

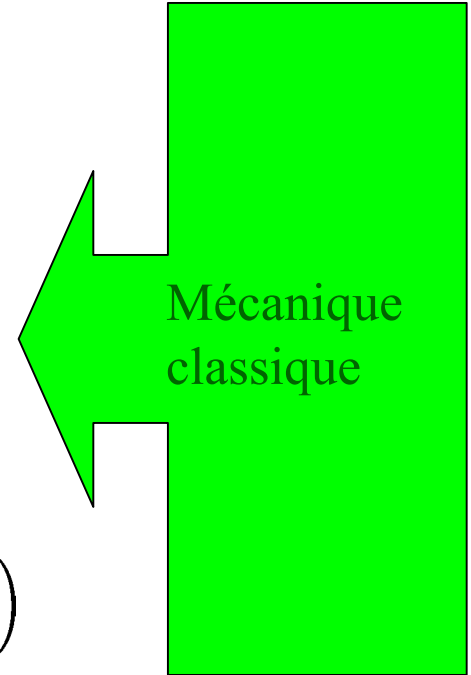
- Energie du Vide
  - Mécanique quantique
  - Bosons
  - Fermions
  - Un argument pour la Supersymétrie
- Contenu Minimal
  - Fermion chiral
  - Choix de phase local – global?
  - Structure topologique?
  - Interactions de jauge
  - Problème des Anomalies
    - Fermions supplémentaires et/ou
    - Groupes d'unification
    - Nombre baryonique

L'Energie du vide: *rappel de la situation en mécanique quantique.*

$$L = T - V = \frac{1}{2} (m\dot{q}^2 - kq^2)$$

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

$$H = \frac{1}{2} \left[ \frac{p^2}{m} + kq^2 \right] = T + V$$



$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} \left( a(\omega) e^{-i\omega t} + a^\dagger(\omega) e^{i\omega t} \right)$$

Il s'agit ici de simples coefficients complexes conjugués

L'Energie du vide: *rappel de la situation en mécanique quantique.*

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} \left( a(\omega) e^{-i\omega t} + a^\dagger(\omega) e^{i\omega t} \right)$$

$$[q(t), p(t)] = i\hbar$$



$$(\hbar = 1)$$

$$[a(\omega), a^\dagger(\omega)] = 1$$

Opérateurs

Quantification

$$H = \omega \left( a^\dagger(\omega) a(\omega) + \frac{1}{2} \right)$$

# L'Energie du vide: *rappel de la situation en mécanique quantique.*

pour rappel:

$$\begin{aligned}
 a_{(\omega)} |0\rangle &= 0 \\
 a_{(\omega)}^\dagger |0\rangle &= |\omega\rangle \\
 a_{(\omega)}^\dagger \dots a_{(\omega)}^\dagger |0\rangle &= |\omega, \dots \omega\rangle
 \end{aligned}$$

et nous avons l'opérateur de comptage:

$$a_{(\omega)}^\dagger a_{(\omega)} |\omega, \dots \omega\rangle = N |\omega, \dots \omega\rangle$$

