Résultat

Soient a, b, c, d *des réels vérifiant* $a \leq b$ *et* $c \leq d$.

Résultat

Soient a, b, c, d *des réels vérifiant* $a \leq b$ *et* $c \leq d$*. Alors*

$$a + c \leq b + d.$$

Résultat

Soient a, b, c, d *des réels vérifiant* $a \leq b$ *et* $c \leq d$. *Alors*

$$a + c \leq b + d.$$

De plus, si $0 \leq a$ *et* $0 \leq c$, *alors*

Résultat

Soient a, b, c, d *des réels vérifiant* $a \leq b$ *et* $c \leq d$*. Alors*

$$a + c \leq b + d.$$

De plus, si $0 \leq a$ *et* $0 \leq c$*, alors*

$$ac \leq bd.$$

Démonstration.

Comme $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ (résultat précédent).

Résultat

Soient a, b, c, d des réels vérifiant $a \leq b$ et $c \leq d$. Alors

$$a + c \leq b + d.$$

De plus, si $0 \leq a$ et $0 \leq c$, alors

$$ac \leq bd.$$

Démonstration.

Comme $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ (résultat précédent). De même, comme $c \leq d$, nous avons $b + c \leq b + d$.

Résultat

Soient a, b, c, d des réels vérifiant $a \leq b$ et $c \leq d$. Alors
$$a + c \leq b + d.$$
De plus, si $0 \leq a$ et $0 \leq c$, alors
$$ac \leq bd.$$

Démonstration.

Comme $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ (résultat précédent). De même, comme $c \leq d$, nous avons $b + c \leq b + d$. Par transitivité, nous obtenons $a + c \leq b + d$ comme annoncé.

Résultat

Soient a, b, c, d des réels vérifiant $a \leq b$ et $c \leq d$. Alors

$$a + c \leq b + d.$$

De plus, si $0 \leq a$ et $0 \leq c$, alors

$$ac \leq bd.$$

Démonstration.

Comme $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ (résultat précédent). De même, comme $c \leq d$, nous avons $b + c \leq b + d$. Par transitivité, nous obtenons $a + c \leq b + d$ comme annoncé.

La preuve pour le produit (avec la condition supplémentaire) est laissée en exercice. $\square$

Exercice

Faire la preuve de la seconde partie du résultat précédent.

Exercice

Trouver des réels a, b, c, d tels que $a \leq b$, $c \leq d$ et $ac > bd$.

Bref retour sur les tables de vérités

Regardons quelques autres tables de vérité :

Bref retour sur les tables de vérités

Regardons quelques autres tables de vérité :

- $P \vee Q$
- $P \wedge Q$

Contenu de la section

- Intervalles

Définition

Un *intervalle* s′entend comme un ensemble de nombres réels « sans trou »

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2, \pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2, \pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls),

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2, \pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls), noté $\mathbb{R}^+$,

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2, \pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls), noté $\mathbb{R}^+$, est également un intervalle.

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2, \pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls), noté $\mathbb{R}^+$, est également un intervalle.
- L'ensemble des réels sauf 0,

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2, \pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls), noté $\mathbb{R}^+$, est également un intervalle.
- L'ensemble des réels sauf 0, noté $\mathbb{R}_0$,

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2, \pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls), noté $\mathbb{R}^+$, est également un intervalle.
- L'ensemble des réels sauf 0, noté $\mathbb{R}_0$, n'est pas un intervalle car 0 manque : il y a un trou.

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2, \pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls), noté $\mathbb{R}^+$, est également un intervalle.
- L'ensemble des réels sauf 0, noté $\mathbb{R}_0$, n'est pas un intervalle car 0 manque : il y a un trou.

