Supposons que nous ayons n objets distincts.

Supposons que nous ayons n objets distincts.

- Faire des mots de longueur k avec répétition possible

Supposons que nous ayons n objets distincts.

- Faire des mots de longueur k avec répétition possible : n^k possibilités.

Supposons que nous ayons n objets distincts.

- Faire des mots de longueur k avec répétition possible : n^k possibilités.
- Ré-ordonner ces n objets :

Supposons que nous ayons n objets distincts.

- Faire des mots de longueur k avec répétition possible : n^k possibilités.
- Ré-ordonner ces n objets : $n!$ possibilités.

Supposons que nous ayons n objets distincts.

- Faire des mots de longueur k avec répétition possible : n^k possibilités.
- Ré-ordonner ces n objets : $n!$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur n avec ces n objets.

Supposons que nous ayons n objets distincts.

- Faire des mots de longueur k avec répétition possible : n^k possibilités.
- Ré-ordonner ces n objets : $n!$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur n avec ces n objets.
- Choisir k objets parmi ces n objets :

Supposons que nous ayons n objets distincts.

- Faire des mots de longueur k avec répétition possible : n^k possibilités.
- Ré-ordonner ces n objets : $n!$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur n avec ces n objets.
- Choisir k objets parmi ces n objets :
  - Si l'ordre compte : $n(n-1)\cdots(n-(k-1)) =$

Supposons que nous ayons n objets distincts.

- Faire des mots de longueur k avec répétition possible : n^k possibilités.
- Ré-ordonner ces n objets : $n!$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur n avec ces n objets.
- Choisir k objets parmi ces n objets :
  - Si l'ordre compte : $n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$ possibilités.

Supposons que nous ayons n objets distincts.

- Faire des mots de longueur k avec répétition possible : n^k possibilités.
- Ré-ordonner ces n objets : $n!$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur n avec ces n objets.
- Choisir k objets parmi ces n objets :
  - Si l'ordre compte : $n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur k avec ces n objets.

Supposons que nous ayons n objets distincts.

- Faire des mots de longueur k avec répétition possible : n^k possibilités.
- Ré-ordonner ces n objets : $n!$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur n avec ces n objets.
- Choisir k objets parmi ces n objets :
  - Si l'ordre compte : $n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur k avec ces n objets.
  - Si l'ordre ne compte pas : $\frac{n!}{k!(n-k)!} =$

Supposons que nous ayons n objets distincts.

- Faire des mots de longueur k avec répétition possible : n^k possibilités.
- Ré-ordonner ces n objets : $n!$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur n avec ces n objets.
- Choisir k objets parmi ces n objets :
  - Si l'ordre compte : $n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur k avec ces n objets.
  - Si l'ordre ne compte pas : $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ possibilités.

Supposons que nous ayons n objets distincts.

- Faire des mots de longueur k avec répétition possible : n^k possibilités.
- Ré-ordonner ces n objets : $n!$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur n avec ces n objets.
- Choisir k objets parmi ces n objets :
  - Si l'ordre compte : $n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur k avec ces n objets.
  - Si l'ordre ne compte pas : $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ possibilités. C'est équivalent à compter le nombre de « tas » possibles avec k objets parmi ces n.

Supposons que nous ayons n objets distincts.

- Faire des mots de longueur k avec répétition possible : n^k possibilités.
- Ré-ordonner ces n objets : $n!$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur n avec ces n objets.
- Choisir k objets parmi ces n objets :
  - Si l'ordre compte : $n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur k avec ces n objets.
  - Si l'ordre ne compte pas : $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ possibilités. C'est équivalent à compter le nombre de « tas » possibles avec k objets parmi ces n.

Supposons que nous ayons n objets distincts.

- Faire des mots de longueur k avec répétition possible : n^k possibilités.
- Ré-ordonner ces n objets : $n!$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur n avec ces n objets.
- Choisir k objets parmi ces n objets :
  - Si l'ordre compte : $n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur k avec ces n objets.
  - Si l'ordre ne compte pas : $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ possibilités. C'est équivalent à compter le nombre de « tas » possibles avec k objets parmis ces n.

Le coefficient $\binom{n}{k}$ se prononce « k parmi n » ou « n choose k ».

Remarquons qu'on peut poser deux questions similaires :

Remarquons qu'on peut poser deux questions similaires :

Question

De combien de façons peut-on choisir k objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre.

Remarquons qu'on peut poser deux questions similaires :

Question

De combien de façons peut-on choisir k objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre.

Question

De combien de façons peut-on choisir $n-k$ objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre.

Réponse

Remarquons qu'on peut poser deux questions similaires :

Question

De combien de façons peut-on choisir k objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre.

Question

De combien de façons peut-on choisir $n-k$ objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre.

Réponse

$$\binom{n}{k}$$

Remarquons qu'on peut poser deux questions similaires :

Question

De combien de façons peut-on choisir k objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre.

Question

De combien de façons peut-on choisir $n-k$ objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre.

Réponse

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Remarquons qu'on peut poser deux questions similaires :

Question

De combien de façons peut-on choisir k objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre.

Question

De combien de façons peut-on choisir $n-k$ objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre.