L'Energie du vide: *rappel de la situation en mécanique quantique.*

$$H = \omega \left( a^\dagger(\omega) a(\omega) + \frac{1}{2} \right)$$

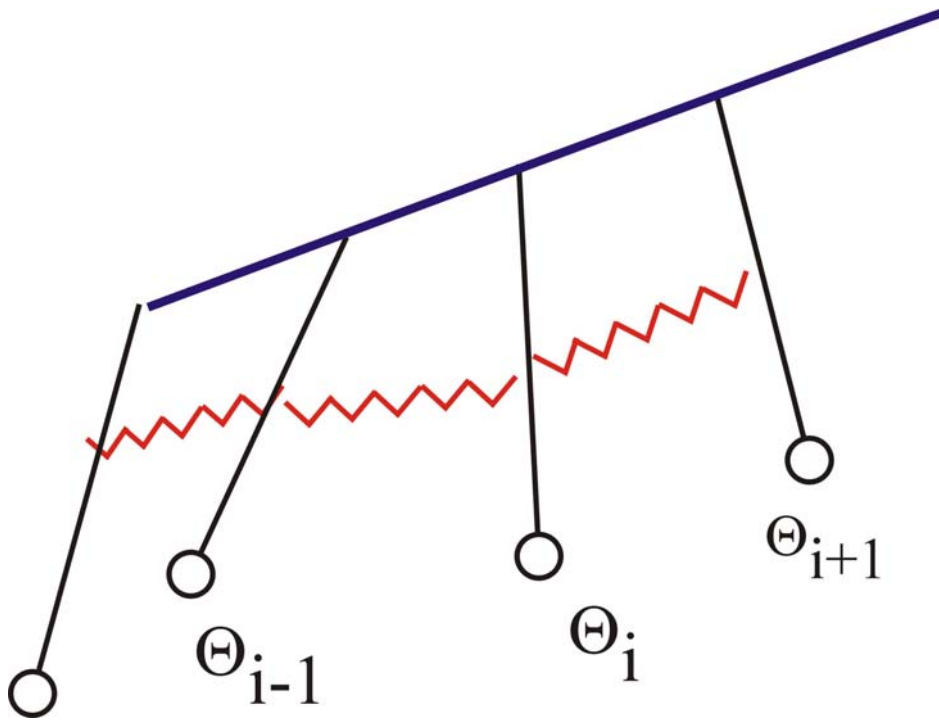
Compteur d'états

Energie  
du  
Vide

$$H = \frac{1}{2} \left[ \frac{p^2}{m} + kq^2 \right] = T + V$$

p et q ne peuvent s'annuler  
simultanément, du fait des  
incertitudes d'Heisenberg!

# L'Energie du vide: *passage à la théorie des champs - bosons.*



Pour des oscillateurs individuels faiblement couplé, on pourrait penser à une énergie du vide comme  $\Sigma \frac{1}{2} \omega_i$

mais il est plus commode de raisonner en termes de « modes normaux », qui sont à la base de la théorie des champs.

$$V_i = mgh_i + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l^2 K \left( (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 + (\theta_{i-1} - \theta_i)^2 \right)$$

# L'Energie du vide: *passage à la théorie des champs - bosons.*

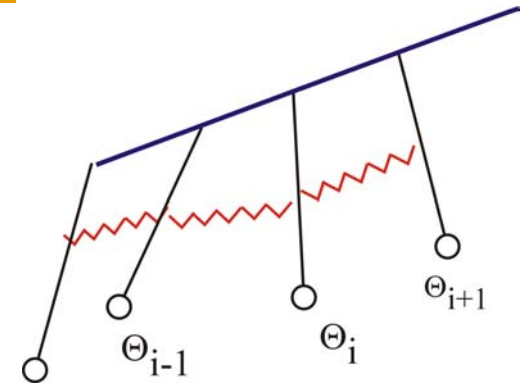
Passage au continu:

$$\theta_i(t) \rightarrow \theta_x(t) \rightarrow \theta(x, t)$$

$$m = \mu a$$

$$K \Delta x \rightarrow k$$

$$\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{a} \Rightarrow \frac{\theta(x+a, t) - \theta(x, t)}{a} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t)$$



$$L = l^2 \int \left( \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - \frac{\mu g}{l} \cdot (1 - \cos \theta)(x, t) - \frac{1}{2} k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right) dx$$

$$= L(\theta, \partial_t \theta, \partial_x \theta) = \int \mathcal{L}(\theta, \partial_t \theta, \partial_x \theta) dx$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\theta, \partial_t \theta, \partial_x \theta)$$

$$L = l^2 \int \left( \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - \frac{\mu g}{l} (1 - \cos \theta)(x, t) - \frac{1}{2} k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right) dx$$

Les équations du mouvement donnent pour petit  $\theta$

$$\mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\mu g \theta}{l} = 0 \quad (1)$$

Si l'on ignore le dernier terme, on retrouve évidemment l'équation d'onde avec

$$v = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (2)$$

et les modes propres sont donc des ondes planes.

