Vrije Universiteit Brussel

FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN

# BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

Titularis : M. Sioen

Auteur : J. Vercruysse

1ste Bachelor Ingenieurswetenschappen : Architectuur

## Doelstelling en Voorwoord

Deze curus is ondergebracht in het vak ‘Wiskunde 2: Lineaire Algebra’, voor de eerste Bachelor Ingenieursvaardigheden: Architectuur, maar het deel ‘Beschrijvende Meetkunde’ staat eigenlijk volledig op zichzelf.

Het doel van deze cursus is het bestuderen van ruimtefiguren. We zullen verschillende methodes behandelen om driedimensionale objecten te manipuleren en hun eigenschappen te achterhalen. Zo gaan we ondermeer op zoek naar een manier om een ruimtefiguur op ondubbelzinnige wijze door middel van een vlakke tekening voor te stellen. Uit deze tekening moet men de juiste afmetingen en de onderlinge ligging van de verschillende delen van de ruimtefiguur kunnen afleiden.

Er wordt ook getoond welke constructies in de vlakke tekening moeten worden uitgevoerd om vraagstukken betreffende de ruimtefiguur op te lossen.

Deze curusnota’s zijn gebaseerd op de vroegere cursus voor dit vak met als auteurs S. Borrey, S. Caenepeel, M. Mollaert en M. Geivaerts

Deze nota’s zijn gerealiseerd met behulp van LaTeX en het $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-book class.

# Inleiding

Doorheen deze cursus zullen we trachten een zo consequent mogelijke notatie aan te houden.

i) **Punten** worden aangeduid met hoofdletters ($A, B, \ldots$).
ii) **Rechten** worden aangeduid met kleine letters ($a, b, \ldots$). Wordt een rechte bepaald door twee punten $A$ en $B$, dan wordt ze ook wel aangeduid met de notatie $AB$.
iii) **Vlakken** worden aangeduid met ronde letters ($\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$). Wordt een vlak bepaald door drie punten $A$, $B$, $C$ (resp. twee rechten $a$ en $b$), dan wordt ze ook wel genoteerd als $ABC$ (resp. $ab$).

En belangrijk begrip is verder de *projectietekening*. Hiermee bedoelen we de vlakke tekening, waarmee we een ruimtefiguur ondubbelzinnig wensen voor te stellen.

Zoals de schrandere lezer hierboven heeft kunnen opmerken, zullen we een nieuw ingevoerd begrip de eerste maal cursief afdrukken.

# Inhoudsopgave


Doelstelling en Voorwoord i

Inleiding iii

Inhoudsopgave iv

Hoofdstuk 1. Vlakke Constructies : De Methode van Monge 1
1. De Orthogonale Projectie 1
2. De Methode van Monge 1
3. Voorstelling van Rechten 3
4. Voorstelling van Vlakken 5
5. Onderlinge stand van rechten en vlakken 7
6. Loodrechte stand en projecties 7

Hoofdstuk 2. Vlakke Constructies : Ware Groottes 11
1. De regel van de rechthoekige driehoek 11
2. Veranderen van projectievlak 12
3. Wentelen van willekeurige figuren 13
4. Neerslaan van een vlakke figuur in een horizontaal vlak 15

Hoofdstuk 3. Ruimtelijke Constructies 19

HOOFDSTUK 1

# Vlakke Constructies : De Methode van Monge

## 1. De Orthogonale Projectie

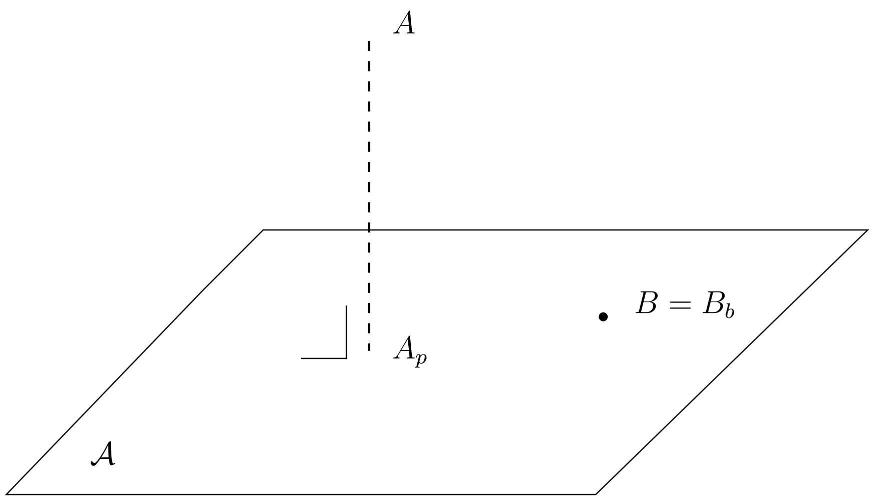
DEFINITIE 1.1. i) De *orthogonale projectie van een punt* $A$ op een vlak $\mathcal{A}$, is het voetpunt $A_p$ van de loodlijn $\ell$ die door het punt $A$ op het vlak $\mathcal{A}$ wordt getrokken (d.i. het snijpunt van deze loodlijn met het vlak $\mathcal{A}$).

ii) De *orthogonale projectie van een bepaalde figuur* op een vlak $\mathcal{A}$ wordt gevormd door de orhogonale projectie van elk van haar punten op $\mathcal{A}$.

iii) Een vlak $\mathcal{A}$ waarop een figuur geprojecteerd wordt, heet een *projectievlak*.

EIGENSCHAPPEN 1.2. *(1) De orthogonale projectie van een punt is steeds een punt.*

*(2) De orthogonale projectie van een rechte $a$ is een rechte of een punt. Het is opnieuw een rechte $a_p$ als en slechts dan als $a$ niet loodrecht op het projectievlak $\mathcal{A}$ staat.*




OPMERKING 1.3. In het vervolg van dit hoofdstuk, bedoelen we steeds 'orthogonale projectie' als we over 'projectie' spreken.

## 2. De Methode van Monge

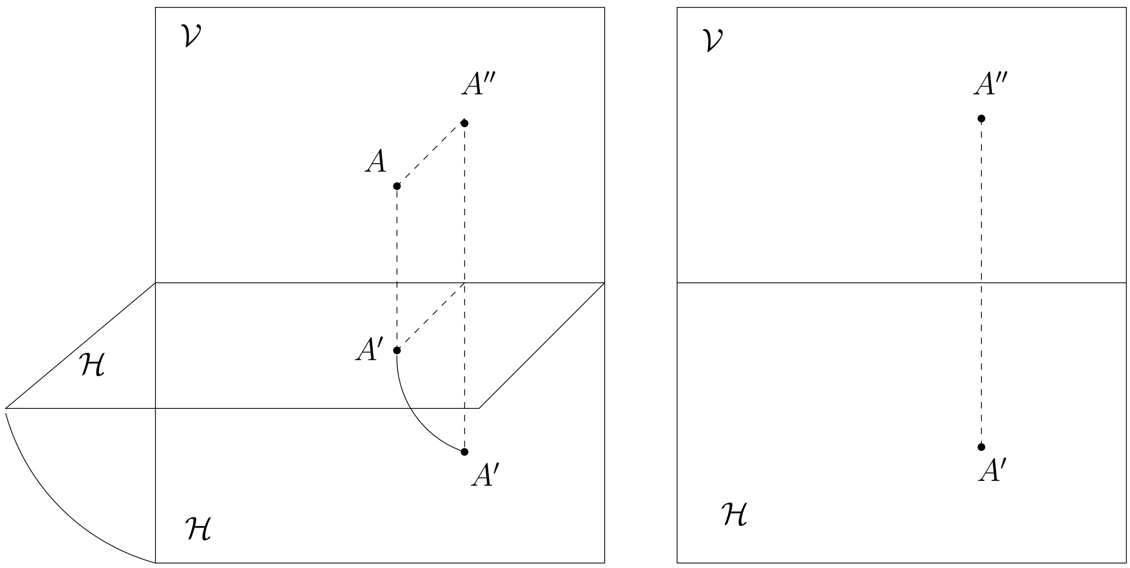
**2.1. De probleemstelling.** Indien men een orthogonale projectie uitvoert op een projectievlak $\mathcal{A}$, dan is de stand van een punt $A$ in de ruimte niet op een ondubbelzinnige wijze bepaald door zijn projectie $A_p$. Het punt $A_p$ is immers eveneens de projectie van eenieder ander punt op de rechte $AA_p$ die orthogonaal staat op het vlak $\mathcal{A}$.

Het opheffen van deze ondubbelzinnigheid leidt tot het invoeren van *de methode der dubbele orthogonale projecties* (ook *de methode van Monge*) genoemd. Men projecteert dan het punt $A$ op twee projectievlakken die loodrecht op elkaar staan.

**2.2. De Methode.** Kies twee vlakken die loodrecht op elkaar staan. Zij zullen de rol spelen van de projectievlakken. Eén van de twee projectievlakken wordt het *horizontaal* projectievlak genoemd en aangeduid met de letter $\mathcal{H}$. Het andere noemen we het *verticaal* projectievlak en duiden we aan met de letter $\mathcal{V}$. De orthogonale projecties van een punt $A$ op de projectievlakken $\mathcal{H}$ en $\mathcal{V}$ worden respectievelijk de *horizontale projectie* en de *verticale projectie* genoemd en aangeduid met de notaties $A'$ (of $A^H$) en $A''$ (of $A^V$). Projecties van verschillende objecten in eenzelfde projectievlak worden *gelijknamig* genoemd (b.v. $A'$ en $a'$ zijn gelijknamige projecties van het punt $A$ en de rechte $a$).

De snijlijn van $\mathcal{H}$ en $\mathcal{V}$ noemen we de *projectieas*.

Indien we nu een punt $A$ (of een zekere figuur) projecteren op $\mathcal{H}$ en $\mathcal{V}$, dan bekomen we twee tekeningen, één tekening in $\mathcal{H}$ en een tweede in $\mathcal{V}$. Om één enkel vlak van projectie te bekomen, waarin we een tekening kunnen maken, moeten we $\mathcal{H}$ nog laten wentelen om de projectieas over een hoek van 90°, zodat $\mathcal{H}$ samenvalt met $\mathcal{V}$ (zie fig. 2). Op deze manier bekomen we dan onze projectietekening.




Opmerking 1.4. De projectieas is niet essensieel bij de constructies. Soms wordt hij achterwege gelaten. De ophaallijnen zullen dan evenwijdig met gegeven ophaallijnen (of evenwijdig met het kader) getekend worden.

**2.3. Enkele Eigenschappen.** We bekomen aldus via de methode van Monge een ondubbelzinnige tweedimensionale voorstelling van de driedimensionale ruimte. Meer precies:

Eigenschap 1.5. *Elk punt $A$ heeft twee projecties $A'$ en $A''$ die ondubbelzinnig de stand van het punt $A$ ten opzichte van $\mathcal{H}$ en $\mathcal{V}$ bepalen. Daar we $\mathcal{H}$ en $\mathcal{V}$ in den beginne zelf gekozen hadden, is hiermee de positie van het punt $A$ volledig bepaald.*

In de projectietekening liggen de projecties $A'$ en $A''$ van een punt $A$ op dezelfde loodlijn op de projectieas. Deze loodlijn op de projectieas bepaald door $A'$ en $A''$ wordt de *ophaallijn* van het punt $A$ genoemd. Dit leidt tot de volgende eigenschap

Eigenschap 1.6. *Twee punten $A'$ en $A''$ in de projectietekening liggen op eenzelfde ophaallijn (i.e. op een rechte loodrecht op de projectieas), dan en slechts dan als deze punten projecties zijn van eenzelfde punt $A$ in de ruimte.*

Deze laatste eigenschap is van groot belang voor het verdere verloop van de cursus en in de oefeningen.