Réponse

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(Algébriquement, la preuve est très simple.)

Remarquons :

Exemple

$$(x+y)^2$$

Remarquons :

Exemple

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = xx + xy + yx + yy$$

Remarquons :

Exemple

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = xx + xy + yx + yy = x^2 + 2xy + y^2$$

Remarquons :

Exemple

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = xx + xy + yx + yy = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$$

Remarquons :

Exemple

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)(x+y) = xx+xy+yx+yy = x^2+2xy+y^2\\(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y)\\&= x(xx+xy+yx+yy)+y(xx+xy+yx+yy)\end{aligned}$$

Remarquons :

Exemple

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= (x+y)(x+y) = xx+xy+yx+yy = x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y) \\
&= x(xx+xy+yx+yy)+y(xx+xy+yx+yy) \\
&= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3
\end{aligned}
$$

Remarquons :

Exemple

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = xx+xy+yx+yy = x^2+2xy+y^2$$

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y)\\ &= x(xx+xy+yx+yy)+y(xx+xy+yx+yy)\\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\end{aligned}$$

Remarquons :

Exemple

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= (x+y)(x+y) = xx+xy+yx+yy = x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y) \\
&= x(xx+xy+yx+yy)+y(xx+xy+yx+yy) \\
&= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3
\end{aligned}
$$

On note que les coefficients correspondent

Remarquons :

Exemple

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = xx + xy + yx + yy = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y)\\ &= x(xx+xy+yx+yy) + y(xx+xy+yx+yy)\\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

On note que les coefficients correspondent aux lignes $n=2$ et $n=3$ du triangle de Pascal.

Résultat (Formule du binôme de Newton)

Résultat (Formule du binôme de Newton)

$$(x+y)^n$$

Résultat (Formule du binôme de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Résultat (Formule du binôme de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Résultat (Formule du binôme de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Démonstration.

Par récurrence.

Résultat (Formule du binôme de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Démonstration.

Par récurrence.

Pour $n = 0$, la relation s'écrit

Résultat (Formule du binôme de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Démonstration.

Par récurrence.
Pour $n = 0$, la relation s'écrit $(x+y)^0 = \binom{0}{0} x^0 y^0$, c'est-à-dire $1 = 1$.

Résultat (Formule du binôme de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Démonstration.

Par récurrence.
Pour $n = 0$, la relation s'écrit $(x+y)^0 = \binom{0}{0} x^0 y^0$, c'est-à-dire $1 = 1$. Le pas initial est donc prouvé.

Démonstration.

Supposons la relation vraie pour $n = p$, où p est un entier naturel fixé.

Démonstration.

Supposons la relation vraie pour $n = p$, où p est un entier naturel fixé. Prouvons la relation pour $n = p + 1$.

Démonstration.

Supposons la relation vraie pour $n = p$, où p est un entier naturel fixé. Prouvons la relation pour $n = p + 1$.

$$(x + y)^{p+1} = (x + y)(x + y)^p$$

Démonstration.

Supposons la relation vraie pour $n = p$, où p est un entier naturel fixé. Prouvons la relation pour $n = p + 1$.

$$(x+y)^{p+1} = (x+y)(x+y)^p = (x+y)\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p-k}$$

Démonstration.

Supposons la relation vraie pour $n = p$, où p est un entier naturel fixé. Prouvons la relation pour $n = p + 1$.

$$\begin{aligned}(x+y)^{p+1} &= (x+y)(x+y)^p = (x+y)\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{k+1}y^{p-k} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p+1-k}\end{aligned}$$

Démonstration.

Supposons la relation vraie pour $n = p$, où p est un entier naturel fixé. Prouvons la relation pour $n = p + 1$.

$$\begin{aligned}
(x+y)^{p+1} &= (x+y)(x+y)^p = (x+y)\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p-k} \\
&= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{k+1}y^{p-k} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p+1-k} \\
&= x^{p+1} + \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}x^{k+1}y^{p-k} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p+1-k} + y^{p+1}
\end{aligned}$$

Démonstration.

Supposons la relation vraie pour $n = p$, où p est un entier naturel fixé. Prouvons la relation pour $n = p + 1$.

$$\begin{aligned}
(x+y)^{p+1} &= (x+y)(x+y)^p = (x+y)\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p-k} \\
&= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{k+1}y^{p-k} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p+1-k} \\
&= x^{p+1} + \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}x^{k+1}y^{p-k} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p+1-k} + y^{p+1} \\
&= x^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k-1}x^k y^{p-(k-1)} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p+1-k} + y^{p+1}
\end{aligned}$$

Démonstration.

(expression du slide précédent)

$$x^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k-1} x^k y^{p-(k-1)} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p+1-k} + y^{p+1}$$

Démonstration.

(expression du slide précédent)

$$x^{p+1}+\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k-1}x^k y^{p-(k-1)}+\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p+1-k}+y^{p+1}$$

$$=x^{p+1}+\sum_{k=1}^{p}\left(\binom{p}{k-1}+\binom{p}{k}\right)x^k y^{p-(k-1)}+y^{p+1}$$

Démonstration.