# L'Energie du vide: *passage à la théorie des champs - bosons.*

Si l'on veut maintenant écrire un Lagrangien invariant relativiste, (en posant  $c=1$ ), on ne peut choisir la force du couplage! Par ailleurs, un terme quadratique en  $\theta$  est aussi permis, il correspond dans notre image à la force de rappel due à la pesanteur

$$L = l^2 \int \left( \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - \frac{\mu g}{l} \cdot 1 - \cos \theta (x, t) - \frac{1}{2} k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right) dx$$

$$L = \int \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \theta^2 \right) dx$$

Le facteur  $\frac{1}{2}$  est une particularité du champ réel, il est plus facile de traiter le champ complexe, pour lequel on obtiendra, à 3+1 dim.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{KG} &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \\ L &= \int \mathcal{L} d^3x \end{aligned}$$

Le développement en modes propres (ondes planes) donne:

$$\phi = \sum_{k^0 = \pm\omega} \int d^3k N(k) a_{\vec{k}, k^0} e^{-ikx}$$

Ce qui crée des états d'énergie positive ou négative !

$$a_{\vec{k}, k^0}^\dagger |0\rangle = |\vec{k}, k^0\rangle$$

La **destruction de particules d'énergie négative** est réinterprétée comme **création d'antiparticules d'énergie positive**

$$a_{\vec{k}, -\omega} \longrightarrow b_{-\vec{k}, \omega}^\dagger$$

$$\phi = \int d^3k N(k) \left( a_{\vec{k}, \omega} e^{-ikx} + b_{\vec{k}, \omega}^\dagger e^{ikx} \right)$$

$$H = \int \mathcal{H} d^3x = \int d^3k (2\pi)^3 N^2(k) 2\omega_k^2 (a_k^\dagger a_k + b_k b_k^\dagger)$$

En identifiant cette expression à l'énergie du système, nous extrayons un nombre considérable d'informations:

-la normalisation N est fixée à  $N(k) = ((2\pi)^3 2\omega_k)^{-1/2}$

-les prescriptions de **commutation** sont imposées pour ré-écrire le dernier terme comme un opérateur de comptage

-on obtient une énergie du vide **similaire à celle de l'oscillateur harmonique**, mais cette fois pour chacun des modes.

$$\begin{aligned} [b_k, b_p^\dagger] &= \delta^3(k - p) \\ b_k b_p^\dagger &\rightarrow b_p^\dagger b_k + \delta^3(k - p) \end{aligned}$$

Si l'on se contente  
d'un domaine compact,  
on peut remplacer l'intégrale  
par une somme de Fourier:

$$\begin{aligned} H &= \sum_k \omega_k (a_k^\dagger a_k + b_k^\dagger b_k + 1) \\ &= \sum_k \omega_k ((a_k^\dagger a_k + 1/2) + (b_k^\dagger b_k + 1/2)) \end{aligned}$$

Ce qui montre une énergie de point zéro pour chacun des modes propres, particules et antiparticules.

La somme porte sur une infinité dénombrable de termes pour un domaine compact, -- les termes croissent toutefois avec  $k$  --,

**mais à une singularité  $\int \delta(0) d^3k$  pour un espace infini.**

# L'Energie du vide: *passage à la théorie des champs - Fermions.*

Un calcul similaire au précédent fournit, pour un champ fermionique chiral (sans masse, pour le moment), correspondant à un spineur de Dirac:


$$\psi(x,t) = \sum_s \int d^3k N'(k) \left( a_{\vec{k},s} u(\vec{k},s) e^{-ikx} + b_{\vec{k},s}^\dagger v(\vec{k},s) e^{ikx} \right)$$

Mais le plus petit bloc possible pour notre construction (la représentation la plus petite du groupe de Lorentz) est constituée par un spineur de Weyl (ou de Majorana) à **2 composantes**.