**2.4. Het dualiteitsprincipe.** De methode van Monge kent een belangrijke symmetrie, die er toe leidt dat er van de meeste constructies en eigenschappen die we zullen bespreken twee versies bestaan. Het is echter niet nodig telkens de correctheid van elk van de twee versies apart aan te tonen. We kunnen namelijk gebruik maken van het volgende *dualiteitsprincipe* om de ene versie uit de andere af te leiden.

Bij de methode van Monge maken we gebruik van twee projectievlakken $\mathcal{H}$ en $\mathcal{V}$ die loodrecht op elkaar staan. Echter is de keuze van welk projectievlak we 'horizontaal' noemen en welk we 'verticaal' noemen volledig arbitrair. Dit betekent dat elke stelling die we bewijzen ook waar is indien we de rol van $\mathcal{H}$ en $\mathcal{V}$ omwisselen.

Let op: dit dualiteitsprincipe betekent niet dat de projectietekening steeds symmetrisch is ten opzichte van de projectieas, of dus dat de tekening in $\mathcal{H}$ en $\mathcal{V}$ er hetzelfde uitziet. Het principe zegt enkel dat indien we iets aantonen voor de projectie op $\mathcal{H}$ er een evenwaardige eigenschap geldt voor de projectie op $\mathcal{V}$.

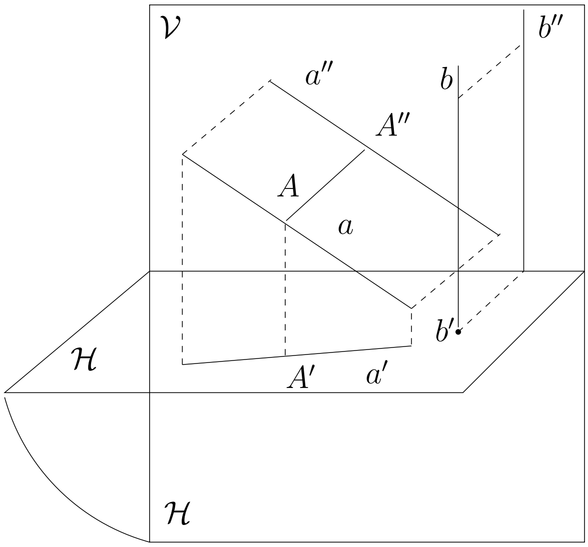
## 3. Voorstelling van Rechten

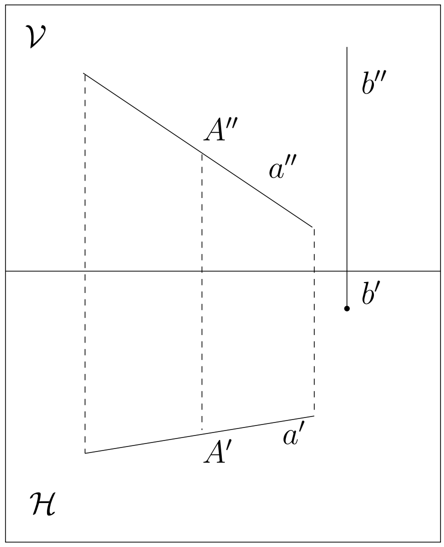
**3.1. Soorten rechten.** Om in het vervolg van de cursus overbodige herhalingen te vermijden, voeren we voor enkele veel voorkomende rechten met een speciale ligging een specifieke benaming in.

- *verticale* rechte: loodrecht op $\mathcal{H}$;
- *koprechte*: loodrecht op $\mathcal{V}$;
- *horizontale* rechte: evenwijdig met $\mathcal{H}$;
- *frontrechte*: evenwijdig met $\mathcal{V}$;
- *profielrechte*: loodrecht op de projectieas, maar geen verticale rechte en ook geen koprechte;
- *willekeurige* rechte: geen van alle voorgaande.

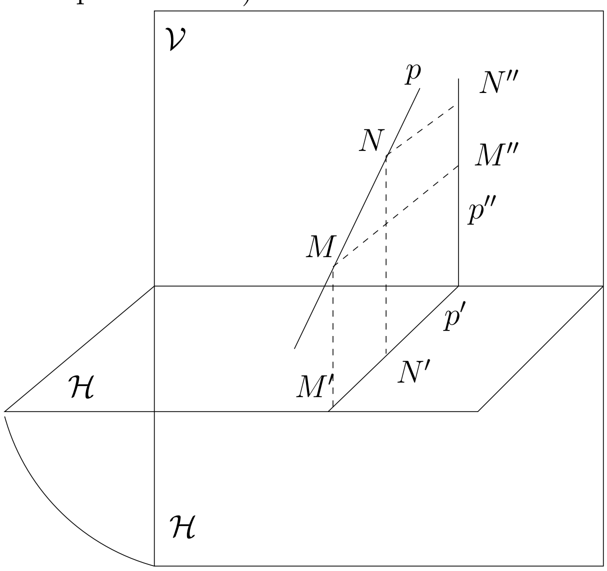
Opmerkingen 1.7.
(1) Een verticale rechte (resp. koprechte) is een bijzonder geval van een frontrechte (resp. horizontale rechte).
(2) In een driedimensionale ruimte hoeven rechten niet noodzakelijk te snijden om loodrecht op elkaar te staan: de hoek tussen kruisende rechten wordt gedefinieerd als de hoek berekend tussen twee rechten evenwijdig aan de oorspronkelijke rechten die in eenzelfde vlak liggen (en dus wel moeten snijden).

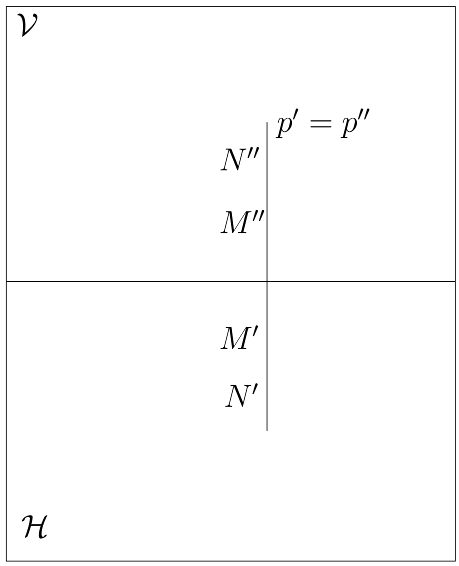
**3.2. Rechten onder dubbele projecties.** De projecties van een rechte zijn over het algemeen twee rechten, die ondubbelzinnig de stand van die rechte t.o.v. $\mathcal{H}$ en $\mathcal{V}$ bepalen. In sommige gevallen is het echter mogelijk dat één van de projecties geen rechte is (zie fig. 3). Dit is zo bij een verticale rechte en bij een koprechte (zie ook oefening 1.1). Ga na dat dit de enig mogelijke gevallen zijn. Deze eigenschap karakteriseert dan ook verticale rechten en koprechten. Merk voorts op dat het onmogelijk is dat beide projecties van eenzelfde rechte een punt zouden zijn.




De situatie kan echter wel nog meer ontaarden (zie fig. 4). Voor een profielrechte $p$ zijn beide projecties wel degelijk rechten, maar zij vallen samen op de projectietekening. Dit leidt tot een dubbelzinnige situatie, immers: voor een punt $M$ op deze rechte (kies $M$ zodat het behoort tot $\mathcal{H}$ noch tot $\mathcal{V}$) heeft elke rechte uit het vlak $MM'M''$ dezelfde projectie als de oorspronkelijke profielrechte $p$. Een profielrechte wordt daarom voorgesteld door de projecties van twee van haar punten. (dit bepaalt wel op ondubbelzinnige wijze de profielrechte).



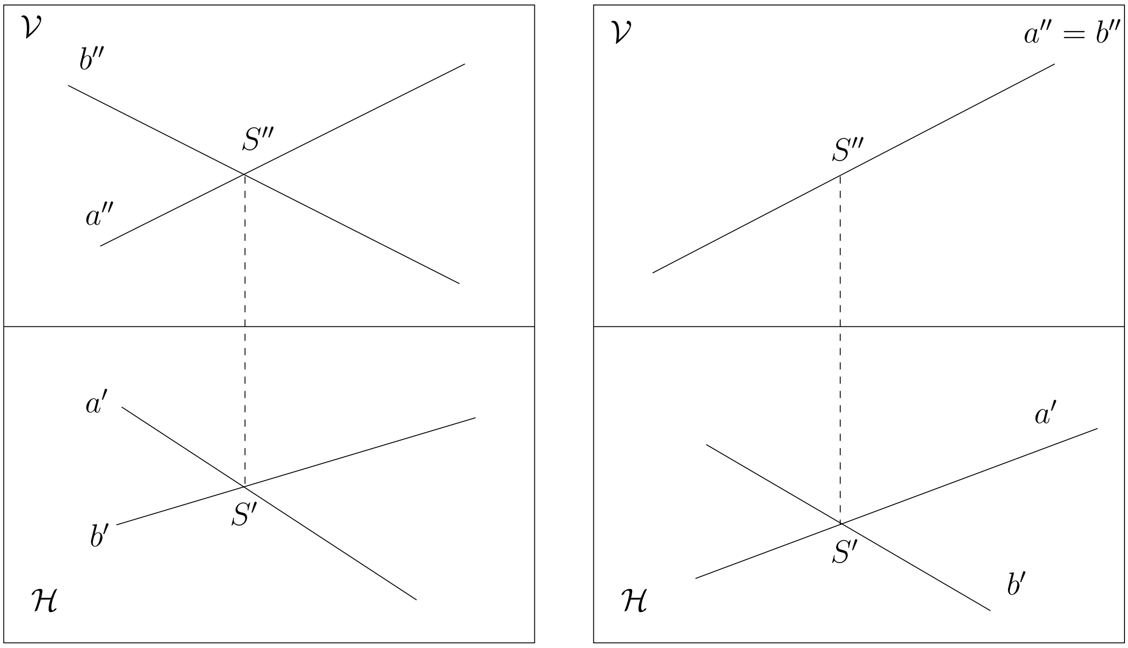




### 3.3. Onderlinge stand en projecties.

Stelling 1.8 (Punten en rechten). *Een punt $A$ ligt dan en slechts dan als op een rechte $a$ indien beide projecties van $A$ op de gelijknamige projecties van de rechte $a$ liggen.*

Merk op dat in de driedimensionale ruimte twee rechten ofwel snijdend, ofwel evenwijdig, ofwel kruisend zijn.