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a, b]$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*
- $[a, b[$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*
- $[a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris);*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*
- $[a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris);*
- $]a, b[$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*
- $[a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris);*
- $]a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris);*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*
- $[a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris);*
- $]a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris);*
- $]-\infty, b[$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris);*
- $]a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris);*
- $]-\infty,b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*
- $[a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris);*
- $]a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris);*
- $]-\infty, b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty, b]$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*
- $[a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris);*
- $]a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris);*
- $]-\infty, b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty, b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris);*
- $]a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris);*
- $]-\infty,b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty,b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*
- $]a,\infty[$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*
- $[a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris);*
- $]a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris);*
- $]-\infty, b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty, b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*
- $]a, \infty[$ *désigne l'ensemble des réels strictement supérieurs à a ;*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*
- $[a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris);*
- $]a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris);*
- $]-\infty, b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty, b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*
- $]a, \infty[$ *désigne l'ensemble des réels strictement supérieurs à a ;*
- $[a, \infty[$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*
- $[a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris);*
- $]a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris);*
- $]-\infty, b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty, b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*
- $]a, \infty[$ *désigne l'ensemble des réels strictement supérieurs à a ;*
- $[a, \infty[$ *désigne l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à a ;*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*
- $[a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris);*
- $]a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris);*
- $]-\infty, b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty, b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*
- $]a, \infty[$ *désigne l'ensemble des réels strictement supérieurs à a ;*
- $[a, \infty[$ *désigne l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à a ;*
- $]-\infty, \infty[$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a, b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*
- $[a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris);*
- $]a, b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris);*
- $]-\infty, b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty, b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*
- $]a, \infty[$ *désigne l'ensemble des réels strictement supérieurs à a ;*
- $[a, \infty[$ *désigne l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à a ;*
- $]-\infty, \infty[$ *désigne l'ensemble des réels, également noté* $\mathbb{R}$.

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris);*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris);*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris);*
- $]a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris);*
- $]-\infty,b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty,b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*
- $]a,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels strictement supérieurs à a ;*
- $[a,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à a ;*
- $]-\infty,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels, également noté $\mathbb{R}$.*

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre,

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle $[0, 1]$ contient une infinité de nombres,

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle $[0, 1]$ contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc.

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle $[0, 1]$ contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Mais il est borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle $[0,1]$ contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Mais il est borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1 (de par la définition de cet intervalle!).

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle $[0, 1]$ contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Mais il est borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1 (de par la définition de cet intervalle !).
- L'intervalle $[4, 4]$ contient un seul nombre

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle $[0, 1]$ contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Mais il est borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1 (de par la définition de cet intervalle !).
- L'intervalle $[4, 4]$ contient un seul nombre : le nombre 4.

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle $[0,1]$ contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Mais il est borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1 (de par la définition de cet intervalle!).
- L'intervalle $[4,4]$ contient un seul nombre : le nombre 4.
- L'intervalle $]4,4[$ ne contient aucun nombre

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle $[0, 1]$ contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Mais il est borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1 (de par la définition de cet intervalle !).
- L'intervalle $[4, 4]$ contient un seul nombre : le nombre 4.
- L'intervalle $]4, 4[$ ne contient aucun nombre, car rien aucun nombre n'est à la fois strictement supérieur et strictement inférieur à 4.

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle $[0, 1]$ contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Mais il est borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1 (de par la définition de cet intervalle!).
- L'intervalle $[4, 4]$ contient un seul nombre : le nombre 4.
- L'intervalle $]4, 4[$ ne contient aucun nombre, car rien aucun nombre n'est à la fois strictement supérieur et strictement inférieur à 4.

Contenu de la section

Contenu de la section

Considérons les calculs suivants :

$$1 + 2 = 3,$$

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6,$$

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10,$$

Considérons les calculs suivants :

$$1 + 2 = 3, \quad 1 + 2 + 3 = 6, \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \quad \dots$$

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \dots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ?

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ?