Par exemple, on peut choisir  $\psi_L$ , qui décrit une particule polarisée à gauche ( $h=-1/2$ ), ET son antiparticule polarisée à droite. Dans ce cas, la somme sur les spins disparaît!

$$\psi_L(x,t) = \int d^3k N'(k) \left( a_{\vec{k},h=-\frac{1}{2}} u(\vec{k},h=-\frac{1}{2}) e^{-ikx} + b_{\vec{k},h=\frac{1}{2}}^\dagger v(\vec{k},h=\frac{1}{2}) e^{ikx} \right)$$

Il vient, après normalisation:

$$H = \int d^3k \omega_k \left( a_{k,h=-\frac{1}{2}}^\dagger a_{k,h=-\frac{1}{2}} - b_{k,h=\frac{1}{2}} b_{k,h=\frac{1}{2}}^\dagger \right)$$


$$H = \int d^3k \omega_k \left( a_{k,h=-\frac{1}{2}}^+ a_{k,h=-\frac{1}{2}} - b_{k,h=\frac{1}{2}} b_{k,h=\frac{1}{2}}^+ \right)$$

Ce signe est essentiel, et impose, pour restaurer une énergie positive, de choisir l'anticommutation des opérateurs !

Pour un volume fini,

$$b_{q,h=\frac{1}{2}} b_{k,h=\frac{1}{2}}^+ = -b_{k,h=\frac{1}{2}}^+ b_{q,h=\frac{1}{2}} + \delta_{k,q}$$

Pour un espace infini,

$$\{b_{q,s} b_{k,s'}^+\} = \delta^3(k - q) \delta_{s,s'}$$

$$\{b_{q,s} b_{k,s'}^+\} = \delta^3(k - q) \delta_{s,s'}$$

C'est, bien sûr, le principe de Fermi qui en découle, mais aussi:  
(retournant à un volume fini, pour éviter des singularités supplémentaires)

$$H = \sum_k \omega_k \left( (a_{k,-\frac{1}{2}}^+ a_{k,-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}) + (b_{k,\frac{1}{2}}^+ b_{k,\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}) \right)$$

La contribution des modes fermioniques à l' **Energie du Vide** est donc **négative et infinie** .

Comme pour les bosons, on a une série divergente pour un volume fini, ou une  $\int \delta(0)$  pour un espace infini.

# L'Energie du vide: *vers la supersymétrie ?*

Pour un scalaire complexe:

$$H = \sum_k \omega_k \left( (a_k^\dagger a_k + 1/2) + (b_k^\dagger b_k + 1/2) \right)$$

Pour un semi-spineur (fermion chiral)

$$H = \sum_k \omega_k \left( (a_{k,-\frac{1}{2}}^\dagger a_{k,-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}) + (b_{k,\frac{1}{2}}^\dagger b_{k,\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}) \right)$$

L'association des deux particules conduit à une énergie du vide:  $\sum_k (\omega_{k,\text{boson}} - \omega_{k,\text{fermion}})$ . Pour des particules sans masse, la compensation est donc parfaite: **il suffit d'avoir le même nombre de degrés de liberté fermioniques et bosoniques.**

# L'Énergie du vide: *vers la supersymétrie ?*

L'association des deux particules conduit à une énergie du vide:  $\sum_k (\omega_{k,\text{boson}} - \omega_{k,\text{fermion}})$ . Pour des particules sans masse, la compensation est donc parfaite: **il suffit d'avoir le même nombre de degrés de liberté fermioniques et bosoniques.**

Si l'on généralise au cas de particules massives, il faut toutefois que les masses de bosons et fermions soient strictement égales ....ce qui n'est manifestement pas réalisé dans la nature.

$$\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

Un scalaire complexe massif : 2 degrés de liberté \*  $\frac{1}{2} \sum_k \omega_k$

Un boson vectoriel réel (sans masse) , par ex. le photon : idem

Un boson vectoriel massif réel: 3 degrés de liberté

Un fermion chirale : 2 degrés de liberté , \*  $-\frac{1}{2} \sum_k \omega_k$

Un fermion de Dirac : 4 degrés de liberté

Exemples de combinaisons rencontrées en supersymétrie:

-multiplet chirale : un fermion à 2 composantes + un scalaire complexe

-multiplet vectoriel : un vecteur sans masse + un fermion à 2 comp.