Stelling 1.9 (Snijdende rechten). *Twee rechten $a$ en $b$ snijden elkaar in een punt $S$ dan en slechts dan indien de $S'$ op $a'$ en $b'$ ligt en $S''$ op $a''$ en $b''$ ligt en bovendien $S'$ en $S''$ op dezelfde ophaallijn liggen. (fig. 6)*




STELLING 1.10 (Evenwijdige rechten). *Twee rechten $a$ en $b$ zijn evenwijdige dan en slechts dan indien hun gelijknamige projecties twee aan twee ook evenwijdig zijn.*

Let wel: het kan gebeuren dat de gelijknamige projecties van evenwijdige rechten samenvallen of herleid zijn tot punten.

## 4. Voorstelling van Vlakken

**4.1. Soorten vlakken.** Zoals in de vorige paragraaf, is het ook hier interessant om bepaalde vlakken een meer specifieke benaming te geven.

- *verticaal* vlak: loodrecht op $\mathcal{H}$;
- *kopvlak*: loodrecht op $\mathcal{V}$;
- *horizontaal* vlak: evenwijdig met $\mathcal{H}$;
- *frontvlak*: evenwijdig met $\mathcal{V}$;
- *profielvlak*: loodrecht op de projectieas;
- *willekeurig* vlak: geen van de vorige.

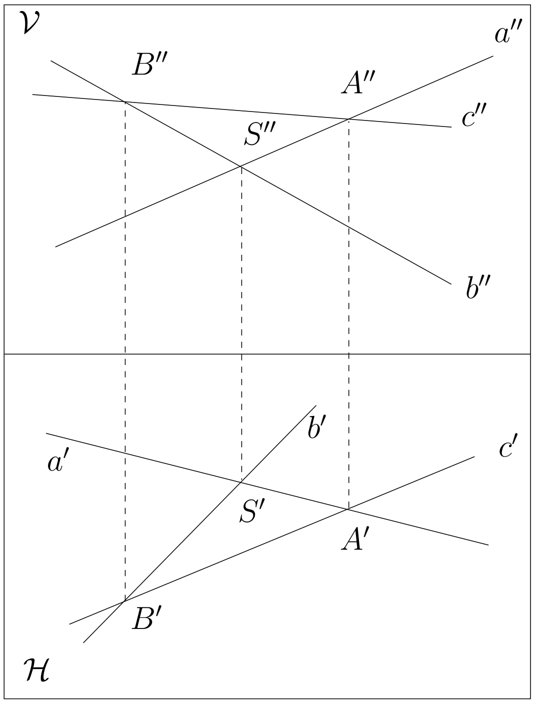
**4.2. Vlakken onder dubbele projecties.** Een vlak kan in de projectietekening ondubbelzinnig voorgesteld worden door de projecties van de elementen die dit vlak bepalen, namelijk

- drie niet-collineaire punten;
- een rechte en een punt dat niet op die rechte ligt;
- twee snijdende rechten;
- twee evenwijdige rechten.

**4.3. Enkele basisconstructies in vlakken.**

BASISCONSTRUCTIE 1. *Gegeven is een (willekeurig) vlak en één van de projecties van een rechte, gelegen in dat vlak. Construeer de andere projectie van die rechte.*

*Oplossing.*
Men bekomt de tweede projectie van de rechte door de steunpunten van deze rechte op twee bekende rechten van het vlak te construeren. Men kan deze steunpunten makkelijk in de gelijknamige projectie van de gegeven projectie van de rechte vinden, en deze dan ophalen of neerlaten naar de andere projectie. Deze constructie wordt ook wel de *regel der steunpunten* genoemd.
Laten we deze constructie concreet beschrijven in het volgende geval. We veronderstellen dat het vlak gegeven wordt door de snijdende rechten $a$ en $b$, en dat we de verticale projectie $c''$ van de rechte $c$ uit het vlak $ab$ gegeven hebben. We gaan er van uit dat $c$ de rechten $a$ en $b$ snijdt in respectievelijk het punt $A$ en $B$, waarvan we de verticale projectie $A''$ en $B''$ onmiddellijk kunnen tekenen. (Merk op dat algemeen de rechte $c$ evenwijdig kan zijn met een van de rechten $a$ of $b$.)




Door gebruik te maken van Eigenschap 1.5 en Stelling 1.8 kunnen we nu deze punten langs hun ophaallijn neerlaten op de projectie van $a$ en $b$ en vinden we $A'$ en $B'$. Door deze punten te verbinden, bekomen we de gezochte tweede projectie van de rechte $c$.

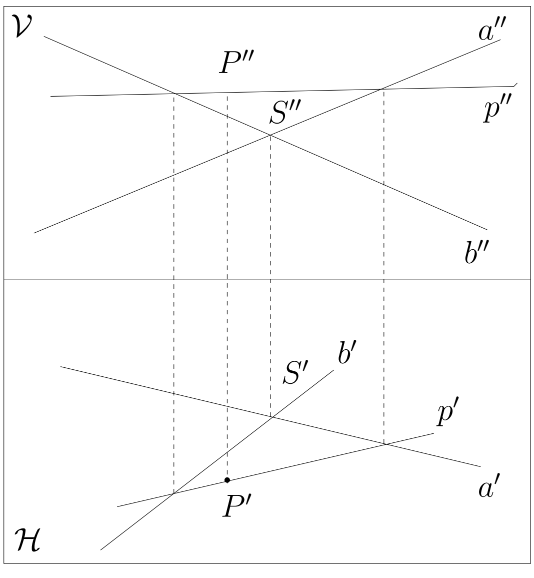
Maak gebruik van het dualiteitsprincipe om dit vraagstuk op te lossen indien de horizontale projectie $c'$ van $c$ gegeven is. □

Zie ook oefeningen 1.4 en 1.5. voor gelijkaardige vraagstukken.

Basisconstructie 2. *Gegeven is een vlak en één van de projecties van een punt, gelegen in dit vlak. Construeer dan de andere projectie van het punt.*

*Oplossing.*

Zij $ab$ het gegeven vlak en $P'$ de gegeven projectie van het punt $P$. De tweede projectie $P''$ kan dan bepaald worden door de *regel der hulplijn*:
Door $P'$ trekt men de gelijknamige projectie $p'$ van een rechte $p$ van $ab$. Men bepaalt $p''$ door de regel der steunpunten te gebruiken. De ophaallijn door $P'$ snijdt $p''$ in de gevraagde projectie $P''$. Door opnieuw gebruik te maken van het dualiteitsprincipe vindt men de oplossing indien $P''$ gegeven is.




□

Zie ook oefeningen 1.6 en 1.7 voor gelijkaardige vraagstukken.

## 5. Onderlinge stand van rechten en vlakken

### 5.1. Grondstellingen betreffende evenwijdige stand van rechten en vlakken.

- Twee rechten (vlakken) die evenwijdig zijn met eenzelfde rechte (vlak), zijn onderling evenwijdig.
- Twee loodvlakken op eenzelfde rechte zijn onderling evenwijdig.
- Is een rechte evenwijdig met een rechte van een vlak, dan ligt ze in het vlak of is ze evenwijdig met het vlak.
- Zijn twee vlakken evenwijdig, dan is elke rechte van het ene vlak evenwijdig met het andere vlak.
- Is een rechte evenwijdig met een vlak en brengt men door die rechte een vlak aan dat het eerste vlak snijdt, dan is de snijlijn evenwijdig met de gegeven rechte.
- Zijn een rechte $d$ en een vlak $\mathcal{A}$ evenwijdig, en trekt men door een punt $A$ van $\mathcal{A}$ een rechte $a$ die evenwijdig is met $d$, dan ligt $a$ volledig in $\mathcal{A}$.
- Is een rechte evenwijdig met twee snijdende vlakken, dan is ze evenwijdig met de snijlijn.

OPMERKING 1.11. In een willekeurig vlak liggen oneindig veel horizontale rechten en frontrechten, het zijn de snijlijnen van horizontale vlakken en frontvlakken met het willekeurig vlak. Alle horizontale (resp. frontale) rechten van een vlak dat geen horizontaal (resp. frontaal) vlak is, zijn evenwijdig.

### 5.2. Enkele basisconstructies.

BASISCONSTRUCTIE 3. *Construeer door een gegeven punt een rechte (resp. een vlak) evenwijdig met een gegeven rechte (resp. een gegeven vlak)*

*Oplossing.* Construeer door elke projectie van het gegeven punt $P$ een rechte, evenwijdig aan de gelijknamige projectie van de gegeven rechte. De geconstrueerde rechten vormen de (gelijknamige) projecties van de gezochte rechte. We maken hier gebruik van Stelling 1.10 □

BASISCONSTRUCTIE 4. *Constureer het snijpunt van een vlak ab en een rechte c niet gelegen in dat vlak.*

*Oplossing.* Zie oefening 1.8. □

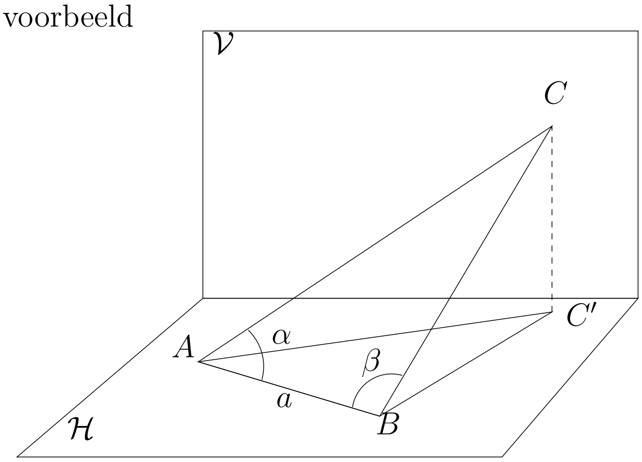
## 6. Loodrechte stand en projecties

### 6.1. Enkele belangrijke stellingen i.v.m. loodrechte stand.

- Staat een rechte loodrecht op een vlak, dan staat ze loodrecht op elke rechte van dat vlak. Omgekeerd, als een rechte loodrecht staat op twee niet evenwijdige rechten van een vlak, dan staat ze loodrecht op dat vlak.
- Is $A$ het voetpunt van de loodlijn uit een willekeurig punt $P$ op een vlak $\mathcal{A}$ neergelaten, en is $Q$ het voetpunt van de loodlijn uit $P$ op een willekeurige rechte $d$ van $\mathcal{A}$ neergelaten, dan staat $AQ$ loodrecht op $d$.
- Zijn twee rechten (vlakken) evenwijdig, dan is elk loodvlak (elke loodlijn) op de (het) ene rechte (vlak) ook een loodvlak (loodlijn) op de (het) andere rechte (vlak).
- Twee loodlijnen van eenzelfde vlak zijn evenwijdig.
- Twee loodvlakken op eenzelfde rechte zijn onderling evenwijdig.
- Elk vlak dat een loodlijn op een gegeven vlak bevat, staat loodrecht op dit vlak.

- Staan twee vlakken loodrecht op elkaar en brengt men door een punt van het ene vlak de loodlijn op het andere vlak aan, dan ligt die loodlijn in het eerste vlak.
- Zijn twee vlakken evenwijdig, dan is elk loodvlak op het ene ook een loodvlak op het andere.