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \dots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Nous définissons un *symbole de sommation* comme suit :

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Nous définissons un *symbole de sommation* comme suit :

Définition

Si m et n sont des entiers

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Nous définissons un *symbole de sommation* comme suit :

Définition

Si m et n sont des entiers, $m \leq n$,

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Nous définissons un *symbole de sommation* comme suit :

Définition

Si m et n sont des entiers, $m \leq n$, et si $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ sont des nombres

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Nous définissons un *symbole de sommation* comme suit :

Définition

Si m et n sont des entiers, $m \leq n$, et si $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ sont des nombres, on définit :

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Nous définissons un *symbole de sommation* comme suit :

Définition

Si m et n sont des entiers, $m \leq n$, et si $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ sont des nombres, on définit :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k :=$$

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Nous définissons un *symbole de sommation* comme suit :

Définition

Si m et n sont des entiers, $m \leq n$, et si $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ sont des nombres, on définit :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k =$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 =$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + 10000$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + 10000$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} =$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + 10000$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + 10000$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100} 3 =$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + 10000$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100} 3 = 3 + 3 + 3 + \cdots + 3 (= 300)$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + 10000$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100} 3 = 3 + 3 + 3 + \cdots + 3 (= 300)$$

$$\sum_{k=5}^{10} (k-1) =$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1+2+3+\ldots+100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1+4+9+\ldots+10000$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100} 3 = 3+3+3+\cdots+3(=300)$$

$$\sum_{k=5}^{10} (k-1) = 4+5+6+7+8+9$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1)$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1) = 4$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1) = 4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}k$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1)=4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}k=\frac{1+2+3+\ldots+100}{100}$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1) = 4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}k = \frac{1+2+3+\ldots+100}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{100}$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1)=4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}k=\frac{1+2+3+\ldots+100}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{100}=\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\ldots+\frac{100}{100}$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1) = 4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} k = \frac{1+2+3+\ldots+100}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{100} = \frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\ldots+\frac{100}{100}$$

$$(n+1)+\sum_{k=1}^{n} k$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1)=4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}k=\frac{1+2+3+\ldots+100}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{100}=\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\ldots+\frac{100}{100}$$

$$(n+1)+\sum_{k=1}^{n}k=(n+1)+(1+2+3+\cdots+n)$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1)=4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}k=\frac{1+2+3+\ldots+100}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{100}=\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\ldots+\frac{100}{100}$$

$$\begin{aligned}(n+1)+\sum_{k=1}^{n}k&=(n+1)+(1+2+3+\cdots+n)\\&=1+2+3+\cdots+n+(n+1)\end{aligned}$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1) = 4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} k = \frac{1+2+3+\ldots+100}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{100} = \frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\ldots+\frac{100}{100}$$

$$\begin{aligned}(n+1)+\sum_{k=1}^{n} k &= (n+1)+(1+2+3+\cdots+n) \\ &= 1+2+3+\cdots+n+(n+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}.\end{aligned}$$

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k)$$

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right)$$

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right)$$

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k$$

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right)$$

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k+b_k)=\left(\sum_{k=m}^{n}a_k\right)+\left(\sum_{k=m}^{n}b_k\right)$$

$$\sum_{k=m}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=m}^{n}a_k$$

$$\sum_{k=m}^{n}a_k$$

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right)$$

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$$

Démonstration.

Preuve de $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$

Démonstration.

Preuve de $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$
Le membre de gauche est :

Démonstration.

Preuve de $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$
Le membre de gauche est :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Démonstration.

Preuve de $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$

Le membre de gauche est :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

et le membre de droite est

$$\sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k} = a_{n+m-(m)} + a_{n+m-(m+1)} + a_{n+m-(m+2)} + \dots$$
$$\dots + a_{n+m-(n-1)} + a_{n+m-(n)}$$

Démonstration.

Preuve de $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$
Le membre de gauche est :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

et le membre de droite est

$$\sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k} = a_{n+m-(m)} + a_{n+m-(m+1)} + a_{n+m-(m+2)} + \dots$$
$$\dots + a_{n+m-(n-1)} + a_{n+m-(n)}$$
$$= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_{m+1} + a_m$$

Démonstration.

Preuve de $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$

Le membre de gauche est :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

et le membre de droite est

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k} &= a_{n+m-(m)} + a_{n+m-(m+1)} + a_{n+m-(m+2)} + \dots \\ &\qquad \dots + a_{n+m-(n-1)} + a_{n+m-(n)} \\ &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_{m+1} + a_m\end{aligned}$$

Démonstration.