-Supersym; N=2 : vecteur + fermion + fermion + scalaire

## Remarques:

- Pour la physique des particules, l'annulation de l'énergie de point zéro (ou même le fait de la rendre finie) n'est en rien une exigence.
- On peut en particulier y parvenir formellement, en ajoutant simplement la quantité de champs nécessaire, sans les coupler au secteur visible: c'est évidemment purement formel,
- Ou encore définir l'énergie dans « l'ordre normal », c-à-d, soustraire l'énergie du vide...

• **PAR CONTRE**, un couplage éventuel à la gravité implique toutes les particules,  
et on s'attend à ce qu'il soit sensible à l'énergie du vide ...

- Energie du Vide
  - Mécanique quantique
  - Bosons
  - Fermions
  - Un argument pour la Supersymétrie
- Contenu Minimal
  - Fermion chiral
  - Choix de phase local – global?
  - Structure topologique?
  - Interactions de jauge
  - Problème des Anomalies
    - Fermions supplémentaires et/ou
    - Groupes d'unification
    - Nombre baryonique

La plus petite représentation du groupe de Lorentz est donnée par un semi-spineur, c'ad, un fermion à deux composantes, par commodité, nous choisirons de le noter :  $\psi_L$

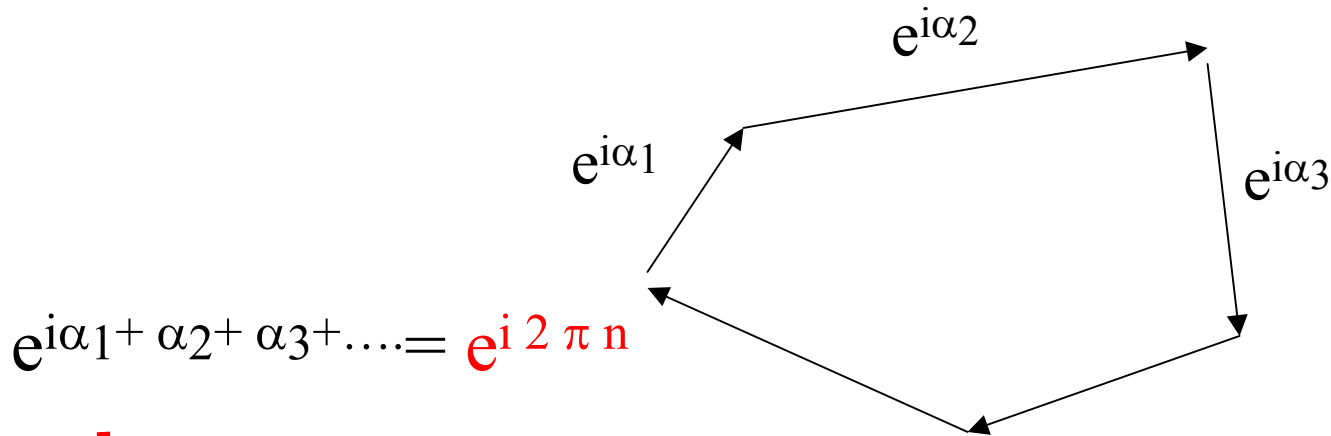
Seul le courant est observable

$$\overline{\psi_L} \gamma^\mu \psi_L = \psi_L^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi_L$$

On peut donc redéfinir arbitrairement la phase de  $\psi$ :

$$\psi_L \rightarrow e^{i\alpha} \psi_L$$

La redéfinition des phases peut toutefois relever des propriétés topologiques du « vide », par exemple, un « fond » multiplement connexe.



C'est aussi le cas sur un intervalle fini: conditions au bord périodiques, antipériodiques, ....

Solutions topologiques non triviales pour les champs de jauge (cf. cours Jean Iliopoulos)

$$\psi_L \rightarrow e^{i\alpha} \psi_L$$

Si une redéfinition local paraît justifiée, elle n'est permise par le Lagrangien qu'au prix d'introduire des champs de jauge... $A^\mu$

$$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu - gA^\mu$$

Un des « blocs » minimaux pour décrire des interactions serait donc constitué

- d'un spineur à deux composantes et
- d'un champ de jauge..