**6.2. hoeken onder projecties.** Over het algemeen worden hoeken niet bewaard onder een orthogonale projectie. Dit kan men zien aan de hand van het volgende voorbeeld




Zij $a = AB$ een horizontale rechte en $ABC'$ een gelijkzijdige driehoek. Indien we voor de rechte $b = AC$ of $b = BC$ kiezen, dan is het duidelijk dat $\alpha$ en $\beta$ niet tegelijkertijd $60°$ kunnen zijn, want dan zou de driehoek $ABC$ ook gelijkzijdig moeten zijn, wat niet het geval is. Bijgevolg blijft de hoek tussen $a$ en $b$ niet bewaard in horizontale projectie.

Wel geldt de volgende

Stelling 1.12. *(1) Is één van de benen van een rechte hoek een horizontale (resp. frontale) rechte, en staat het andere been niet loodrecht op $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{V}$), dan is de horizontale (resp. verticale) projectie van die rechte hoek een rechte hoek.*

*(2) Omgekeerd, is de horizontale (resp. verticale) projectie van een hoek waarvan één van de benen horizontaal (resp. frontaal) is, een rechte hoek, dan is de hoek zelf ook recht.*

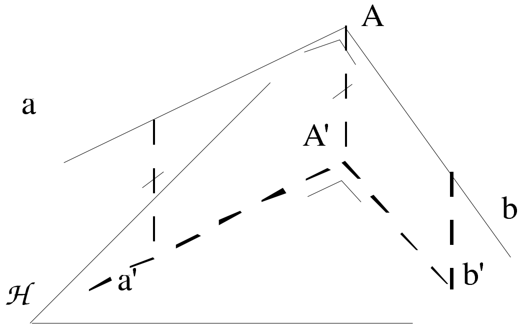



fig.10a

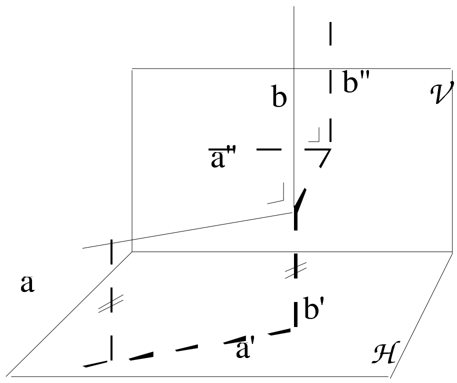



fig.10b

**6.3. Enkele basisconstructies.**

Basisconstructie 5. *Construeer door een gegeven punt een vlak loodrecht op een gegeven rechte.*

*Oplossing.* Zie oefening 1.12 □

Basisconstructie 6. *Construeer door een gegeven punt een rechte loodrecht op een gegeven vlak.*

*Oplossing.* Zij $ab$ het gegeven vlak en $P$ het gegeven punt. Construeer een horizontale rechte $h$ en een frontrechte $f$ in $ab$. We moeten een rechte $\ell$ construeren door $P$ en loodrecht op $ab = hf$. We kunnen beide projecties nu makkelijk tekenen : in $\mathcal{H}$ tekenen we $\ell'$ orhogonaal met $h'$ en in $\mathcal{V}$ tekenen we $\ell''$ orthogonaal met $f''$. □

Vraagstuk 1.13. *Construeer de gemeenschappelijke loodlijn van twee kruisende rechten.*

*Oplossing.* We geven enkel een ruimtelijke constructie, zoek zelf de interpretatie hiervan via de methode van Monge.

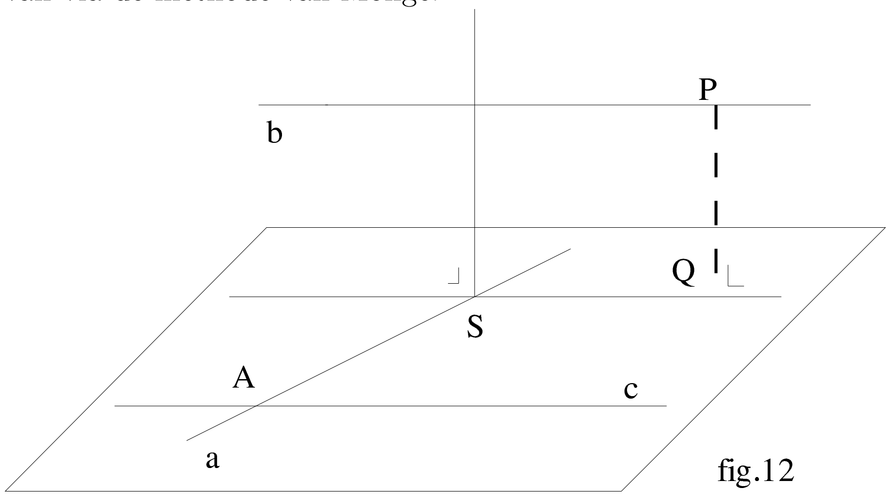


fig.12

Zij $a$ en $b$ de twee kruisende rechten. Door een willekeurig punt $A$ van $a$ trekt men een rechte $c$ evenwijdig met $b$. Men construeert door $b$ het vlak loodrecht op $ac$ (dit kan omdat $b // ac$). Dit is het vlak $bQ$ waar $Q$ het voetpunt is van de loodlijn op $ac$ neergelaten uit een punt $P$ van $b$. Merk op dat $PQ$ de richting van de gemeenschappelijke loodlijn van $a$ en $b$ bepaalt, aangezien $PQ \perp a$ en $PQ \perp c$ (Hieruit volgt $PQ \perp b$ want $c//b$). Tenslotte bepaalt men het snijpunt $S$ van $a$ met $bQ$. De rechte door $S$ evenwijdig met $PQ$ is de gevraagde rechte.

## HOOFDSTUK 2

# Vlakke Constructies : Ware Groottes

In dit hoofdstuk behandelen we verschillende methodes om uit de projectietekeningen die we via de methode van Monge uit het vorige hoofdstuk bekomen, de ware grootte van een lijnstuk of een figuur af te lezen.

### 1. De regel van de rechthoekige driehoek

Het is duidelijk dat een orthogonale projectie over het algemeen geen afstanden bewaart. Indien echter een lijnstuk $AB$ evenwijdig is met $\mathcal{H}$ (resp. met $\mathcal{V}$), dan wordt het wel in ware grootte op $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{V}$) geprojecteerd. Deze eigenschap kunnen we als volgt gebruiken om de ware grootte van een willekeurig lijnstuk uit de projectietekening af te lezen.

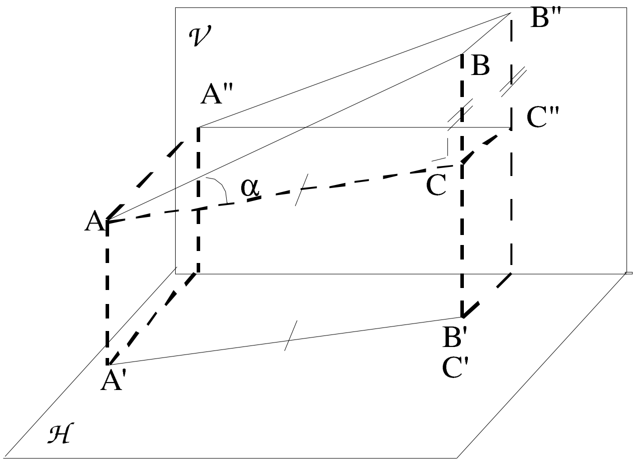



fig.5a

A'B$_1$ is de ware grootte van het lijnstuk AB

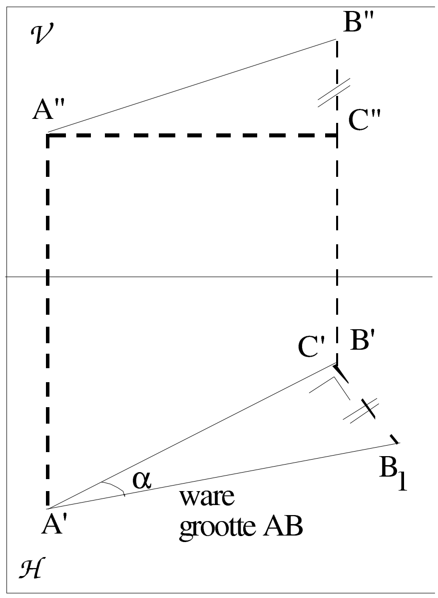



fig.5b

We beschouwen het vlak $ABA'B'$ en construeren in dit vlak een rechthoekige driehoek $ABC$ met $AB$ als schuine zijde. Dan is $AC$ evenwijdig met $\mathcal{H}$ en $BC$ evenwijdig met $\mathcal{V}$. De lengte van de rechthoekszijde $BC$ (resp. $AC$) is dus gelijk aan de lengte van $B''C''$ (resp. $A'C'$=$A'B'$).

Deze observatie leidt tot 'regel van de rechthoekige driehoek' die de oplossing biedt voor de volgende

Basisconstructie 7. *Bepaal de ware grootte van een lijnstuk $AB$ waarvan de projecties $A'B'$ en $A''B''$ gegeven zijn.*

*Oplossing.* In de projectietekening construeren we een rechthoekige driehoek met $A'B'$ als eerste rechthoekszijde en waarvan de tweede rechthoekszijde een lengte heeft gelijk aan het verschil tussen de hoogten van $A''$ en $B''$. (Deze hoogtes worden gemeten loodrecht uit het punt tot aan de projectieas). De schuine zijde van die rechthoekige driehoek is dan de ware grootte van het lijnstuk $AB$. □

Opmerking 2.1. Dankzij het dualiteitsprincipe kunnen we zoals steeds een gelijkaardige constructie kan doen door de rol van $\mathcal{H}$ en $\mathcal{V}$ om te wisselen.

## 2. Veranderen van projectievlak

In de vorige paragraaf hebben we een eerste techniek gezien om de ware grootte van een lijnstuk te bepalen. In principe kunnen we, door de regel van de rechthoekige driehoek meermaals toe te passen ook de ware grootte van hoeken en volledige figuren terugvinden uitgaande van een projectietekening. Dit leidt echter reeds snel tot langdurige constructies en overladen tekeningen. Er bestaan echter andere technieken die voor meer gecompliceerde figuren sneller tot een oplossing leiden. We bespreken dit in de volgende drie paragrafen.

De eerste techniek bestaat erin een willekeurig verticaal vlak (resp. kopvlak) als nieuw verticaal (resp. horizontaal) projectievlak te gebruiken. Indien een veelhoek evenwijdig is met een nieuw gekozen verticaal of horizontaal projectievlak, dan zullen we deze veelhoek in ware grootte zien in het nieuw projectievlak.

### 2.1. Overgang op nieuw verticaal projectievlak.

Zij $\mathcal{V}_1$ een verticaal vlak. We beschouwen nu twee maal een dubbele orthogonale projectie. De eerste is de gebruikelijke projectie op $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$, voor de tweede projectie gebruiken we als projectievlakken $(\mathcal{H}, \mathcal{V}_1)$. De overgang van $\mathcal{V}$ naar $\mathcal{V}_1$ impliceert een aantal wijzigingen. Ten eerste bekomen we een nieuwe projectieas, namelijk de snijlijn van $\mathcal{H}$ en $\mathcal{V}_1$. Verder is het beeld onder de verticale projectie op $\mathcal{V}_1$ in het algemeen uiteraard verschillend van deze op $\mathcal{V}$. Echter is voor een willekeurig punt de afstand tussen de verticale projecties en de respectievelijke projectieassen gelijk. De nieuwe ophaallijnen staan opnieuw loodrecht op de nieuwe projectieas. Aan de horizontale projectie verandert niets.

