Contenu de la section

Information

Guidance en mathématiques

Dans quel but ?

- Répondre à vos **questions**
  - sur le cours de maths, et
  - sur les pré-requis.
- Vous **ré-expliquer** la matière.
- Vous guider dans les **exercices** du cours.

Information

Guidance en mathématiques

Organisation

- Des permanences durant les semaines de cours :
  - en petit comité
  - Dès lundi, sur les temps de midi (12h–14h).
  - sur le campus Plaine (au bâtiment A)
  - par des personnes externes au cours ;
  - on vous demande votre section à des fins statistiques, et c'est tout.
- Des permanences pendant les blocus.
- Par email : gmath@ulb.ac.be

Information

Guidance en mathématiques

En pratique ?

- Inscrivez-vous au cours MATHY029 (« Aide à la réussite en mathématiques ») sur l'Université Virtuelle.
- Venez !

Calcul en composantes

Rappels

- les composantes du vecteur allant de **a** à **b** sont données par la différence entre
  1. les coordonées du point d'arrivée, avec
  2. les coordonées du point de départs.

$$\overrightarrow{ab} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

- La somme d'un point avec un vecteur basé en ce point est égal au point translaté par le vecteur : $\mathbf{a} + \overrightarrow{ab} = \mathbf{b}$
- La somme de deux vecteurs basés au même point est un vecteur basé en ce point, dont le point d'arrivée est donné par la règle du parallélogramme.

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ad}$$

- Un point **a** donné en coordonnées peut toujours être interprété comme le vecteur qui part de l'origine jusqu'à **a** : $\overrightarrow{oa} = \mathbf{a} - \mathbf{o}$.

Applications

Milieu

Le milieu d'un segment de $\mathbf{a}$ jusqu'à $\mathbf{b}$ est donné par :

$$\mathbf{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

Le *milieu* ou *centre de gravité* des points $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ est donné par :

$$\mathbf{g} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Résultat

Le centre de gravité est le seul point $\mathbf{g}$ *qui vérifie*

$$\sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{ga_i} = 0$$

Démonstration.

Supposons que $\mathbf{h}$ vérifie la même relation. Alors

$$\sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{ga_i} = \sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{ha_i}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{a_i} - \mathbf{g} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{a_i} - \mathbf{h}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{h} - \mathbf{g} = 0$$

c'est-à-dire $k(\mathbf{h} - \mathbf{g}) = 0$, donc $\mathbf{h} = \mathbf{g}$. □

Résultat (Rappel – Pythagore)

Dans le plan, la longueur du segment de $\mathbf{a}$ *à* $\mathbf{b}$ *est donnée par* $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

Définition

En général, on appelle la *norme* d'un vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ la quantité :

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

Exemple

La norme du vecteur $(4, 2, 4)$ est $\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$.

Contenu de la section

Équations d'objets

Remarque

- Chaque point du plan a deux coordonnées cartésiennes.
- Une équation peut admettre plusieurs solutions.
- Une équation de deux variables peut admettre plusieurs solutions.
- On peut dessiner dans le plan un ensemble de point dont les coordonnées vérifient une équation de deux variables.

Équation d'une droite

Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite admet une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

c'est-à-dire les points (x, y) vérifiant l'équation ci-dessus sont exactement les points de la droite. Les constantes a, b, c permettent de décrire la droite (position, direction).

Justification

Soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. La droite de $\mathbb{R}^n$ passant par $\mathbf{p}$ dans la direction $\overrightarrow{v}$ est l'ensemble des points $\mathbf{x}$ de la forme

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\overrightarrow{v} \qquad t \in \mathbb{R} \quad = \text{équations paramétriques de la droite}$$

Pour $n = 2$, on écrit $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$.
Alors

$$x_1 = p_1 + tv_1 \quad \text{et} \quad x_2 = p_2 + tv_2.$$

donc

$$x_1 - p_1 = tv_1 \quad \text{et} \quad x_2 - p_2 = tv_2.$$

On a alors

$$(x_1 - p_1)v_2 = (x_2 - p_2)v_1$$

c'est-à-dire, en changeant de notations

$$ax + by + c = 0$$

(on pose : $a = v_2$, $b = -v_1$ et $c = p_2 v_1 - p_1 v_2$).