(nous devons préciser sous peu...)

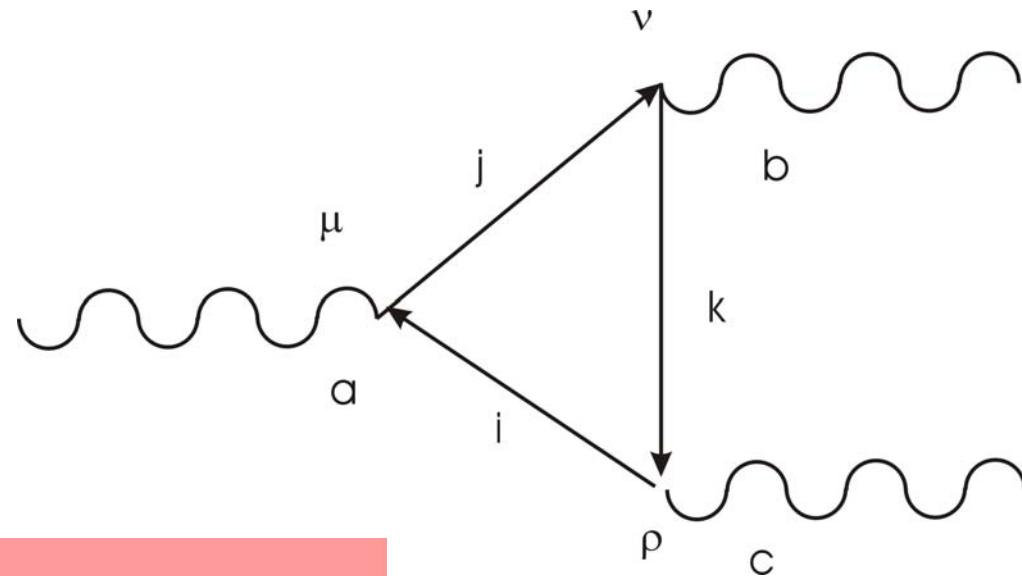
Comme nous incluons le plus petit « bloc », càd un fermion chiral sans masse,  
qui représente un **fermion lévogyre** ET en **antifermion dextrogyre**,

il est clair que ni la parité (**lévogyre**  $\leftrightarrow$  **dextrogyre**)  
ni la conjugaison de charge (fermion  $\leftrightarrow$  antifermion)  
ne sont séparément conservées;

**La symétrie naturelle de l'interaction de jauge pour un fermion est CP (équivalente par TCP au renversement du temps T);  
Elle peut toutefois être brisée par les couplages scalaires.**

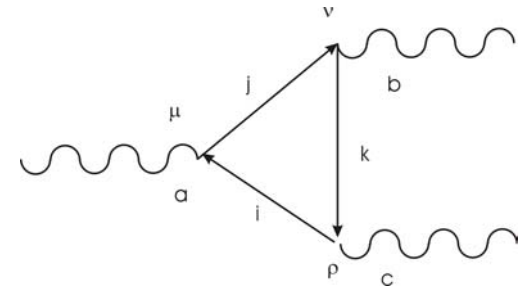
Les théories de jauge impliquent et reposent sur la conservation des courants.

Toutefois,  
un courant conservé  
au niveau classique  
**ne l'est pas toujours  
au niveau quantique...**



$$\partial_\mu j_a^\mu = \sum_{i,j,k,b,c} \kappa g_{i,j}^a g_{j,k}^b g_{k,i}^c \epsilon_{\nu\alpha\rho\beta} F_b^{\nu\alpha} F_c^{\rho\beta}$$

$$\partial_\mu j_a^\mu = \sum_{i,j,k,b,c} \kappa g_{i,j}^a g_{j,k}^b g_{k,i}^c \epsilon_{\nu\alpha\rho\beta} F_b^{\nu\alpha} F_c^{\rho\beta}$$



- Il est parfaitement FINI et calculable.