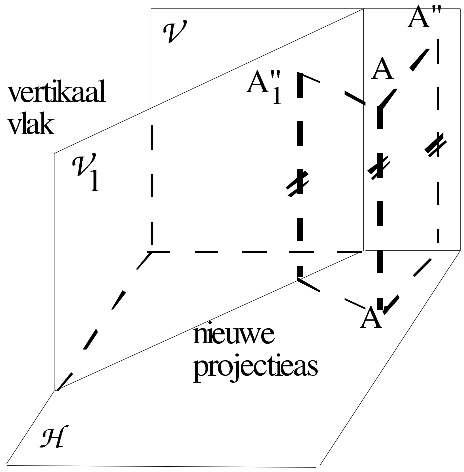



fig.14a

### 2.2. Overgang op een nieuw horizontaal projectievlak.

Zij $\mathcal{H}_1$ nu een willekeurig kopvlak. Gebruikmakend van het dualiteitsprincipe kunnen we de rollen van $\mathcal{H}$ en $\mathcal{V}$ omdraaien in Paragraaf 2.1 en $\mathcal{H}_1$ als nieuw horizontaal projectievlak gebruiken. In dit geval verandert niets aan de verticale projectie en is de afstand tussen de horizontale projecties en de (respectievelijke) projectieas gelijk.

**2.3. Ware groottes.** Wanneer we nu een figuur hebben die in een verticaal vlak of in een kopvlak ligt, dan weten we nu dankzij het voorgaande dat de ware grootte van deze figuur gemakkelijk kan gevonden worden door van projectievlak te veranderen.

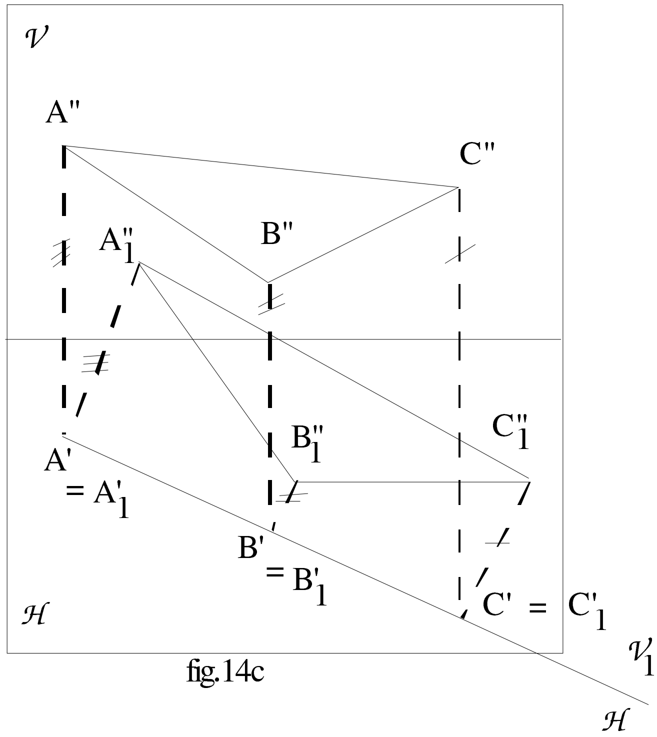



fig.14c

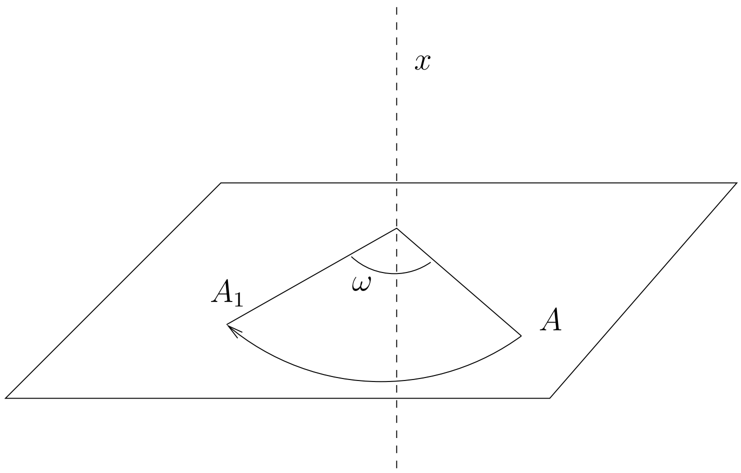
## 3. Wentelen van willekeurige figuren

**3.1. Algemeenheden over wentelen.** Omdat sommige problemen, zoals het bepalen van de ware grootte van een figuur, eenvoudig op te lossen zijn indien de gegevens een bijzondere stand t.o.v. de projectievlakken innemen (zie Paragraaf 2), is het soms nuttig figuren te wentelen tot ze deze bijzondere stand innemen.

Een wenteling is volledig bepaald door de volgende gegevens :

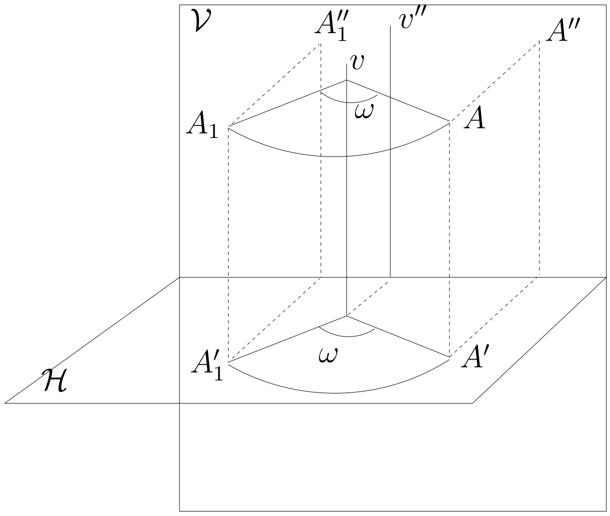
- de as van wenteling $x$;
- de hoek $\omega$ van wenteling (het teken van $\omega$ bepaalt de zin van de wenteling).

Elk punt $A$ van een willekeurige figuur beschrijft dan onder deze wenteling een cirkelboog $AA_1$ over een hoek $\omega$ in een vlak loodrecht op de as $x$.




**3.2. Wentelen om een kopas of een verticale as.** We zullen alleen het geval van een verticale as $v$ over een hoek $\omega$ beschouwen. Het geval van de kopas is volledig analoog en vindt men via het dualiteitsprincipe (Zie ook Paragraaf 3.3)).

Een punt $A$ beschrijft onder deze wenteling een cirkelboog $AA_1$, in een vlak loodrecht op de as $v$, het middelpunt van de boog ligt op $v$ en de middelpuntshoek is $\omega$. Daar $v$ een verticale rechte is, is het vlak van de cirkelboog een horizontaal vlak en wordt de cirkelboog $AA_1$ in ware grootte op $\mathcal{H}$ geprojecteerd. Hierdoor kan men $A_1'$ onmiddellijk in de projectietekening construeren. De cirkelboog wordt in de verticale projectie herleid tot een horizontale rechte door $A''$. Door $A_1'$ op te halen vinden we tenslotte $A_1''$ als het snijpunt van de ophaallijn en de horizontale rechte door $A''$.




Uiteraard kunnen dan rechten en willekeurige figuren gewenteld worden door elk punt van deze figuur te wentelen. (In de praktijk is het uiteraard voldoende om twee punten per rechte of lijnstuk te wentelen.)

### 3.3. Wentelen van een willekeurig vlak tot een kopvlak of verticaal vlak.

Basisconstructie 8. *Wentel een willekeurig vlak $\mathcal{A}$ tot een kopvlak.*

Om deze constructie uit te voeren maken we gebruik van de volgende

Stelling 2.2. *Indien men in een willekeurig vlak $\mathcal{A}$ een horizontale rechte wentelt tot een koprechte, dan is het gewentelde vlak $\mathcal{A}_w$ een kopvlak. (Analoog wentelt men een willekeurig vlak tot een verticaal vlak door een frontrechte te wentelen tot een verticale rechte.)*

Bewijs. Inderdaad, een koprechte staat loodrecht op $\mathcal{V}$. Zodra $\mathcal{A}_w$ een koprechte bevat, staat $\mathcal{A}_w$ dus zelf loodrecht op $\mathcal{V}$. □

Dan geven we nu de oplossing voor Basisconstructie 8.

*Oplossing.* Construeer een horizontale rechte $h = AB$ in $\mathcal{A}$. We willen nu $h$ wentelen tot een koprechte. We zullen daartoe een wenteling uitvoeren rond een verticale rechte door het punt $A$. Teken een koprechte $k$ door het punt $A$. In horizontale projectie kunnen we nu onmiddellijk de wentelhoek $\omega$ aflezen, namelijk de hoek tussen de horizontale projectie $h'$ van $h$ en de horizontale projectie van $k'$ van $k$. Om de positie gewenteld vlak $\mathcal{A}_w$ te kennen volstaat het nog 2 punten van $\mathcal{A}$ te wentelen ($A$ blijft onveranderd daar het op de wentelas ligt), bv. $B$ en $S$. Dit doen we zoals in Paragraaf 3.2: een punt $X$ beschrijft in de horizontale projectie een cirkelboog over een hoek $\omega$ met middelpunt $A'$, en de verticale projectie van het gewentelde punt ligt op een horizontale rechte door $X''$ en vinden we door de horizontale projectie op te halen langs de ophaallijn. □

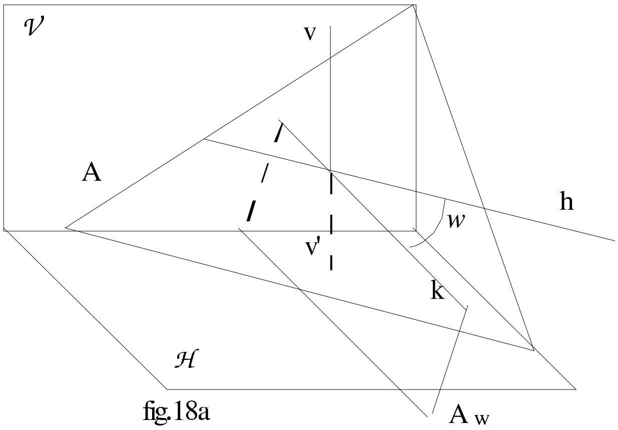



fig.18a

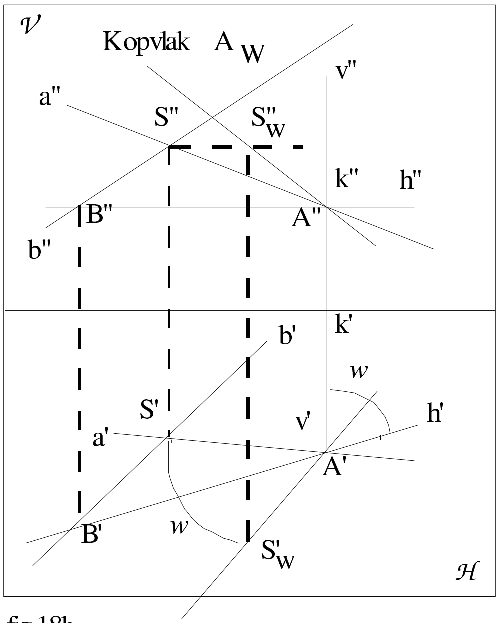



fig.18b

**3.4. Ware groottes.** Wanneer een vlakke figuur in een willeurig vlak $\mathcal{A}$ ligt, kunnen we nu door de technieken van deze en vorige paraaf te combineren de ware grootte van deze figuur bepalen. Inderdaad, eerst wentelen we $\mathcal{A}$ tot een kopvlak (of vertikaal vlak) en vervolgens gebruiken we dit kopvlak (respectievelijk vertikaal vlak) as een nieuw horizontaal (respectievelijk vertikaal) projectievlak.