Remarquons que la droite d'équation $ax + by + c = 0$

- est verticale si $b = 0$, $a \neq 0$.
- est horizontale si $a = 0$, $b \neq 0$.
- passe par l'origine si $c = 0$
- identique à la droite d'équation $kax + kby + kc = 0$ pour n'importe quelle constante $k \neq 0$.

Lorsque $b \neq 0$ (droite non-verticale), on peut ré-écrire l'équation en isolant y :

$$y = mx + p$$

Considérons une droite d'équation

$$y = mx + p$$

- le coefficient m est appelé la pente (ou coefficient angulaire) de la droite.
- Le coefficient p est appelé l'ordonnée à l'origine.

Si la droite passe par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2), la pente s'obtient en faisant :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \Delta \text{ pour différence.}$$

Exercice

Remplacez y_1 et y_2 par $mx_1 + p$ et $mx_2 + p$ pour le prouver. Notons que cela ne dépend pas des points choisis (tant qu'ils sont sur la droite).

Équations de cercles

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et $r > 0$. Le cercle de centre (a,b) et de rayon r a pour équation :

$$\|(x,y)-(a,b)\| = r$$

c'est-à-dire

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Contenu de la section

La trigonométrie c'est l'étude des triangles.
Plus spécifiquement, l'étude des liens entre

- la mesure des angles, et
- la mesure des côtés.

Question

Comment mesurer des angles ?

Contenu de la section

Intuitivement, un angle est une fraction de « faire un tour complet ». Pour le mesurer, on peut donner un nombre réel décrivant le nombre de tour complets. Mais généralement on utilisera

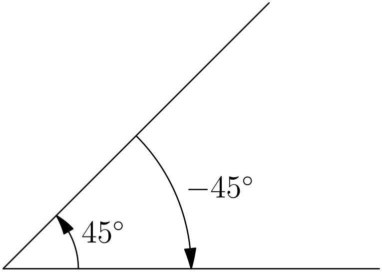
- le degré (1 tour = 360 degrés), ou
- le radian (1 tour = 2π radians)

Le radian sera notre choix !

Attention à

- Faire un tour et demi (3π) correspond à la même position finale que faire un demi tour (π).
  $\Rightarrow$ on parlera souvent de mesure « à 2π près ».
- Faire un demi tour dans un sens ou dans l'autre n'est pas pareil.
  $\Rightarrow$ on parle d'angle orienté lorsque cela est important !
  Dans le plan :

  Orientation positive Sens anti-horlogique
  Orientation négative Sens horlogique

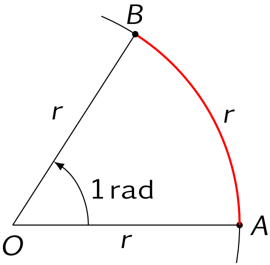

$-45°$
$45°$

Contenu de la section

Pourquoi deux pis ?

Pourquoi 2π ?

Un *radian* (1 rad) correspond à l'angle au centre d'un cercle qui intercepte, sur la circonférence, un arc dont la longueur est égale au rayon du cercle.



Le radian est idéal pour manipuler des longueurs d'arcs !

Pour passer du radian au degré et inversement, retenons que $2\pi\,\text{rad} = 360^\circ$. Par habitude, nous retiendrons également le tableau suivant :

en radians	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π
en degrés	30°	45°	60°	90°	180°	360°

Contenu de la section

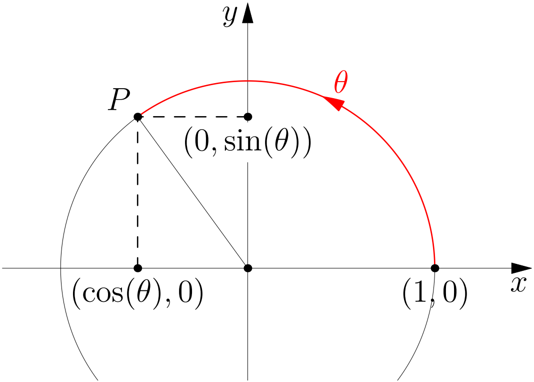
Définition

Étant donné un angle θ en radians, on définit son cosinus et son sinus comme les coordonnées du point P_θ tel que l'angle $\widehat{IOP}$ est de mesure θ, où $I = (1,0)$ et $O = (0,0)$.