(expression du slide précédent)

$$x^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k-1} x^k y^{p-(k-1)} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p+1-k} + y^{p+1}$$

$$= x^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \left(\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} \right) x^k y^{p-(k-1)} + y^{p+1}$$

$$= x^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{k} x^k y^{p-(k-1)} + y^{p+1}$$

Démonstration.

(expression du slide précédent)

$$x^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k-1} x^k y^{p-(k-1)} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p+1-k} + y^{p+1}$$

$$= x^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \left(\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} \right) x^k y^{p-(k-1)} + y^{p+1}$$

$$= x^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{k} x^k y^{p-(k-1)} + y^{p+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} x^k y^{p-(k-1)}$$

Démonstration.

(expression du slide précédent)

$$x^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k-1} x^k y^{p-(k-1)} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p+1-k} + y^{p+1}$$

$$= x^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \left(\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} \right) x^k y^{p-(k-1)} + y^{p+1}$$

$$= x^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{k} x^k y^{p-(k-1)} + y^{p+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} x^k y^{p-(k-1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} x^k y^{(p+1)-k}$$

Démonstration.

(expression du slide précédent)

$$x^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k-1} x^k y^{p-(k-1)} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p+1-k} + y^{p+1}$$

$$= x^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \left(\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} \right) x^k y^{p-(k-1)} + y^{p+1}$$

$$= x^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{k} x^k y^{p-(k-1)} + y^{p+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} x^k y^{p-(k-1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} x^k y^{(p+1)-k}$$

Démonstration.

(expression du slide précédent)

$$x^{p+1}+\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k-1}x^k y^{p-(k-1)}+\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p+1-k}+y^{p+1}$$

$$=x^{p+1}+\sum_{k=1}^{p}\left(\binom{p}{k-1}+\binom{p}{k}\right)x^k y^{p-(k-1)}+y^{p+1}$$

$$=x^{p+1}+\sum_{k=1}^{p}\binom{p+1}{k}x^k y^{p-(k-1)}+y^{p+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}x^k y^{p-(k-1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}x^k y^{(p+1)-k}$$

où nous avons utilisé la relation :

$$\binom{n+1}{\;\;} = \binom{n}{\;} + \binom{n}{\;}$$

Contenu de la section

La valeur absolue de x

La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par :

La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple

La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple

- $|5| = 5$ car 5 est positif, donc on est dans le premier cas.

La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple

- $|5| = 5$ car 5 est positif, donc on est dans le premier cas.
- $|-5| = -(-5) = 5$ car -5 est négatif, donc on est dans le second cas.

La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple

- $|5| = 5$ car 5 est positif, donc on est dans le premier cas.
- $|-5| = -(-5) = 5$ car -5 est négatif, donc on est dans le second cas.
- 0 n'est pas spécial

La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple

- $|5| = 5$ car 5 est positif, donc on est dans le premier cas.
- $|-5| = -(-5) = 5$ car -5 est négatif, donc on est dans le second cas.
- 0 n'est pas spécial : $|0| = 0$ (premier cas).

La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple

- $|5| = 5$ car 5 est positif, donc on est dans le premier cas.
- $|-5| = -(-5) = 5$ car -5 est négatif, donc on est dans le second cas.
- 0 n'est pas spécial : $|0| = 0$ (premier cas).

Remarque

Si x, y sont des réels, alors $|x - y|$ s'interpète

La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple

- $|5| = 5$ car 5 est positif, donc on est dans le premier cas.
- $|-5| = -(-5) = 5$ car -5 est négatif, donc on est dans le second cas.
- 0 n'est pas spécial : $|0| = 0$ (premier cas).

Remarque

Si x, y sont des réels, alors $|x - y|$ s'interpète comme la distance entre x et y.

Résultat

Pour tous x, y, nous avons

$$|x| = |-x|$$

Résultat

Pour tous x, y, nous avons

$$|x| = |-x| \qquad\qquad |x - y| = |y - x|$$

Résultat

Pour tous x, y, nous avons

$$|x| = |-x| \qquad |x - y| = |y - x|$$

Résultat

Pour tous x, y, nous avons

$$|x| = |-x| \qquad\qquad |x-y| = |y-x|$$

Démonstration.

Pour la première égalité, on distingue trois cas :

Résultat

Pour tous x, y, nous avons

$$|x| = |-x| \qquad\qquad |x-y| = |y-x|$$

Démonstration.

Pour la première égalité, on distingue trois cas :

- Si $x = 0$ est nul, alors $-x = 0$,

Résultat

Pour tous x, y, nous avons

$$|x| = |-x| \qquad\qquad |x-y| = |y-x|$$

Démonstration.

Pour la première égalité, on distingue trois cas :

- Si $x = 0$ est nul, alors $-x = 0$,
- Si $x > 0$, alors $-x < 0$ donc $x = -(-x)$,

Résultat

Pour tous x, y, nous avons

$$|x| = |-x| \qquad\qquad |x - y| = |y - x|$$

Démonstration.

Pour la première égalité, on distingue trois cas :

- Si $x = 0$ est nul, alors $-x = 0$,
- Si $x > 0$, alors $-x < 0$ donc $x = -(-x)$,
- Si $x < 0$, alors $-x > 0$ donc $-x = -x$.