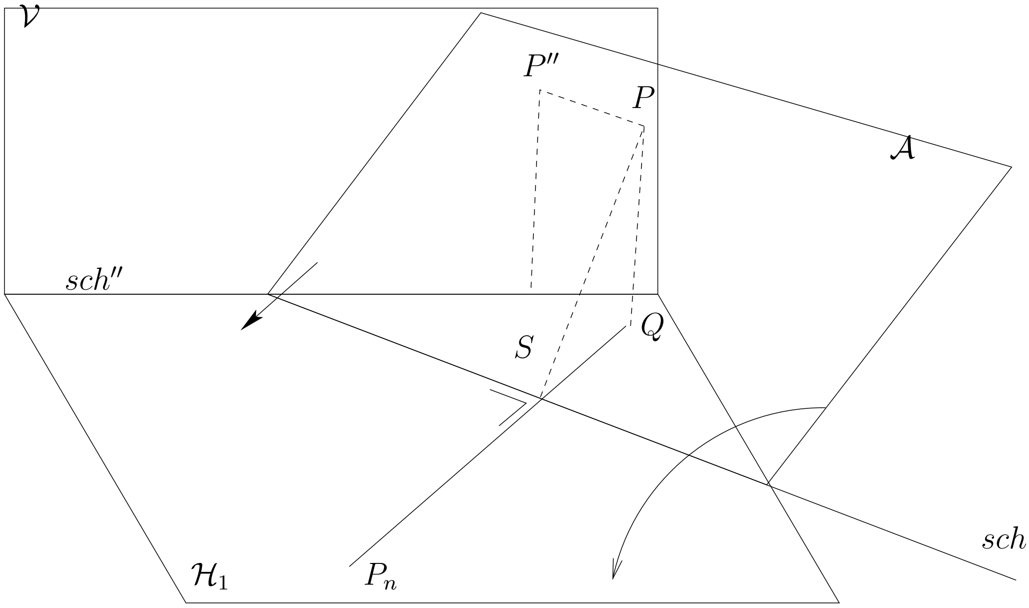
## 4. Neerslaan van een vlakke figuur in een horizontaal vlak

Laat men het vlak $\mathcal{A}$ van een vlakke figuur $F$ om zijn snijlijn met een horizontaal vlak $\mathcal{H}_1$ wentelen, tot het met $\mathcal{H}_1$ samenvalt, dan zegt men dat de vlakke figuur $F$ in het horizontaal vlak $\mathcal{H}_1$ werd neergeslagen. De nieuwe stand $F_n$ van $F$ wordt de neergeslagen figuur genoemd. Terugkeren van $F_n$ naar $F$ heet terugwentelen. De snijlijn van $\mathcal{A}$ en $\mathcal{H}_1$, i.e. de rechte waarrond $F$ neergeslagen wordt, heet het scharnier, en wordt meestal door de notatie *sch* aangeduid. Het scharnier is een horizontale rechte van het vlak $\mathcal{A}$.

**4.1. Neerslaan.** Zij $\mathcal{A}$ een willekeurig vlak en een horizontaal vlak $\mathcal{H}_1$. Beschouw een punt $P \in \mathcal{A}$, we willen dit punt neerslaan tot een punt $P_n$ in $\mathcal{H}_1$.

Stel $sch = \mathcal{A} \cap \mathcal{H}_1$, de scharnierrechte. Aangezien we $\mathcal{A}$ moeten wentelen rond $sch$, ligt $P_n$ op de snijlijn $\ell$ van $\mathcal{H}_1$ en het vlak $\mathcal{B}$ door $P$ loodrecht op $sch$. (Fig.19a). Het vlak $\mathcal{B}$ staat loodrecht op een horizontaal vlak en is dus zelf een verticaal vlak, bijgevolg is zijn horizontale projectie een rechte. Er geldt : $\mathcal{B}' = \ell' \perp sch'$.

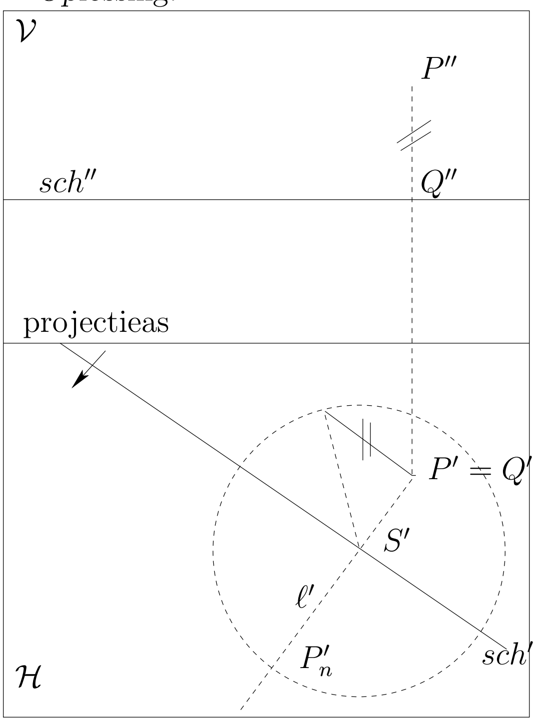
Zij nu $S$ het snijpunt van $\ell$ en $sch$. Dan is $S$ het middelpunt van de cirkelboog beschreven door $P$ bij het neerslaan. Wat we nodig hebben is de afstand van $P$ tot $S$, m.a.w. de straal van de cirkelboog beschreven door $P$. Deze afstand vinden we a.d.h.v. de regel van de rechthoekige driehoek. Inderdaad, stel $Q$ de orthogonale projectie van $P$ op $\mathcal{H}_1$. Het lijnstuk $PS$ is dan de schuine zijde van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden $PQ$ en $QS$. Er geldt $d(Q, S) = d(Q', S') = d(P', S')$ (want $Q' = P'$ en het lijnstuk $QS$ is horizontaal); en $d(P, Q) = d(P'', sch'')$ (want $PQ$ is een verticaal lijnstuk). Passen we nu de gevonden afstand af op $\ell$ vanuit $S$ (zie fig.19b), dan vinden we $P_n$.




Dit leidt tot de volgende

Basisconstructie 9. *Neerslaan van een punt $P$ uit een willekeurig vlak $\mathcal{A}$ tot een punt $P_n$ van een horizontaal vlak $\mathcal{H}_1$.*

*Oplossing.*




(1) We construeren (indien deze niet gegeven is) de scharnierrechte $sch$, m.a.w. $sch'' = \mathcal{H}_1''$ en $sch'$ vinden we via Basisconstructie 1.
(2) Vervolgens trekken we door $P'$ de loodlijn $\ell'$ op $sch'$ ($\ell'' = sch'' = \mathcal{H}_1''$) en we stellen $S = \ell \cap sch$.
(3) In $P'$ en loodrecht op $\ell'$ passen we de afstand van $P''$ tot $sch''$ af, dit geeft ons een rechthoekige driehoek met $P'S'$ als een der rechthoekszijden
(4) Vanuit $S'$ trekken we een cirkelboog met als straal de lengte van de schuine zijde van de rechthoekige driehoek.
(5) Het snijpunt van deze cirkelboog met $\ell'$ geeft ons de horizontale projectie $P_n'$ van $P_n$. $P_n''$ vinden we door $P_n'$ op te halen naar $\ell''$.

□

Opmerkingen 2.3. (i) Merk op dat in (5) van Basisconstructie 9 er twee snijpunten van de cirkelboog met $\ell'$ bestaan. Om dubbelzinnigheden te vermijden, zal men verplicht zijn de zin van het neerslaan aan te duiden. Dit wordt gedaan met een rechtlijnig pijltje loodrecht op het scharnier. (Zie ook fig.19a en 19b). Het pijltje wijst het halfvlak van $\mathcal{H}_1$ aan waarin de punten van $\mathcal{A}$ komen te vallen die boven $\mathcal{H}_1$ liggen.

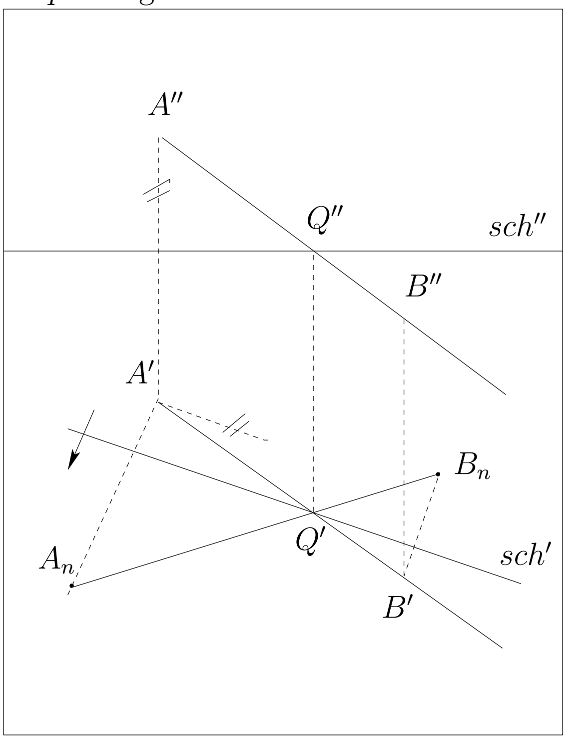
(ii) Het spreekt vanzelf dat we vlakke figuren ook kunnen neerslaan in een frontvlak. De werkwijze is analoog als hierboven beschreven (dualiteitsprincipe).

(iii) De technieken van neerslaan, wentelen en veranderen van projectievlak lenen er zich uitstekend toe ware groottes van allerlei aard te bepalen.

**4.2. Terugwentelen.** In deze paragraaf behandelen we het omgekeerde probleem van de vorige paragraaf: we kennen de neergeslagen stand $P_n$ van een punt $P$ uit een vlak $\mathcal{A}$ dat in een horizontaal vlak werd neergeslagen. Gevraagd wordt het punt $P$ te reconstrueren.

Basisconstructie 10. *Beschouw een punt $B_n$ in een horizontaal vlak $\mathcal{H}_1$. Zij sch de (gegeven) snijlijn van $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{A}$ het vlak bepaald door sch en een punt $A$. Bepaal het punt $B$ van $\mathcal{A}$ dat op $B_n$ wordt neergeslagen (we noemen dit het terugwentelen van $B_n$ tot $B$).*

*Oplossing.*




(1) We tekenen de loodlijn $\ell$ op $sch'$ door $B_n'$. De horizontale projectie $B'$ van $B$ ligt op $\ell$
(2) We bepalen de neergeslagen stand van A (zie Basisconstructie 9).
(3) Construeer het snijpunt $Q$ van $A_nB_n$ met $sch$.
(4) $B'$ is snijpunt van $A'Q'$ met $\ell$.
(5) Tenslotte vinden we zoals gewoonlijk $B''$ als het snijpunt van $A''Q''$ en ophaallijn door $B'$

□

Opmerkingen 2.4. (1) De correctheid van de oplossing van Basisconstructie 10 volgt uit het feit dat een rechte $AB$ uit $\mathcal{A}$ neergeslagen wordt tot een rechte $A_nB_n$ in $\mathcal{H}_1$ en dat de punten van de scharnierrechte (zoals $Q$) onveranderd blijven.