Cercle trigonométrique

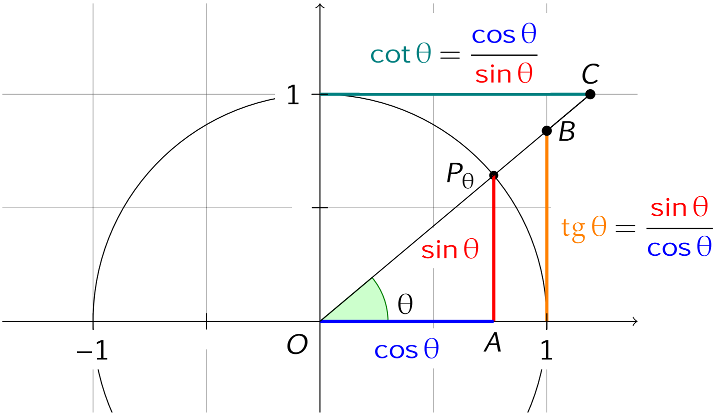
Définition

Un *cercle trigonométrique* est un cercle de rayon 1, il permet de représenter géométriquement toutes les fonctions trigonométriques.



Autres fonctions trigonométriques :

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \qquad \cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$



$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$
C
1
B
P_θ
$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
$\sin\theta$
θ
-1
O
$\cos\theta$
A
1

Pente et angle

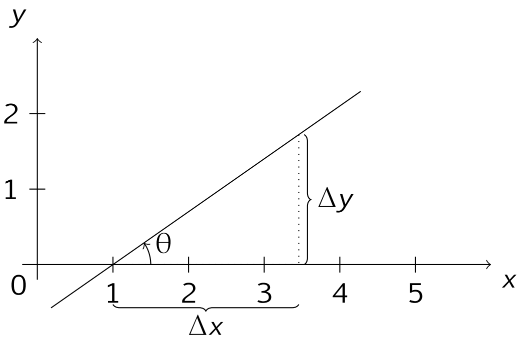
Résultat

Étant donné un repère cartésien orthonormé. Pour une droite d'équation $y = mx + p$ formant un angle (orienté) θ avec l'horizontale, nous avons

$$m = \tan\theta$$

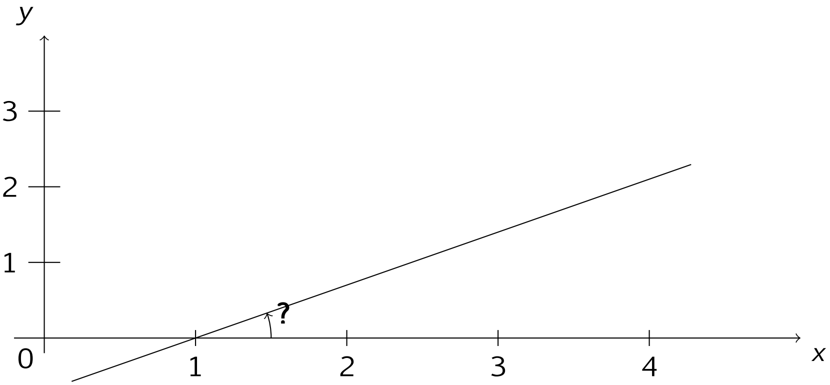
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

où (x_0, y_0) et (x_1, y_1) sont deux points distincts du graphe de f.



Remarque

Cette interprétation ne tient plus si les axes ne sont pas gradués à l'identique :

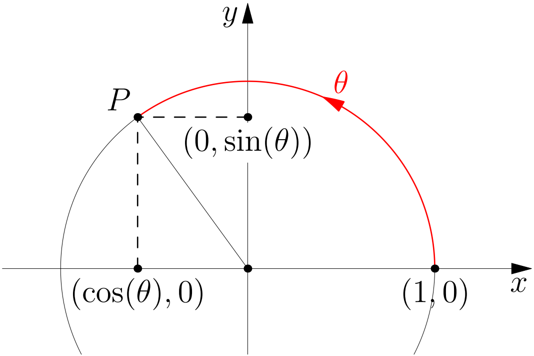


Angles remarquables

Voici quelques valeurs importantes des fonctions sinus et cosinus :