Ce terme est-il gênant?

- Aussi longtemps que le courant  $j_a^\mu$  n'est PAS associé à un champ de jauge,

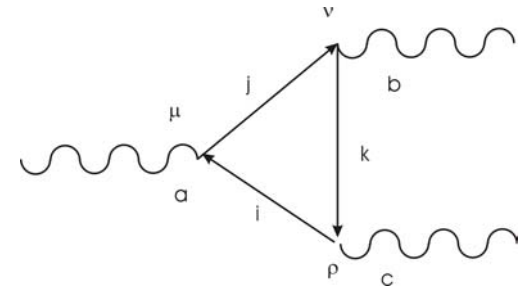
- Il est sans danger

- Il est même **OBSERVABLE** dans de nombreux processus:

Les mésons pseudoscalaires sont associés à la divergence du courant hadronique axial, ainsi, **il est bien connu que la désintégration  $\pi^0 \rightarrow 2 \gamma$  procède par l'anomalie**

Nous avons montré qu'il en est de même de tous les processus du type Vecteur  $\rightarrow$  Pseudoscalaire  $\gamma$ , et même du secteur des  $\eta$  et  $\eta'$  (P. Ball, jmf)

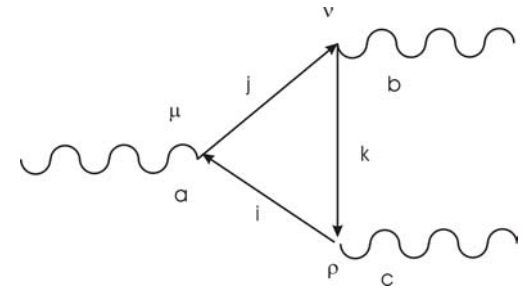
$$\partial_\mu j_a^\mu = \sum_{i,j,k,b,c} \kappa g_{i,j}^a g_{j,k}^b g_{k,i}^c \epsilon_{\nu\alpha\rho\beta} F_b^{\nu\alpha} F_c^{\rho\beta}$$



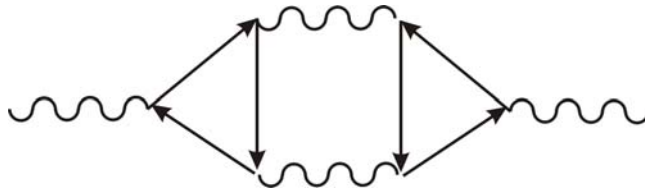
Il est facile de vérifier que ce terme brise P et T (et donc CP)...  
 ... du moins en apparence!  
 (il contient tjrs 3 composantes spatiales / 1 temporelle)

Pour des fermions sans masse, une rotation chirale élimine toutefois cet effet: CP (ou T) reste bien la symétrie naturelle des interactions de jauge, *en l'absence de couplages scalaires (dont la masse)*

$$\partial_\mu j_a^\mu = \sum_{i,j,k,b,c} \kappa g_{i,j}^a g_{j,k}^b g_{k,i}^c \epsilon_{\nu\alpha\rho\beta} F_b^{\nu\alpha} F_c^{\rho\beta}$$

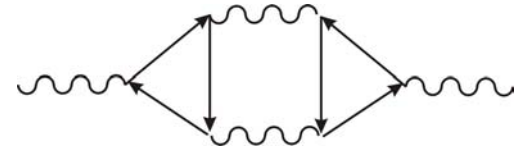


Pour les courants couplés à un boson de jauge toutefois, les anomalies sont fatales: elles entraînent la non-renormalisabilité (nous reviendrons sur ce concept)



Alors que le triangle est **fini**, la contribution à la polarisation du vide **diverge** violemment

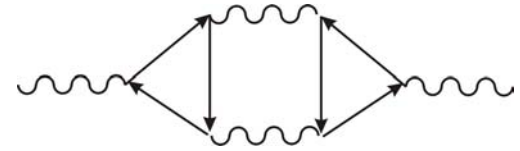
$$\partial_\mu j_a^\mu = \sum_{i,j,k,b,c} \kappa g_{i,j}^a g_{j,k}^b g_{k,i}^c \epsilon_{\nu\alpha\rho\beta} F_b^{\nu\alpha} F_c^{\rho\beta}$$