Preuve de $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$
Le membre de gauche est :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

et le membre de droite est

$$\sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k} = a_{n+m-(m)} + a_{n+m-(m+1)} + a_{n+m-(m+2)} + \dots$$
$$\dots + a_{n+m-(n-1)} + a_{n+m-(n)}$$
$$= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_{m+1} + a_m$$

Les deux sont donc égaux (l'un est simplement sommé dans un sens, l'autre l'est dans l'autre sens). $\square$

Rappel

Nous avons défini le signe somme :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Rappel

Nous avons défini le signe somme :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Exemple

Nous avions déjà prouvé par récurrence

Rappel

Nous avons défini le signe somme :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Exemple

Nous avions déjà prouvé par récurrence, mais avec d'autres notations :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Contenu de la section

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ est la quantité

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ est la quantité

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ est la quantité

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

Exemple

Si un étudiant a suivi trois cours,

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ est la quantité

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

Exemple

Si un étudiant a suivi trois cours, et y a obtenu les notes x_1, x_2 et x_3

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ est la quantité
$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

Exemple

Si un étudiant a suivi trois cours, et y a obtenu les notes x_1, x_2 et x_3, alors sa moyenne est $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$.

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ est la quantité

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

Exemple

Si un étudiant a suivi trois cours, et y a obtenu les notes x_1, x_2 et x_3, alors sa moyenne est $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$.

Exemple

Si cinq étudiants ont suivi le cours de mathématiques,

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ est la quantité

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

Exemple

Si un étudiant a suivi trois cours, et y a obtenu les notes x_1, x_2 et x_3, alors sa moyenne est $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$.

Exemple

Si cinq étudiants ont suivi le cours de mathématiques, et ont eut des notes e_1, e_2, e_3, e_4, e_5,

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ est la quantité

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

Exemple

Si un étudiant a suivi trois cours, et y a obtenu les notes x_1, x_2 et x_3, alors sa moyenne est $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$.

Exemple

Si cinq étudiants ont suivi le cours de mathématiques, et ont eut des notes e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, alors on dira que la moyenne des notes pour ce cours est

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ est la quantité

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

Exemple

Si un étudiant a suivi trois cours, et y a obtenu les notes x_1, x_2 et x_3, alors sa moyenne est $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$.

Exemple

Si cinq étudiants ont suivi le cours de mathématiques, et ont eut des notes e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, alors on dira que la moyenne des notes pour ce cours est

$$\frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5}{5}.$$

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours plus petite que le plus grands de ces nombres,

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours plus petite que le plus grands de ces nombres, et plus grande que le plus petit de ces nombres.

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$.

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours plus petite que le plus grands de ces nombres, et plus grande que le plus petit de ces nombres.

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. L'un de ces nombres, « le plus petit », est inférieur ou égal à tous les autres.

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours plus petite que le plus grands de ces nombres, et plus grande que le plus petit de ces nombres.

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. L'un de ces nombres, « le plus petit », est inférieur ou égal à tous les autres. Il a donc un certain indice, disons j.

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours plus petite que le plus grands de ces nombres, et plus grande que le plus petit de ces nombres.

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. L'un de ces nombres, « le plus petit », est inférieur ou égal à tous les autres. Il a donc un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J.

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours plus petite que le plus grands de ces nombres, et plus grande que le plus petit de ces nombres.

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. L'un de ces nombres, « le plus petit », est inférieur ou égal à tous les autres. Il a donc un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a $x_j \leq x_k \leq x_J$ pour tout k entre 1 et n.

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours plus petite que le plus grands de ces nombres, et plus grande que le plus petit de ces nombres.

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. L'un de ces nombres, « le plus petit », est inférieur ou égal à tous les autres. Il a donc un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a $x_j \leq x_k \leq x_J$ pour tout k entre 1 et n. Dès lors :

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours plus petite que le plus grands de ces nombres, et plus grande que le plus petit de ces nombres.

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. L'un de ces nombres, « le plus petit », est inférieur ou égal à tous les autres. Il a donc un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a $x_j \leq x_k \leq x_J$ pour tout k entre 1 et n. Dès lors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq$$

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours plus petite que le plus grands de ces nombres, et plus grande que le plus petit de ces nombres.