$$
\begin{array}{c|cc|c|c|c}
\hline
\text{angle} & \sin & & \cos & \tan & \cot \\
\hline
0 & \sqrt{0}/2 & = 0 & 1 & 0 & \nexists \\
\pi/6 & \sqrt{1}/2 & = 1/2 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3} \\
\pi/4 & \sqrt{2}/2 & & \sqrt{2}/2 & 1 & 1 \\
\pi/3 & \sqrt{3}/2 & & 1/2 & \sqrt{3} & \sqrt{3}/3 \\
\pi/2 & \sqrt{4}/2 & = 1 & 0 & \nexists & 0 \\
\hline
\end{array}
\tag{1.6}
$$

Contenu de la section

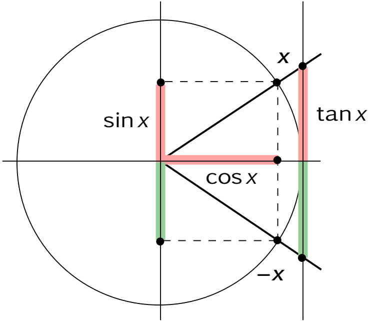


Le théorème de Pythagore appliqué dans le cercle trigonométrique implique l'importante relation $(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1$, ce qu'on écrira plus souvent sous la forme

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

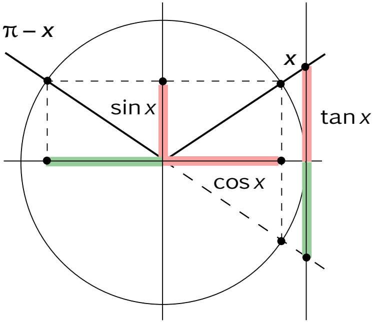
Contenu de la section

Symétrie par rapport à l'axe des abscisses



$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

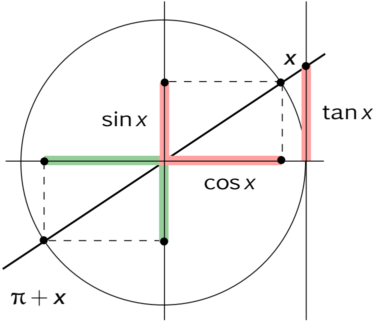


$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$$

Symétrie par rapport à l'origine

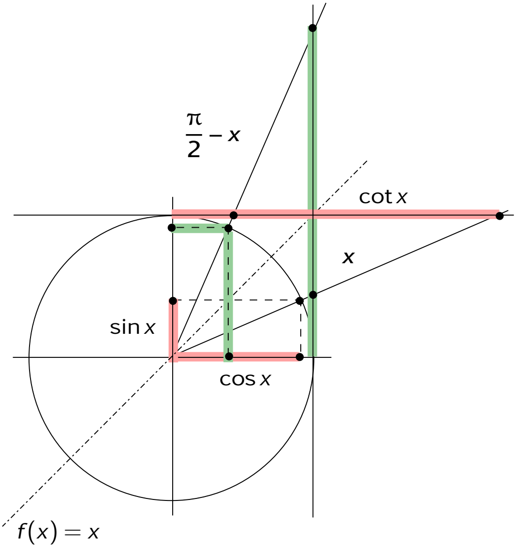


$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\tan(\pi + x) = \tan(x)$$

Symétrie par rapport à la première bissectrice

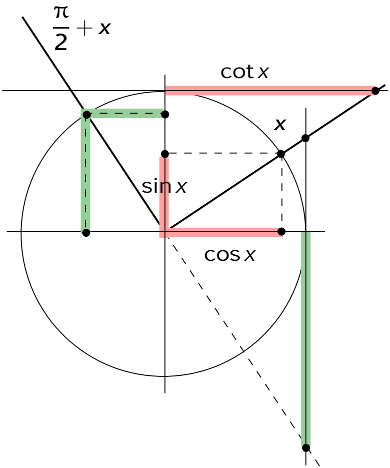


$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$$

Angles décalés de 90°



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot(x)$$

Contenu de la section

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$
$$\cos A \cos B = \frac{\cos(A-B) + \cos(A+B)}{2}$$
$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2}$$
$$\sin A \cos B = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{2}$$
$$\cos A \sin B = \frac{\sin(A+B) - \sin(A-B)}{2}$$
$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$