Il faut donc compenser les divers termes de la somme si  $j_a^\mu$  est couplé à un champ de jauge:

- Le plus élégant: plutôt qu'un seul champ de jauge, recourir à un groupe :
  - SU(2) est un exemple facile à vérifier (exercice) mais non réaliste
  - **SO(10) est le premier exemple réaliste**: il impose toutefois d'inclure un neutrino dextrogyre pour chaque génération (extension raisonnable, mais non indispensable pour donner une masse aux neutrinos)

$$\partial_\mu j_a^\mu = \sum_{i,j,k,b,c} \kappa g_{i,j}^a g_{j,k}^b g_{k,i}^c \epsilon_{\nu\alpha\rho\beta} F_b^{\nu\alpha} F_c^{\rho\beta}$$



• **Le plus élégant: plutôt qu'un seul champ de jauge, recourir à un groupe :**

• **SO(10) est le premier exemple réaliste**

• **Une solution moins élégante consiste à multiplier les représentations du groupe, ou simplement les fermions, pour assurer « à la main »**

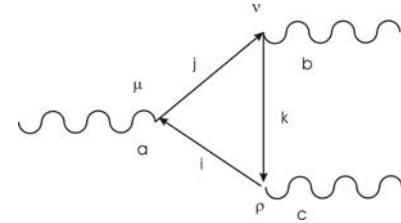
l'absence d'anomalies:

- Pour le simple champ U(1)  $A^\mu$ , il suffit d'ajouter  $\psi_R$  à  $\psi_L$ , et on retrouve ainsi l'électrodynamique quantique

- Pour l'ossature du Modèle Standard,  $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)$ , on établit ainsi les charges  $2/3$ ,  $-1/3$ ,  $-1$  et  $0$  pour les quarks et leptons

- Pour SU(5), les représentations  $5$  et  $\overline{10}$  compensent leurs anomalies (noter que le 16 de SO(10) se décompose précisément en  $5 \oplus \overline{10} \oplus 1$ )

$$\partial_\mu j_a^\mu = \sum_{i,j,k,b,c} \kappa g_{i,j}^a g_{j,k}^b g_{k,i}^c \epsilon_{\nu\alpha\rho\beta} F_b^{\nu\alpha} F_c^{\rho\beta}$$



Les « anomalies » ont-elles vraiment leur place dans une discussion du vide ???

- Elles sont liées très étroitement aux solutions « topologiques » pour les champs de jauge, il s'agit essentiellement de solutions de champs libres (« pure jauge ») contraintes par des conditions au bord topologiques.
- Elles sont liées de façon directe à la structure de l'espace « vide »: par exemple, il n'y a pas d'anomalie chirale à 4+1 dimensions.
- Il est probable qu'elles jouent un rôle important dans la génération de l'excès de matière par rapport à l'antimatière ..

$$\partial_\mu j_{lepton,L}^\mu + \partial_\mu j_{baryon,L}^\mu = \sum_a \kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a$$

Dans le modèle standard, les anomalies permettent « d'échanger » une densité leptonique pour une densité baryonique, en présence de configurations non triviales des champs de jauge (instantons, ou, plutôt, sphalerons). Ce mécanisme peut détruire une asymétrie matière-antimatière générée précédemment.

Il peut aussi, dans le cas de la leptogénèse, engendrer le nombre baryonique vu aujourd'hui à partir d'un nombre leptonique, lié à la masse de Majorana des neutrinos ( qui trouve son cadre naturel dans SO(10) )

- Energie du Vide
  - Mécanique quantique
  - Bosons
  - Fermions
  - Un argument pour la Supersymétrie
- Contenu Minimal
  - Fermion chiral
  - Choix de phase local – global?
  - Structure topologique?
  - Interactions de jauge
  - Problème des Anomalies
    - Fermions supplémentaires et/ou
    - Groupes d'unification
    - Nombre baryonique