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. L'un de ces nombres, « le plus petit », est inférieur ou égal à tous les autres. Il a donc un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a $x_j \leq x_k \leq x_J$ pour tout k entre 1 et n. Dès lors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_J + x_J + \cdots + x_J$$

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours plus petite que le plus grands de ces nombres, et plus grande que le plus petit de ces nombres.

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. L'un de ces nombres, « le plus petit », est inférieur ou égal à tous les autres. Il a donc un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a $x_j \leq x_k \leq x_J$ pour tout k entre 1 et n. Dès lors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_J + x_J + \cdots + x_J = nx_J$$

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours plus petite que le plus grands de ces nombres, et plus grande que le plus petit de ces nombres.

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. L'un de ces nombres, « le plus petit », est inférieur ou égal à tous les autres. Il a donc un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a $x_j \leq x_k \leq x_J$ pour tout k entre 1 et n. Dès lors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_J + x_J + \cdots + x_J = nx_J$$

dont on tire

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours plus petite que le plus grands de ces nombres, et plus grande que le plus petit de ces nombres.

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. L'un de ces nombres, « le plus petit », est inférieur ou égal à tous les autres. Il a donc un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a $x_j \leq x_k \leq x_J$ pour tout k entre 1 et n. Dès lors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_J + x_J + \cdots + x_J = nx_J$$

dont on tire

$$\bar{x} \leq x_J$$

c'est-à-dire

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours plus petite que le plus grands de ces nombres, et plus grande que le plus petit de ces nombres.

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \dots, x_n$. L'un de ces nombres, « le plus petit », est inférieur ou égal à tous les autres. Il a donc un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a $x_j \leq x_k \leq x_J$ pour tout k entre 1 et n. Dès lors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_J + x_J + \cdots + x_J = nx_J$$

dont on tire

$$\bar{x} \leq x_J$$

c'est-à-dire : la moyenne d'une séquence de nombres est inférieure au plus grand de ces nombres.

La preuve se termine similairement avec x_j. $\square$

Contenu de la section

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. »,

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ».

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ». En d'autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ». En d'autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Exemple

« Le taux de réussite des étudiants de bachelier de l'année passée était d'un tiers. »

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ». En d'autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Exemple

« Le taux de réussite des étudiants de bachelier de l'année passée était d'un tiers. » En d'autres termes, un étudiant sur trois avait réussi.

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ». En d'autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Exemple

« Le taux de réussite des étudiants de bachelier de l'année passée était d'un tiers. » En d'autres termes, un étudiant sur trois avait réussi. Ceci est approximativement 33% car

$$\frac{1}{3}$$

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ». En d'autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Exemple

« Le taux de réussite des étudiants de bachelier de l'année passée était d'un tiers. » En d'autres termes, un étudiant sur trois avait réussi. Ceci est approximativement 33% car

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}100}{100}$$

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ». En d'autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Exemple

« Le taux de réussite des étudiants de bachelier de l'année passée était d'un tiers. » En d'autres termes, un étudiant sur trois avait réussi. Ceci est approximativement 33% car

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}100}{100} = \frac{33.3\ldots3\ldots}{100} =$$

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ». En d'autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Exemple

« Le taux de réussite des étudiants de bachelier de l'année passée était d'un tiers. » En d'autres termes, un étudiant sur trois avait réussi. Ceci est approximativement 33% car

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}100}{100} = \frac{33.3\ldots3\ldots}{100} = 33.3\ldots3\ldots\%$$

- Le pourcentage est une information globale, et non individuelle.

- Le pourcentage est une information globale, et non individuelle.

Exemple

Un taux de 33% ne veut pas dire qu'en prenant trois étudiants au hasard, un seul réussira.

- Le pourcentage est une information globale, et non individuelle.

Exemple

Un taux de 33% ne veut pas dire qu'en prenant trois étudiants au hasard, un seul réussira.

- Le pourcentage n'est pas de la voyance.

- Le pourcentage est une information globale, et non individuelle.

Exemple

Un taux de 33% ne veut pas dire qu'en prenant trois étudiants au hasard, un seul réussira.

- Le pourcentage n'est pas de la voyance.

Exemple

Le taux de réussite peut très bien être différent cette année !

- Le pourcentage est une information globale, et non individuelle.