(2) In het algemeen is het mogelijk dat $AB$ en $sch$ evenwijdig zijn. Probeer zelf uit te maken wat je in zo'n geval moet doen.

HOOFDSTUK 3

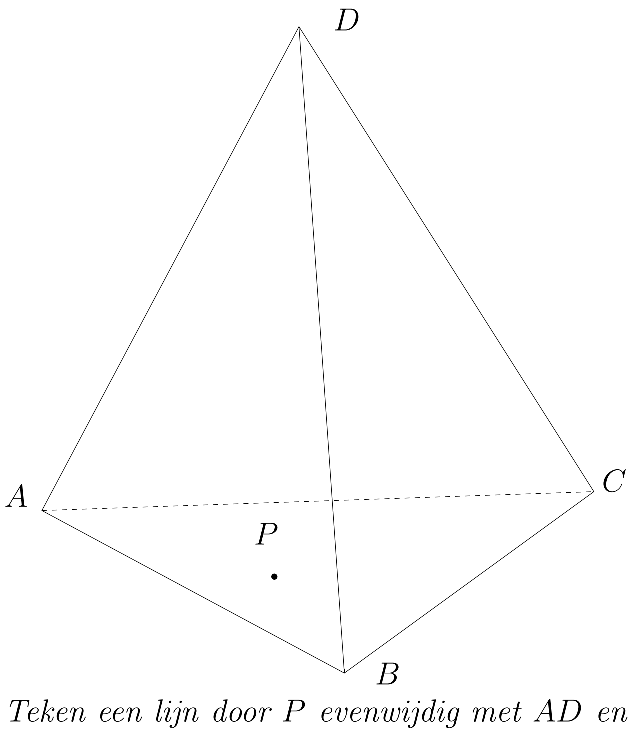
# Ruimtelijke Constructies

In dit hoofdstuk stappen we af van de Methode van Monge. In tegenstelling tot de vorige twee hoofdstukken beschouwen we onze tekeningen niet als orthogonale projecties van een driedimensionale situatie, maar beschouwen we het driedimensionaal object op zich en gaan we te werk alsof we onze constructies in de ruimte zelf uitvoeren. Het is dan de bedoeling om aan de hand van gekende eigenschappen van punten, rechten en vlakken via constructies eigenheden van het driedimensionale object te achterhalen.

De meetkundige eigenschappen waarvan we gebruik maken zijn vrij eenvoudig : zo hebben twee niet evenwijdige rechten in de ruimte een snijpunt als en slechts als ze in hetzelfde vlak liggen. Ook de eigenschappen uit Paragraaf 5.1 en Paragraaf 6.1 kunnen van pas komen.

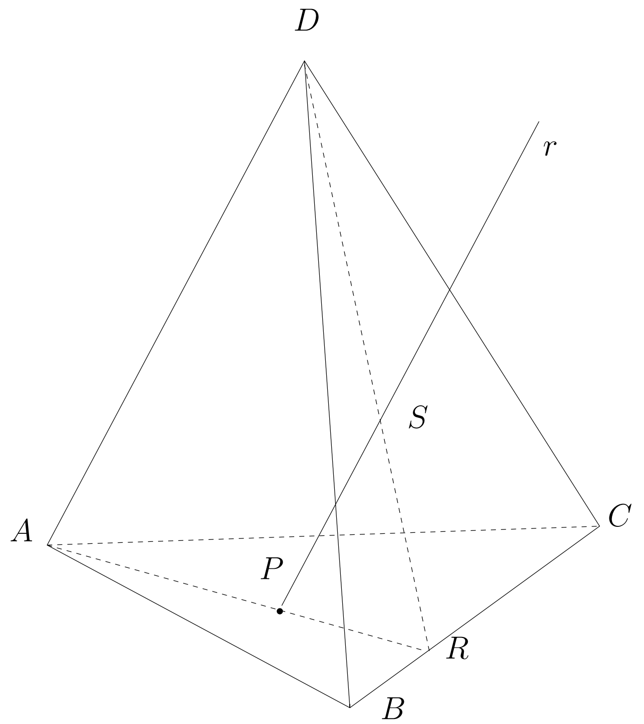
We geven tot slot een voorbeeld om deze methode te illustreren.

VRAAGSTUK 3.1. *Zij $P$ een punt gelegen in het vlak $ABC$ van de piramide $ABCD$.*




*Teken een lijn door $P$ evenwijdig met $AD$ en construeer het snijpunt van deze lijn met het vlak $BDC$.*

*Oplossing.* We tekenen de rechte $r$ door $P$ evenwijdig met $AD$. Deze rechte kruist de rechten $BD$, $BC$ en $CD$. Bijgevolg zullen we zonder een bijkomende constructie het gevraagde punt niet kunnen construeren. We kunnen immers slechts snijpunten bepalen van rechten die in eenzelfde vlak liggen!

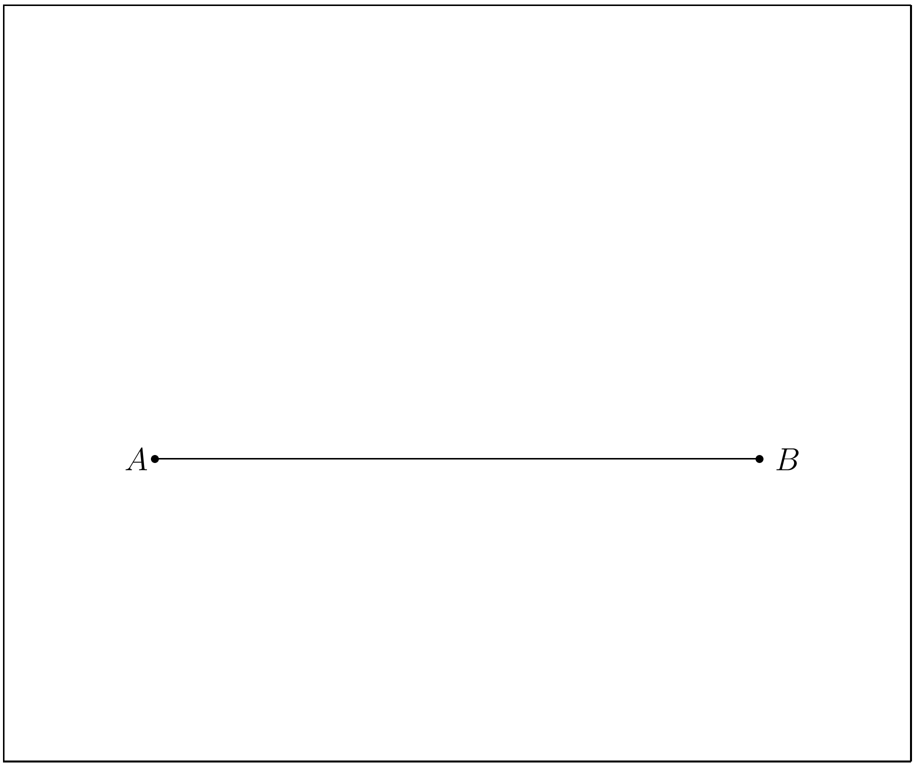



We zullen nu een hulpvlak beschouwen dat $r$ en een punt van de piramide bevat. De beste keuze is duidelijk het vlak $APD$, aangezien de rechte $r$ hier inligt, maar ook twee punten $A$ en $D$ (immers $AD//r$). Aangezien de rechte $AP$ in het vlak $ABC$ ligt, snijdt ze de rechte $BC$ in het punt $R$ dat dus ook in het vlak $APD$ ligt. De rechte door $P$ evenwijdig met $AD$, snijdt de rechte $RD$ (die in het vlak $BCD$ ligt) in het punt $S$. $S$ is het gezochte punt. $\square$

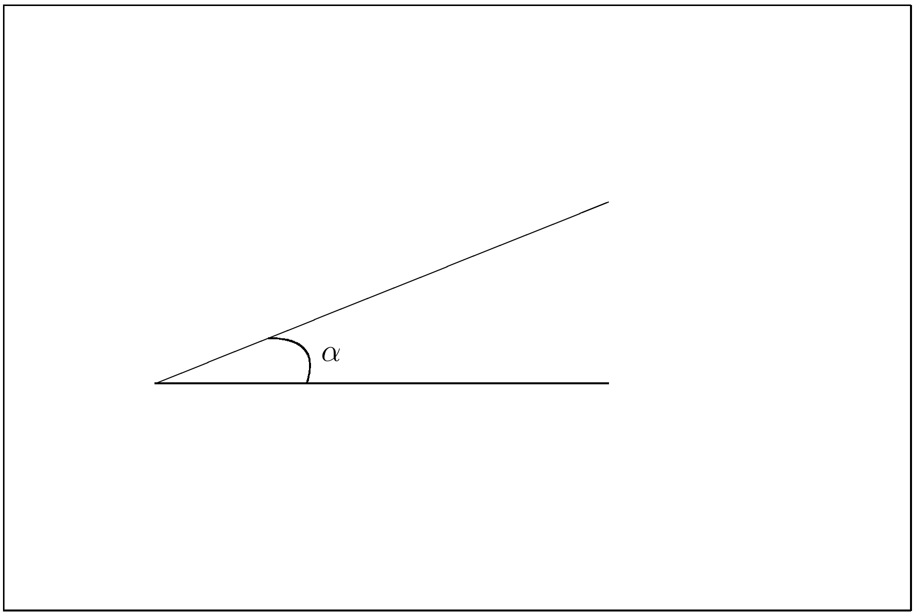
# Oefeningen

## Reeks 0 : Passer en liniaal constructies

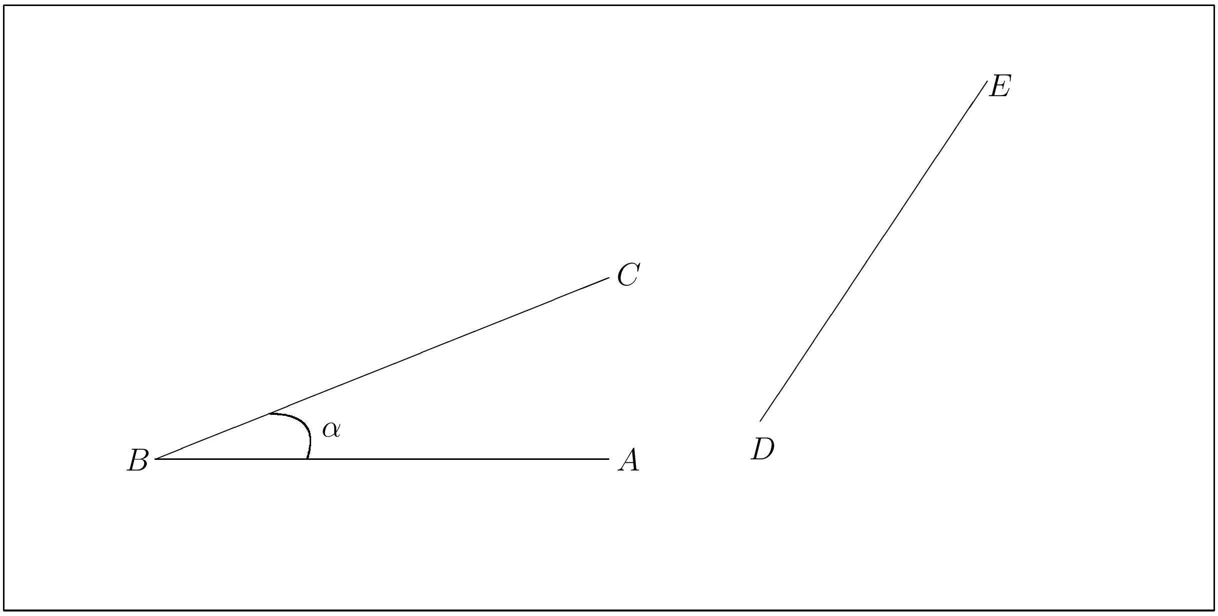
**Oefening 0.1** Construeer de middelloodlijn van het lijnstuk $AB$ en verklaar de constructie.