Résultat

Pour tous x, y, nous avons

$$|x| = |-x| \qquad\qquad |x - y| = |y - x|$$

Démonstration.

Pour la première égalité, on distingue trois cas :

- Si $x = 0$ est nul, alors $-x = 0$,
- Si $x > 0$, alors $-x < 0$ donc $x = -(-x)$,
- Si $x < 0$, alors $-x > 0$ donc $-x = -x$.

Pour la seconde égalité

Résultat

Pour tous x, y, nous avons

$$|x| = |-x| \qquad\qquad |x - y| = |y - x|$$

Démonstration.

Pour la première égalité, on distingue trois cas :

- Si $x = 0$ est nul, alors $-x = 0$,
- Si $x > 0$, alors $-x < 0$ donc $x = -(-x)$,
- Si $x < 0$, alors $-x > 0$ donc $-x = -x$.

Pour la seconde égalité, notons simplement que $x - y = -(y - x)$. $\square$

Contenu de la section

Exemple

Masse de Jupiter : 1 898 600 000 000 000 000 000 000 000 kg.

Problèmes :

- Même en tonne, on n'enlève que trois zéros.

Exemple

Masse de Jupiter : 1 898 600 000 000 000 000 000 000 000 kg.

Problèmes :

- Même en tonne, on n'enlève que trois zéros.
- Masse au kilogramme près ? !

Exemple

Masse de Jupiter : 1 898 600 000 000 000 000 000 000 000 kg.

Problèmes :

- Même en tonne, on n'enlève que trois zéros.
- Masse au kilogramme près ?!

Réponse

On utilise la *notation scientifique* : $m10^q$.

Exemple

Masse de Jupiter : 1 898 600 000 000 000 000 000 000 000 kg.

Problèmes :

- Même en tonne, on n'enlève que trois zéros.
- Masse au kilogramme près ?!

Réponse

On utilise la *notation scientifique* : $m10^q$.

Exemple

Voici les masses de quelques planètes de notre système solaire

Exemple

Masse de Jupiter : $1\,898\,600\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ kg.

Problèmes :

- Même en tonne, on n'enlève que trois zéros.
- Masse au kilogramme près ?!

Réponse

On utilise la *notation scientifique* : $m10^q$.

Exemple

Voici les masses de quelques planètes de notre système solaire

Planète	Masse (kg)
Jupiter	$1{,}8986 \cdot 10^{27}$

Exemple

Masse de Jupiter : 1 898 600 000 000 000 000 000 000 000 kg.

Problèmes :

- Même en tonne, on n'enlève que trois zéros.
- Masse au kilogramme près ?!

Réponse

On utilise la *notation scientifique* : $m10^q$.

Exemple

Voici les masses de quelques planètes de notre système solaire

Planète	Masse (kg)	Planète	Masse (kg)
Jupiter	$1{,}8986 \cdot 10^{27}$	Uranus	$8{,}6832 \cdot 10^{25}$

Exemple

Masse de Jupiter : 1 898 600 000 000 000 000 000 000 000 kg.

Problèmes :

- Même en tonne, on n'enlève que trois zéros.
- Masse au kilogramme près ?!

Réponse

On utilise la *notation scientifique* : $m10^q$.

Exemple

Voici les masses de quelques planètes de notre système solaire

Planète	Masse (kg)		
Jupiter	$1{,}8986 \cdot 10^{27}$	Uranus	$8{,}6832 \cdot 10^{25}$
Saturne	$5{,}6846 \cdot 10^{26}$		

Exemple

Masse de Jupiter : 1 898 600 000 000 000 000 000 000 000 kg.

Problèmes :

- Même en tonne, on n'enlève que trois zéros.
- Masse au kilogramme près ?!

Réponse

On utilise la *notation scientifique* : $m10^q$.

Exemple

Voici les masses de quelques planètes de notre système solaire

Planète	Masse (kg)		
Jupiter	$1{,}8986 \cdot 10^{27}$	Uranus	$8{,}6832 \cdot 10^{25}$
Saturne	$5{,}6846 \cdot 10^{26}$	Terre	$5{,}9736 \cdot 10^{24}$

Exemple

Masse de Jupiter : 1 898 600 000 000 000 000 000 000 000 kg.

Problèmes :

- Même en tonne, on n'enlève que trois zéros.
- Masse au kilogramme près ?!

Réponse

On utilise la *notation scientifique* : $m10^q$.

Exemple

Voici les masses de quelques planètes de notre système solaire

Planète	Masse (kg)		
Jupiter	$1{,}8986 \cdot 10^{27}$	Uranus	$8{,}6832 \cdot 10^{25}$
Saturne	$5{,}6846 \cdot 10^{26}$	Terre	$5{,}9736 \cdot 10^{24}$
Neptune	$1{,}0243 \cdot 10^{26}$		

Exemple

Masse de Jupiter : 1 898 600 000 000 000 000 000 000 000 kg.

Problèmes :

- Même en tonne, on n'enlève que trois zéros.
- Masse au kilogramme près ?!

Réponse

On utilise la *notation scientifique* : $m10^q$.

