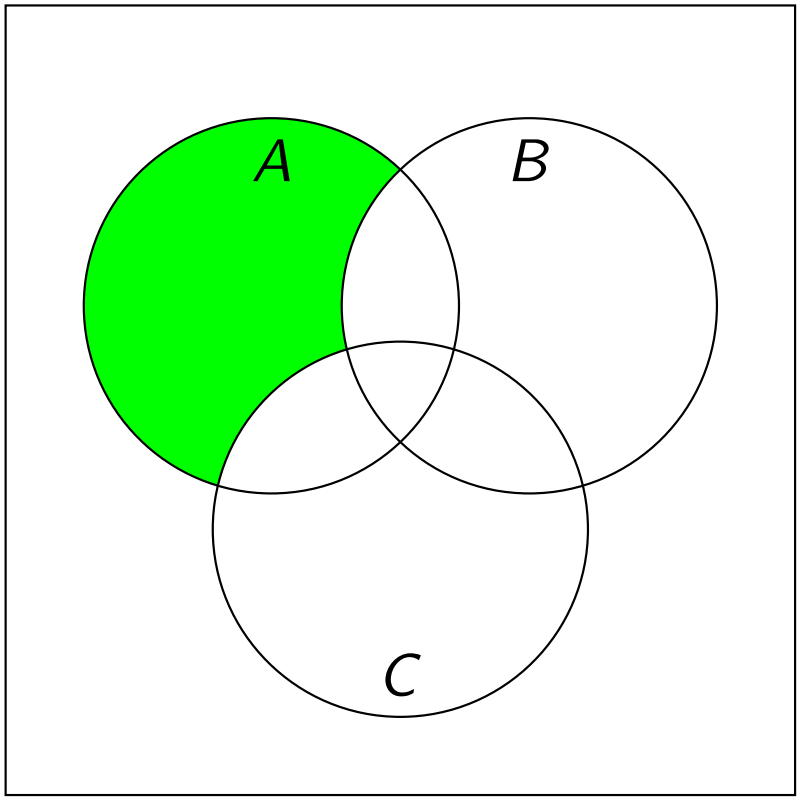


Que représentent-ils ?

Exercice

Voici deux diagrammes de Venn :





Que représentent-ils ?

Réponse : $A \cap B$ et $A \setminus (B \cup C)$