Exemple

Un taux de 33% ne veut pas dire qu'en prenant trois étudiants au hasard, un seul réussira.

- Le pourcentage n'est pas de la voyance.

Exemple

Le taux de réussite peut très bien être différent cette année ! Il dépend de vous !

Contenu de la section

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b »,

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b », et $3x$ veut dire « 3 fois x ».

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b », et $3x$ veut dire « 3 fois x ».

Exemple

Si $a = 3$ et $b = 5$,

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b », et $3x$ veut dire « 3 fois x ».

Exemple

Si $a = 3$ et $b = 5$, écrire $ab = 35$ est source de confusion !

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b », et $3x$ veut dire « 3 fois x ».

Exemple

Si $a = 3$ et $b = 5$, écrire $ab = 35$ est source de confusion !

Autre notation

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b », et $3x$ veut dire « 3 fois x ».

Exemple

Si $a = 3$ et $b = 5$, écrire $ab = 35$ est source de confusion !

Autre notation : $3 \cdot 5$ pour désigner le produit de 3 et de 5.

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b », et $3x$ veut dire « 3 fois x ».

Exemple

Si $a = 3$ et $b = 5$, écrire $ab = 35$ est source de confusion !
Autre notation : $3 \cdot 5$ pour désigner le produit de 3 et de 5.
Nous n'utilisons *pas* la notation 3×5,

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b », et $3x$ veut dire « 3 fois x ».

Exemple

Si $a = 3$ et $b = 5$, écrire $ab = 35$ est source de confusion !
Autre notation : $3 \cdot 5$ pour désigner le produit de 3 et de 5.
Nous n'utilisons *pas* la notation 3×5, pour éviter de confondre le symbole $\times$ avec la variable x.

Puissances
Remarques générales

Nous avons déjà défini :

$$x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Puissances

Remarques générales

Nous avons déjà défini :

$$x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Cas particulier : $x^0 = 1$.

Puissances

Remarques générales

Nous avons déjà défini :

$$x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Cas particulier : $x^0 = 1$.

Résultat

Pour tous réels x, y et pour tous naturels a, b, nous avons

$$x^a y^a = (xy)^a \tag{1.2}$$

Puissances
Remarques générales

Nous avons déjà défini :

$$x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Cas particulier : $x^0 = 1$.

Résultat

Pour tous réels x, y et pour tous naturels a, b, nous avons

$$x^a y^a = (xy)^a \qquad x^a x^b = x^{a+b} \qquad (1.1)$$

$$(1.2)$$

Puissances

Remarques générales

Nous avons déjà défini :

$$x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Cas particulier : $x^0 = 1$.

Résultat

Pour tous réels x, y et pour tous naturels a, b, nous avons

$$x^a y^a = (xy)^a \qquad x^a x^b = x^{a+b} \tag{1.1}$$

$$(x^a)^b = x^{ab} \tag{1.2}$$

Puissances

Remarques générales

Nous avons déjà défini :

$$x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Cas particulier : $x^0 = 1$.

Résultat

Pour tous réels x, y et pour tous naturels a, b, nous avons

$$x^a y^a = (xy)^a \qquad x^a x^b = x^{a+b} \tag{1.1}$$

$$(x^a)^b = x^{ab} \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \tag{1.2}$$

Combinatoire

Questions de comptage

Question

Combien de séquences de 5 lettres peut-on réaliser avec les lettre A, C, G et T ?

Réponse

Combinatoire

Questions de comptage

Question

Combien de séquences de 5 lettres peut-on réaliser avec les lettre A, C, G et T ?

Réponse

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$$

Combinatoire

Questions de comptage

Question

Combien de séquences de 5 lettres peut-on réaliser avec les lettre A, C, G et T ?

Réponse

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$$

Combinatoire

Questions de comptage

Question

Combien de séquences de 5 lettres peut-on réaliser avec les lettre A, C, G et T ?

Réponse

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$$

Question

Combien de séquences de 8 chiffres peut-on réaliser avec les chiffres 0 et 1 ?

Réponse

Combinatoire

Questions de comptage

Question

Combien de séquences de 5 lettres peut-on réaliser avec les lettre A, C, G et T ?