Exemple

Voici les masses de quelques planètes de notre système solaire

Planète	Masse (kg)		
Jupiter	$1{,}8986 \cdot 10^{27}$	Uranus	$8{,}6832 \cdot 10^{25}$
Saturne	$5{,}6846 \cdot 10^{26}$	Terre	$5{,}9736 \cdot 10^{24}$
Neptune	$1{,}0243 \cdot 10^{26}$	Vénus	$4{,}8685 \cdot 10^{24}$

Contenu de la section

Regardons un nombre x, et considérons x^2. Quelques valeurs :

Regardons un nombre x, et considérons x^2. Quelques valeurs :

x	x^2
0	0
0.10	0.01
0.50	0.25
0.90	0.81
0.99	0.9801
1	1
1.1	1.21
1.5	2.25
2	4
10	100

Regardons un nombre x, et considérons x^2. Quelques valeurs :

x	x^2
0	0
0.10	0.01
0.50	0.25
0.90	0.81
0.99	0.9801
1	1
1.1	1.21
1.5	2.25
2	4
10	100

Définition

Si t est un réel positif ou nul, sa *racine carrée*,

Regardons un nombre x, et considérons x^2. Quelques valeurs :

x	x^2
0	0
0.10	0.01
0.50	0.25
0.90	0.81
0.99	0.9801
1	1
1.1	1.21
1.5	2.25
2	4
10	100

Définition

Si t est un réel positif ou nul, sa *racine carrée*,notée $\sqrt{t}$,

Regardons un nombre x, et considérons x^2. Quelques valeurs :

x	x^2
0	0
0.10	0.01
0.50	0.25
0.90	0.81
0.99	0.9801
1	1
1.1	1.21
1.5	2.25
2	4
10	100

Définition

Si t est un réel positif ou nul, sa *racine carrée*,notée $\sqrt{t}$,est l'unique réel positif ou nul

Regardons un nombre x, et considérons x^2. Quelques valeurs :

x	x^2
0	0
0.10	0.01
0.50	0.25
0.90	0.81
0.99	0.9801
1	1
1.1	1.21
1.5	2.25
2	4
10	100

Définition

Si t est un réel positif ou nul, sa *racine carrée*,notée $\sqrt{t}$,est l'unique réel positif ou nuldont le carré vaut t.

Remarque

Si t est strictement positif,

Remarque

Si t est strictement positif, alors il existe exactement *deux* nombres dont le carré vaut t

Remarque

Si t est strictement positif, alors il existe exactement *deux* nombres dont le carré vaut t : $\sqrt{t}$ et $-\sqrt{t}$.

Remarque

Si t est strictement positif, alors il existe exactement *deux* nombres dont le carré vaut t : $\sqrt{t}$ et $-\sqrt{t}$.
Le premier est positif

Remarque

Si t est strictement positif, alors il existe exactement *deux* nombres dont le carré vaut t : $\sqrt{t}$ et $-\sqrt{t}$.
Le premier est positif, le second est négatif.

Remarque

Si t est strictement positif, alors il existe exactement *deux* nombres dont le carré vaut t : $\sqrt{t}$ et $-\sqrt{t}$.
Le premier est positif, le second est négatif.

On peut sans problème étendre ces raisonnements à x^3, x^4, etc.

Définition

Si t est un réel positif ou nul, sa *racine n^e*,

Remarque

Si t est strictement positif, alors il existe exactement *deux* nombres dont le carré vaut t : $\sqrt{t}$ et $-\sqrt{t}$.
Le premier est positif, le second est négatif.

On peut sans problème étendre ces raisonnements à x^3, x^4, etc.

Définition

Si t est un réel positif ou nul, sa *racine n^e*, notée $\sqrt[n]{t}$,

Remarque

Si t est strictement positif, alors il existe exactement *deux* nombres dont le carré vaut t : $\sqrt{t}$ et $-\sqrt{t}$.
Le premier est positif, le second est négatif.

On peut sans problème étendre ces raisonnements à x^3, x^4, etc.

Définition

Si t est un réel positif ou nul, sa *racine* n^{e}, notée $\sqrt[n]{t}$, est l'unique réel positif ou nul dont la puissance n^{e} vaut t.

Puissances et racines

Exemple

La notation $x^{1/3}$ a-t-elle du sens ?

Puissances et racines

Exemple

La notation $x^{1/3}$ a-t-elle du sens ? Non ! Mais

Puissances et racines

Exemple

La notation $x^{1/3}$ a-t-elle du sens ? Non ! Mais supposons que les règles précédentes restent valables, alors

Puissances et racines

Exemple

La notation $x^{1/3}$ a-t-elle du sens ? Non ! Mais supposons que les règles précédentes restent valables, alors

$$(x^{1/3})^3$$

Puissances et racines

Exemple

La notation $x^{1/3}$ a-t-elle du sens ? Non ! Mais supposons que les règles précédentes restent valables, alors

$$(x^{1/3})^3 = x^{3/3}$$

Puissances et racines

Exemple

La notation $x^{1/3}$ a-t-elle du sens ? Non ! Mais supposons que les règles précédentes restent valables, alors

$$(x^{1/3})^3 = x^{3/3} = x^1 = x$$

Puissances et racines

Exemple

La notation $x^{1/3}$ a-t-elle du sens ? Non ! Mais supposons que les règles précédentes restent valables, alors

$$(x^{1/3})^3 = x^{3/3} = x^1 = x$$

Dès lors, $x^{1/3}$ doit être la racine cubique de x !

