Résultat

Soient a, b, c, d des réels vérifiant $a \leq b$ et $c \leq d$. Alors

$$a + c \leq b + d.$$

De plus, si $0 \leq a$ et $0 \leq c$, alors

$$ac \leq bd.$$

Démonstration.

Comme $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ (résultat précédent). De même, comme $c \leq d$, nous avons $b + c \leq b + d$. Par transitivité, nous obtenons $a + c \leq b + d$ comme annoncé.
La preuve pour le produit (avec la condition supplémentaire) est laissée en exercice. $\square$

Exercice
Faire la preuve de la seconde partie du résultat précédent.

Exercice
Trouver des réels a, b, c, d tels que $a \leq b$, $c \leq d$ et $ac > bd$.

Bref retour sur les tables de vérités

Regardons quelques autres tables de vérité :

- $P \vee Q$
- $P \wedge Q$

Contenu de la section

Intervalles

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2, \pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls), noté $\mathbb{R}^+$, est également un intervalle.
- L'ensemble des réels sauf 0, noté $\mathbb{R}_0$, n'est pas un intervalle car 0 manque : il y a un trou.

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*
- $[a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris);*
- $]a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris);*
- $]-\infty, b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty, b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*
- $]a, \infty[$ *désigne l'ensemble des réels strictement supérieurs à a ;*
- $[a, \infty[$ *désigne l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à a ;*
- $]-\infty, \infty[$ *désigne l'ensemble des réels, également noté $\mathbb{R}$.*

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle $[0, 1]$ contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Mais il est borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1 (de par la définition de cet intervalle !).
- L'intervalle $[4, 4]$ contient un seul nombre : le nombre 4.
- L'intervalle $]4, 4[$ ne contient aucun nombre, car rien aucun nombre n'est à la fois strictement supérieur et strictement inférieur à 4.

Contenu de la section

Contenu de la section

Considérons les calculs suivants :

$$1 + 2 = 3, \quad 1 + 2 + 3 = 6, \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Nous définissons un *symbole de sommation* comme suit :

Définition

Si m et n sont des entiers, $m \leq n$, et si $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ sont des nombres, on définit :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1+2+3+\ldots+100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1+4+9+\ldots+10000$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100} 3 = 3+3+3+\cdots+3 (= 300)$$

$$\sum_{k=5}^{10} (k-1) = 4+5+6+7+8+9$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1) = 4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}k = \frac{1+2+3+\ldots+100}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{100} = \frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\ldots+\frac{100}{100}$$

$$\begin{aligned}(n+1)+\sum_{k=1}^{n}k &= (n+1)+(1+2+3+\cdots+n)\\ &= 1+2+3+\cdots+n+(n+1)\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}.\end{aligned}$$

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k+b_k)=\left(\sum_{k=m}^{n}a_k\right)+\left(\sum_{k=m}^{n}b_k\right)$$

$$\sum_{k=m}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=m}^{n}a_k$$

$$\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{k=m}^{n}a_{n+m-k}$$

Démonstration.

Preuve de $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$

Le membre de gauche est :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

et le membre de droite est

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k} &= a_{n+m-(m)} + a_{n+m-(m+1)} + a_{n+m-(m+2)} + \dots \\ &\qquad \dots + a_{n+m-(n-1)} + a_{n+m-(n)} \\ &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_{m+1} + a_m\end{aligned}$$

Les deux sont donc égaux (l'un est simplement sommé dans un sens, l'autre l'est dans l'autre sens). $\square$

Rappel

Nous avons défini le signe somme :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Exemple

Nous avions déjà prouvé par récurrence, mais avec d'autres notations :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Contenu de la section

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ est la quantité

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

Exemple

Si un étudiant a suivi trois cours, et y a obtenu les notes x_1, x_2 et x_3, alors sa moyenne est $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$.

Exemple

Si cinq étudiants ont suivi le cours de mathématiques, et ont eut des notes e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, alors on dira que la moyenne des notes pour ce cours est

$$\frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5}{5}.$$

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours plus petite que le plus grands de ces nombres, et plus grande que le plus petit de ces nombres.

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. L'un de ces nombres, « le plus petit », est inférieur ou égal à tous les autres. Il a donc un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a $x_j \leq x_k \leq x_J$ pour tout k entre 1 et n. Dès lors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_J + x_J + \cdots + x_J = nx_J$$

dont on tire

$$\bar{x} \leq x_J$$

c'est-à-dire : la moyenne d'une séquence de nombres est inférieure au plus grand de ces nombres.

La preuve se termine similairement avec x_j. $\square$

Contenu de la section

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ». En d'autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Exemple

« Le taux de réussite des étudiants de bachelier de l'année passée était d'un tiers. » En d'autres termes, un étudiant sur trois avait réussi. Ceci est approximativement 33% car

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}100}{100} = \frac{33.3\ldots3\ldots}{100} = 33.3\ldots3\ldots\%$$

- Le pourcentage est une information globale, et non individuelle.

Exemple

Un taux de 33% ne veut pas dire qu'en prenant trois étudiants au hasard, un seul réussira.

- Le pourcentage n'est pas de la voyance.

Exemple

Le taux de réussite peut très bien être différent cette année ! Il dépend de vous !

Contenu de la section

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b », et $3x$ veut dire « 3 fois x ».

Exemple

Si $a = 3$ et $b = 5$, écrire $ab = 35$ est source de confusion !
Autre notation : $3 \cdot 5$ pour désigner le produit de 3 et de 5.
Nous n'utilisons *pas* la notation 3×5, pour éviter de confondre le symbole $\times$ avec la variable x.

Puissances

Remarques générales

Nous avons déjà défini :

$$x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Cas particulier : $x^0 = 1$.

Résultat

Pour tous réels x, y et pour tous naturels a, b, nous avons

$$x^a y^a = (xy)^a \qquad x^a x^b = x^{a+b} \tag{1.1}$$

$$(x^a)^b = x^{ab} \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \tag{1.2}$$

Combinatoire

Questions de comptage

Question

Combien de séquences de 5 lettres peut-on réaliser avec les lettre A, C, G et T ?

Réponse

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$$

Question

Combien de séquences de 8 chiffres peut-on réaliser avec les chiffres 0 et 1 ?

Réponse

$$2^8 = 256$$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un naturel $n > 0$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 2 \qquad 3! = 6 \qquad 4! = 24 \qquad 5! = 120 \qquad \cdots$$

Résultat

Pour tout $n > 0$,

$$n! = n(n-1)!$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \\ &= n[(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1] \\ &= n(n-1)! \end{aligned}$$

$\square$

Question

Combien de séquences de 2 lettres (différentes) peut-on former avec A, C, T, G ?

Réponse

$4 \times 3 = 12.$

Question

Combien de séquences de k lettres (différentes) peut-on former avec n lettres (différentes) données ?

Réponse

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Question

Combien de « tas » de k lettres (différentes) peut-on former avec n lettres (différentes) données ?

En d'autres termes : presque la même question qu'avant, mais en oubliant l'ordre des lettres !

Réponse

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Définition

Pour $0 \leq k \leq n$, on définit le coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Propriétés des coefficients binomiaux

Résultat

Pour tout naturel n, pour tout naturel $k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
&\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} \\
&\qquad = \frac{n!(n-k+1)}{(n-k)!k!(n-k+1)} + \frac{n!k}{(n-k+1)!k(k-1)!} \\
&\qquad = \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)!} \\
&\qquad = \frac{n!(n-k+1+k)}{(n+1-k)!k!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

$\square$

Triangle de Pascal

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1