Réponse

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$$

Question

Combien de séquences de 8 chiffres peut-on réaliser avec les chiffres 0 et 1 ?

Réponse

$$2^8 = 256$$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un naturel $n > 0$ est définie par :

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un naturel $n > 0$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un naturel $n > 0$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un naturel $n > 0$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$0! = 1$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un naturel $n > 0$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$$0! = 1 \qquad 1! = 1$$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un naturel $n > 0$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 2$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un naturel $n > 0$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 2 \qquad 3! = 6$$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un naturel $n > 0$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 2 \qquad 3! = 6 \qquad 4! = 24$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un naturel $n > 0$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 2 \qquad 3! = 6 \qquad 4! = 24 \qquad 5! = 120$$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un naturel $n > 0$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 2 \qquad 3! = 6 \qquad 4! = 24 \qquad 5! = 120 \qquad \cdots$$

Résultat

Pour tout $n > 0$,

$$n! = n(n-1)!$$

Démonstration.

Résultat

Pour tout $n > 0$,

$$n! = n(n-1)!$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \\ &= n[(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1] \\ &= n(n-1)! \end{aligned}$$

$\square$

Question

Combien de séquences de 2 lettres (différentes) peut-on former avec A, C, T, G ?

Réponse

$4 \times 3 = 12.$

Question

Combien de séquences de k lettres (différentes) peut-on former avec n lettres (différentes) données ?

Réponse

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))$$

Question

Combien de séquences de 2 lettres (différentes) peut-on former avec A, C, T, G ?

Réponse

$4 \times 3 = 12.$

Question

Combien de séquences de k lettres (différentes) peut-on former avec n lettres (différentes) données ?

Réponse

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Question

Combien de « tas » de k lettres (différentes) peut-on former avec n lettres (différentes) données ?

En d'autres termes : presque la même question qu'avant, mais en oubliant l'ordre des lettres !

Réponse

Question

Combien de « tas » de k lettres (différentes) peut-on former avec n lettres (différentes) données ?

En d'autres termes : presque la même question qu'avant, mais en oubliant l'ordre des lettres !

Réponse

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Définition

Pour $0 \leq k \leq n$, on définit le coefficient binomial :

Question

Combien de « tas » de k lettres (différentes) peut-on former avec n lettres (différentes) données ?

En d'autres termes : presque la même question qu'avant, mais en oubliant l'ordre des lettres !

Réponse

$$\frac{n!}{(n-k)!\color{red}{k!}}$$

Définition

Pour $0 \leq k \leq n$, on définit le coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Propriétés des coefficients binomiaux

Résultat

Pour tout naturel n*, pour tout naturel* $k \geq 1$ *:*

Propriétés des coefficients binomiaux

Résultat

Pour tout naturel n*, pour tout naturel* $k \geq 1$ *:*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Propriétés des coefficients binomiaux

Résultat

Pour tout naturel n, pour tout naturel $k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Démonstration.

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!}$$

$\square$

Propriétés des coefficients binomiaux

Résultat

Pour tout naturel n, pour tout naturel $k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Démonstration.

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!}$$
$$= \frac{n!(n-k+1)}{(n-k)!k!(n-k+1)} + \frac{n!k}{(n-k+1)!k(k-1)!}$$

$\square$

Propriétés des coefficients binomiaux

Résultat

Pour tout naturel n, pour tout naturel $k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} &= \frac{n!(n-k+1)}{(n-k)!k!(n-k+1)} + \frac{n!k}{(n-k+1)!k(k-1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)!}
\end{aligned}$$

$\square$

Propriétés des coefficients binomiaux

Résultat

Pour tout naturel n, pour tout naturel $k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
&\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} \\
&\qquad = \frac{n!{\color{red}(n-k+1)}}{(n-k)!k!{\color{red}(n-k+1)}} + \frac{n!{\color{red}k}}{(n-k+1)!{\color{red}k}(k-1)!} \\
&\qquad = \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)!} \\
&\qquad = \frac{n!(n{\color{red}-k}+1{\color{red}+k})}{(n+1-k)!k!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

□

Triangle de Pascal

Triangle de Pascal

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Triangle de Pascal

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$