Puissances et racines

Exemple

La notation $x^{1/3}$ a-t-elle du sens ? Non ! Mais supposons que les règles précédentes restent valables, alors

$$(x^{1/3})^3 = x^{3/3} = x^1 = x$$

Dès lors, $x^{1/3}$ doit être la racine cubique de x !

$$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

Puissances et racines

Exemple

La notation $x^{1/3}$ a-t-elle du sens ? Non ! Mais supposons que les règles précédentes restent valables, alors

$$(x^{1/3})^3 = x^{3/3} = x^1 = x$$

Dès lors, $x^{1/3}$ doit être la racine cubique de x !

$$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

Définition

Si p et q sont naturels, on définit $x^{p/q} := (\sqrt[q]{x})^p$.

Puissances et racines

Exemple

La notation $x^{1/3}$ a-t-elle du sens ? Non ! Mais supposons que les règles précédentes restent valables, alors

$$(x^{1/3})^3 = x^{3/3} = x^1 = x$$

Dès lors, $x^{1/3}$ doit être la racine cubique de x !

$$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

Définition

Si p et q sont naturels, on définit $x^{p/q} := (\sqrt[q]{x})^p$.

Remarque

- Cela coïncide avec la définition usuelle dès que p/q est un naturel.

Puissances et racines

Exemple

La notation $x^{1/3}$ a-t-elle du sens ? Non ! Mais supposons que les règles précédentes restent valables, alors

$$(x^{1/3})^3 = x^{3/3} = x^1 = x$$

Dès lors, $x^{1/3}$ doit être la racine cubique de x !

$$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

Définition

Si p et q sont naturels, on définit $x^{p/q} := (\sqrt[q]{x})^p$.

Remarque

- Cela coïncide avec la définition usuelle dès que p/q est un naturel.
- On peut définir x^r pour tout réel r dès que $x > 0$.

Résultat

Pour tous réels strictement positifs x, y, *et pour tous réels* a, b, *nous avons*

Résultat

Pour tous réels strictement positifs x, y, et pour tous réels a, b, nous avons

$$x^a > 0 \tag{0.3}$$

$$x^a y^a = (xy)^a \qquad x^a x^b = x^{a+b} \tag{0.4}$$

$$(x^a)^b = x^{ab} \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \tag{0.5}$$

Contenu de la section

Géométrie analytique

La géométrie analytique est une manière d'aborder des problèmes de géométrie

Géométrie analytique

La géométrie analytique est une manière d'aborder des problèmes de géométrie grâce à un ou plusieurs systèmes de coordonnées.

Géométrie analytique

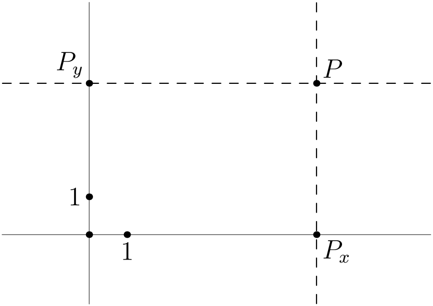
La géométrie analytique est une manière d'aborder des problèmes de géométrie grâce à un ou plusieurs systèmes de coordonnées.

Voyons dans le plan...

Coordonnées cartésiennes

Définition

Un repère cartésien est la donnée de deux axes sécants, et d'une unité sur chaque axe. L'intersection des axes est appelée l'origine. Les coordonnées cartésiennes d'un point P du plan sont alors obtenues en projetant ce point sur chacun des axes, et en repérant la projection par rapport à l'unité.



Ayant un système de coordonnées, nous avons donc l'équivalence entre

Ayant un système de coordonnées, nous avons donc l'équivalence entre

- les éléments de $\mathbb{R}^2$ et

Ayant un système de coordonnées, nous avons donc l'équivalence entre

- les éléments de $\mathbb{R}^2$ et
- les points du plan !

Contenu de la section

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut être vu comme un *point*,

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut être vu comme un *point*, il s′écrit avec n nombres réels appelés ses *coordonnées*,

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut être vu comme un *point*, il s′écrit avec n nombres réels appelés ses *coordonnées*, que nous notons généralement $(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut être vu comme un *point*, il s'écrit avec n nombres réels appelés ses *coordonnées*, que nous notons généralement $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.
Lorsque $n = 2$, les coordonnées sont appelées

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut être vu comme un *point*, il s'écrit avec n nombres réels appelés ses *coordonnées*, que nous notons généralement $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.
Lorsque $n = 2$, les coordonnées sont appelées l'abcisse et

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut être vu comme un *point*, il s'écrit avec n nombres réels appelés ses *coordonnées*, que nous notons généralement $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.
Lorsque $n = 2$, les coordonnées sont appelées l'abcisse et l'ordonnée

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut être vu comme un *point*, il s'écrit avec n nombres réels appelés ses *coordonnées*, que nous notons généralement $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.
Lorsque $n = 2$, les coordonnées sont appelées l'abcisse et l'ordonnée (souvent notées x et y)

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut être vu comme un *point*, il s'écrit avec n nombres réels appelés ses *coordonnées*, que nous notons généralement $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.
Lorsque $n = 2$, les coordonnées sont appelées l'abcisse et l'ordonnée (souvent notées x et y)

Exemple

Le point $(1, -1)$ de $\mathbb{R}^2$ désigne l'élément du plan

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut être vu comme un *point*, il s'écrit avec n nombres réels appelés ses *coordonnées*, que nous notons généralement $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.
Lorsque $n = 2$, les coordonnées sont appelées l'abcisse et l'ordonnée (souvent notées x et y)

Exemple

Le point $(1, -1)$ de $\mathbb{R}^2$ désigne l'élément du plan dont l'abcisse vaut 1 et l'ordonnée vaut -1.

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut aussi être vu comme un *vecteur,*

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut aussi être vu comme un *vecteur*, et ses constituants sont les *composantes* du vecteur.

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut aussi être vu comme un *vecteur*, et ses constituants sont les *composantes* du vecteur.

Remarque

Un vecteur représente un déplacement : une translation.

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut aussi être vu comme un *vecteur*, et ses constituants sont les *composantes* du vecteur.

Remarque

Un vecteur représente un déplacement : une translation.

Exemple

Le vecteur $(-1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut aussi être vu comme un *vecteur*, et ses constituants sont les *composantes* du vecteur.

Remarque

Un vecteur représente un déplacement : une translation.

Exemple

Le vecteur $(-1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ indique une translation dans la direction « Nord-Ouest » sur le plan.

Différence entre point et vecteur

La différence, fondamentale et intuitive, entre point et vecteur

Différence entre point et vecteur

La différence, fondamentale et intuitive, entre point et vecteur est que le premier représente un état, une position

Différence entre point et vecteur

La différence, fondamentale et intuitive, entre point et vecteur est que le premier représente un état, une position ; tandis que le second

Différence entre point et vecteur

La différence, fondamentale et intuitive, entre point et vecteur est que le premier représente un état, une position ; tandis que le second représente une évolution, un mouvement.

Remarque

Différence entre point et vecteur

La différence, fondamentale et intuitive, entre point et vecteur est que le premier représente un état, une position ; tandis que le second représente une évolution, un mouvement.

Remarque

Les deux sont représentés par des éléments de $\mathbb{R}^n$!

Contenu de la section

Un vecteur se représentera (dessinera) généralement par une flèche.

Un vecteur se représentera (dessinera) généralement par une flèche.
Le vecteur qui va du point **x** au point **y** se note généralement $\overrightarrow{xy}$.

Un vecteur se représentera (dessinera) généralement par une flèche. Le vecteur qui va du point **x** au point **y** se note généralement $\overrightarrow{xy}$. Ses composantes sont alors données

Un vecteur se représentera (dessinera) généralement par une flèche. Le vecteur qui va du point **x** au point **y** se note généralement $\overrightarrow{xy}$. Ses composantes sont alors données en prenant la différence entre les coordonnées du point d'arrivée et du point de départ

Un vecteur se représentera (dessinera) généralement par une flèche. Le vecteur qui va du point $\mathbf{x}$ au point $\mathbf{y}$ se note généralement $\overrightarrow{xy}$. Ses composantes sont alors données en prenant la différence entre les coordonnées du point d'arrivée et du point de départ : $\mathbf{y} - \mathbf{x}$.

Un vecteur se représentera (dessinera) généralement par une flèche. Le vecteur qui va du point **x** au point **y** se note généralement $\overrightarrow{xy}$. Ses composantes sont alors données en prenant la différence entre les coordonnées du point d'arrivée et du point de départ : $\mathbf{y} - \mathbf{x}$.

Un vecteur est généralement basé en un point.

Un vecteur se représentera (dessinera) généralement par une flèche.
Le vecteur qui va du point **x** au point **y** se note généralement $\overrightarrow{xy}$. Ses composantes sont alors données en prenant la différence entre les coordonnées du point d'arrivée et du point de départ : $\mathbf{y} - \mathbf{x}$.
Un vecteur est généralement basé en un point. On parle de vecteur lié.

Un vecteur se représentera (dessinera) généralement par une flèche. Le vecteur qui va du point **x** au point **y** se note généralement $\overrightarrow{xy}$. Ses composantes sont alors données en prenant la différence entre les coordonnées du point d'arrivée et du point de départ : $\mathbf{y} - \mathbf{x}$.
Un vecteur est généralement basé en un point. On parle de vecteur lié.
Lorsqu'on donne un vecteur est donné sans point de départ

Un vecteur se représentera (dessinera) généralement par une flèche. Le vecteur qui va du point $\mathbf{x}$ au point $\mathbf{y}$ se note généralement $\overrightarrow{xy}$. Ses composantes sont alors données en prenant la différence entre les coordonnées du point d'arrivée et du point de départ : $\mathbf{y} - \mathbf{x}$.
Un vecteur est généralement basé en un point. On parle de vecteur lié. Lorsqu'on donne un vecteur est donné sans point de départ (par exemple uniquement ses composantes)

Un vecteur se représentera (dessinera) généralement par une flèche. Le vecteur qui va du point $\mathbf{x}$ au point $\mathbf{y}$ se note généralement $\overrightarrow{xy}$. Ses composantes sont alors données en prenant la différence entre les coordonnées du point d'arrivée et du point de départ : $\mathbf{y} - \mathbf{x}$.
Un vecteur est généralement basé en un point. On parle de vecteur lié. Lorsqu'on donne un vecteur est donné sans point de départ (par exemple uniquement ses composantes) on peut parler de vecteur libre

Un vecteur se représentera (dessinera) généralement par une flèche. Le vecteur qui va du point $\mathbf{x}$ au point $\mathbf{y}$ se note généralement $\overrightarrow{xy}$. Ses composantes sont alors données en prenant la différence entre les coordonnées du point d'arrivée et du point de départ : $\mathbf{y} - \mathbf{x}$.
Un vecteur est généralement basé en un point. On parle de vecteur lié. Lorsqu'on donne un vecteur est donné sans point de départ (par exemple uniquement ses composantes) on peut parler de vecteur libre. Par exemple "nord-ouest" est la direction donné par le vecteur $(-1, 1)$.

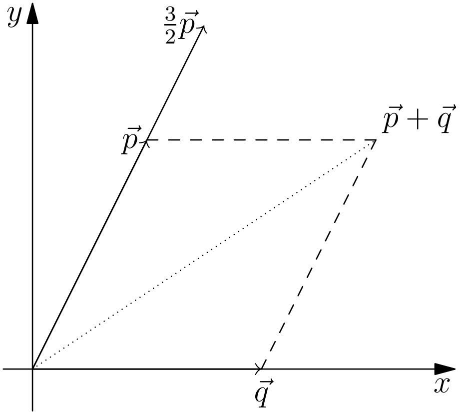
Contenu de la section

Si $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ sont des éléments de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit

Si $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ sont des éléments de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$(x_1, \ldots, x_n) - (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$$
$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

- la somme de deux vecteurs est donnée par la règle du parallélogramme ;
- la multiplication par un réel (on dira aussi « par un *scalaire* ») multiplie la longueur.



- la différence de deux *points* est un vecteur allant du second vers le premier : $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ est le vecteur $\overrightarrow{qp}$;
- la somme d'un *point* et d'un *vecteur* représente un déplacement à partir de ce point dans la direction du vecteur donné : le résultat est un point ;
- la somme de deux ou plusieurs *vecteurs* représente la composée de déplacements successifs : le résultat est un vecteur.

Exemple

Si on considère $\mathbf{p} = (1,2)$ comme un point, et $\overrightarrow{w} = (1,-1)$ comme un vecteur (donnant la direction « Nord-Ouest »), alors on conçoit leur somme $\mathbf{p} + \overrightarrow{w} = (1,2) + (1,-1) = (2,1)$ comme le point obtenu en translatant le point de départ, $\mathbf{p}$, dans la direction donnée $\overrightarrow{w}$.

Définition

L'élément particulier $(0,0,\ldots,0)$ se note $\overrightarrow{0}$ et est appelé *vecteur nul*.

Résultat

Quel que soit le vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, *nous avons*

$$x + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + x = x.$$

Regardons le cas $n = 3$.

Regardons le cas $n = 3$.
Si nous notons $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0) \qquad \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0) \qquad \overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1)$$

Regardons le cas $n = 3$.
Si nous notons $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{e_1} = (1,0,0) \qquad \overrightarrow{e_2} = (0,1,0) \qquad \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$$

alors tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire $x_1 \overrightarrow{e_1} + x_2 \overrightarrow{e_2} + x_3 \overrightarrow{e_3}$.

Regardons le cas $n = 3$.

Si nous notons $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{e_1} = (1,0,0) \qquad \overrightarrow{e_2} = (0,1,0) \qquad \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$$

alors tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire $x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + x_3\,\overrightarrow{e_3}$.

On peut généraliser à d'autres valeurs de n

Regardons le cas $n = 3$.
Si nous notons $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{e_1} = (1,0,0) \qquad \overrightarrow{e_2} = (0,1,0) \qquad \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$$

alors tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire $x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + x_3\,\overrightarrow{e_3}$.
On peut généraliser à d'autres valeurs de n

Remarque

Attention, ici $\overrightarrow{e_1}$ et ses compagnons ne sont pas les composante d'un hypothétique vecteur e, mais des vecteurs eux-même ! Pour l'exemple, x_1 et $\overrightarrow{e_1}$ ont donc des rôles fondamentalement différents : le premier est un réel (ou « scalaire »), le second est un vecteur.

Contenu de la section

Définition

Le *produit scalaire* entre deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^n$ est donné par
$$\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \right\rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n.$$

Résultat

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, le produit scalaire vérifie les propriétés suivantes :

1. $\left\langle (\lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{a'}), \overrightarrow{b} \right\rangle = \lambda \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle + \mu \left\langle \overrightarrow{a'}, \overrightarrow{b} \right\rangle$ *(linéaire à gauche)*
2. $\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \right\rangle$ *(symétrique)*
3. $\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \right\rangle \geq 0$ *et de plus,* $\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \right\rangle = 0 \iff \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *(défini positif).*

Notons que les deux premières propriétés montrent qu'il y a également linéarité à droite ; on dit alors que le produit scalaire est *bilinéaire*.