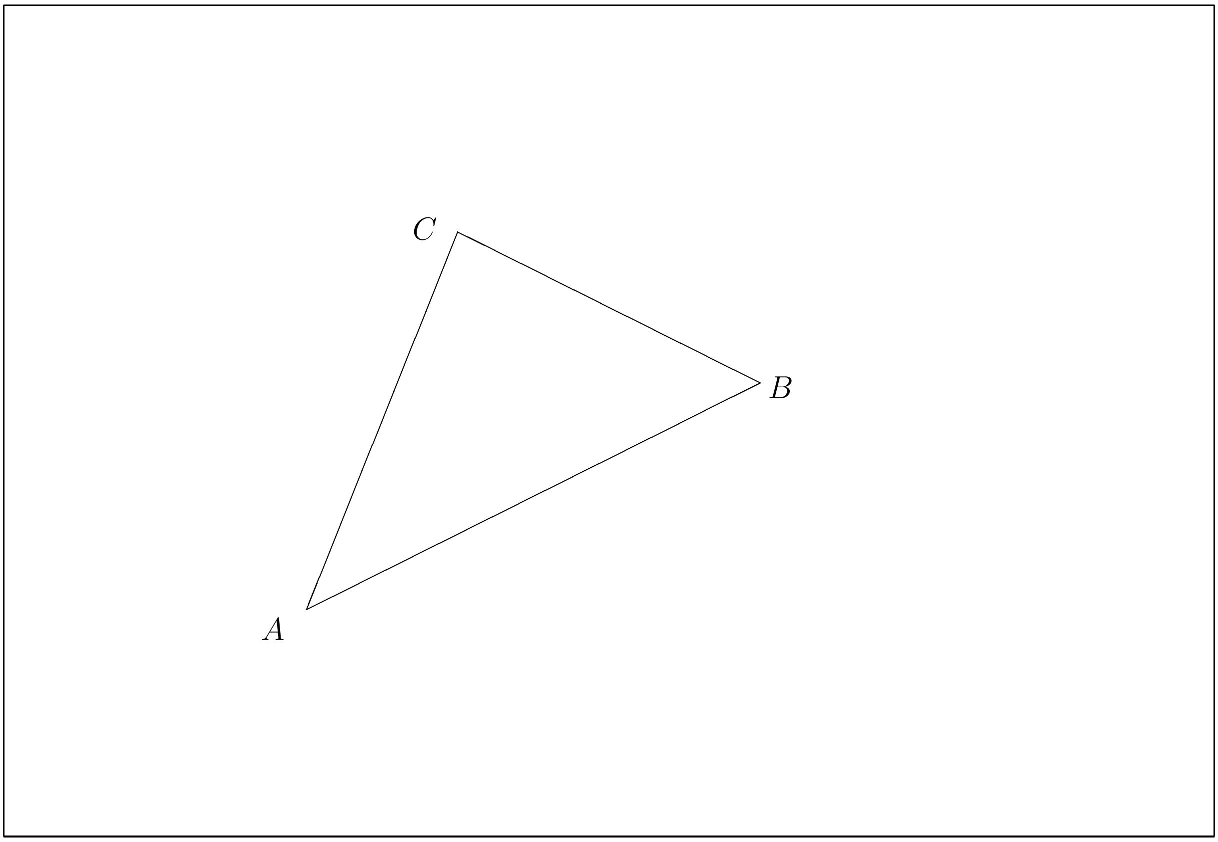

**Oefening 0.2** Construeer de bissectrice van de hoek $\alpha$ en verklaar de constructie.



**Oefening 0.3** Gegeven is een hoek $\alpha$ tussen de lijnstukken $AB$ en $BC$ en het lijnstuk $DE$. Construeer een punt $F$, zodat het lijnstuk $EF$ eveneens een hoek $\alpha$ vormt met het lijnstuk $DE$.




**Oefening 0.4** Gegeven de hoek $\alpha$ uit Oefening 0.3, wentel dan de driehoek $ABC$ over de hoek $\alpha$ rond het punt $A$.

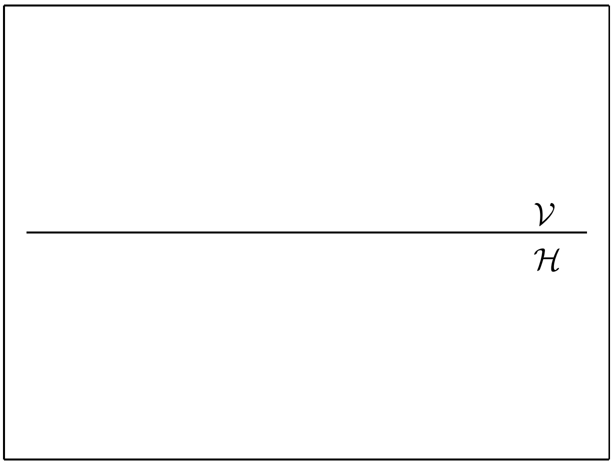


# Reeks 1 : Vlakke Constructies - De methode van Monge

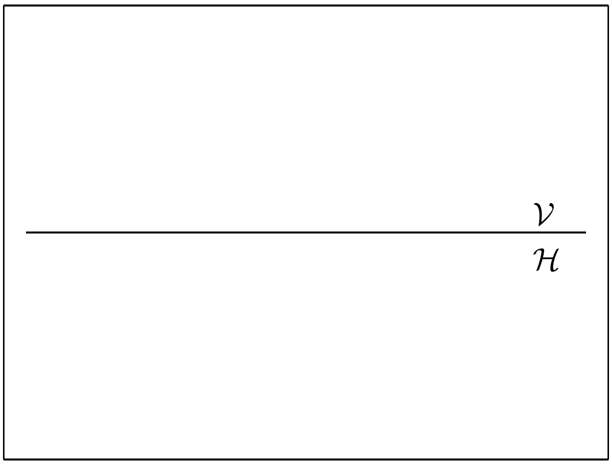
## Oefening 1.1 — Basisbegrippen projectieleer

Teken de horizontale en vertikale projectie voor:

Horizontale rechte:



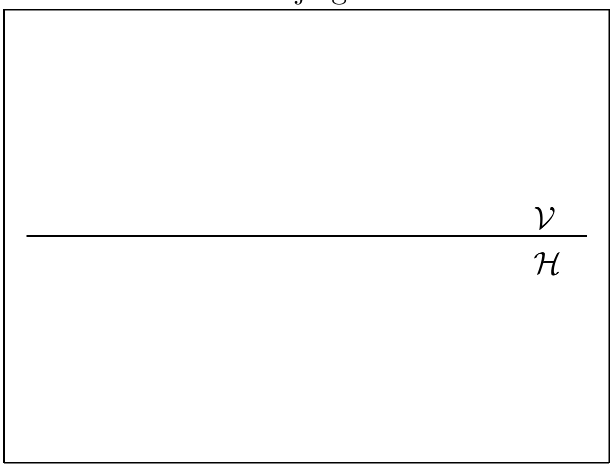

Frontrechte:



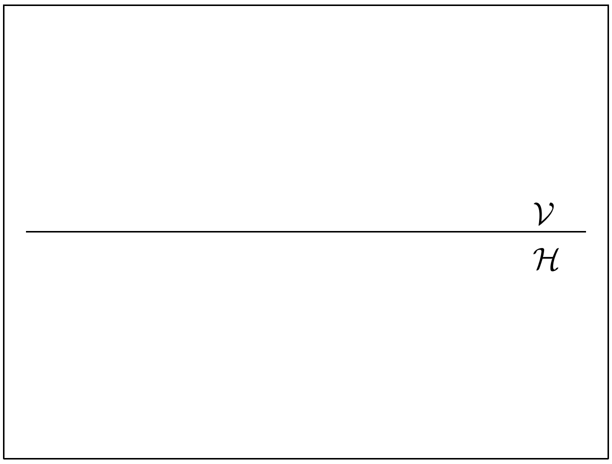

Verticale rechte:


Koprechte:


Twee evenwijdige rechten:



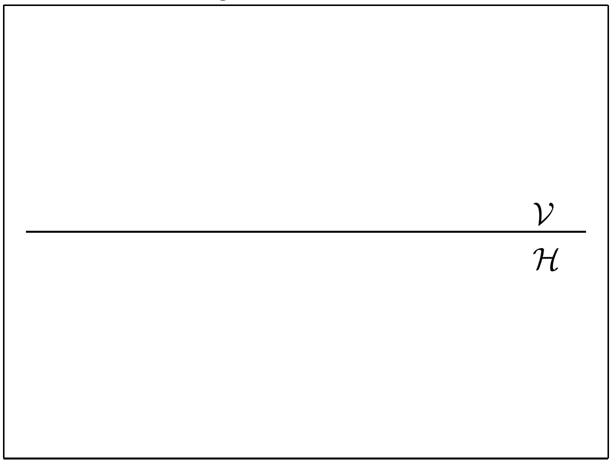

Profielrechte:



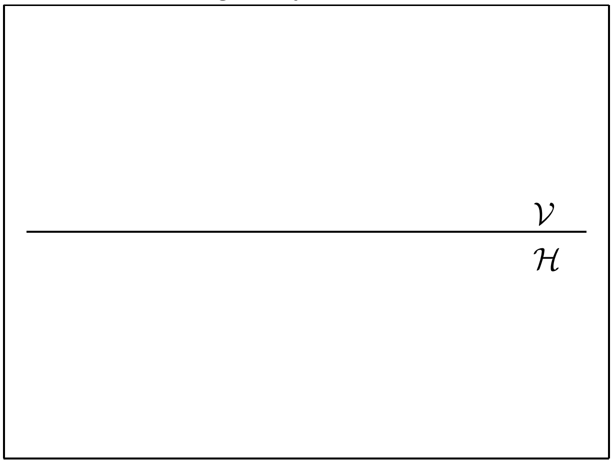
**Oefening 1.2** **Basisbegrippen projectieleer**

Teken de horizontale en vertikale projectie voor:

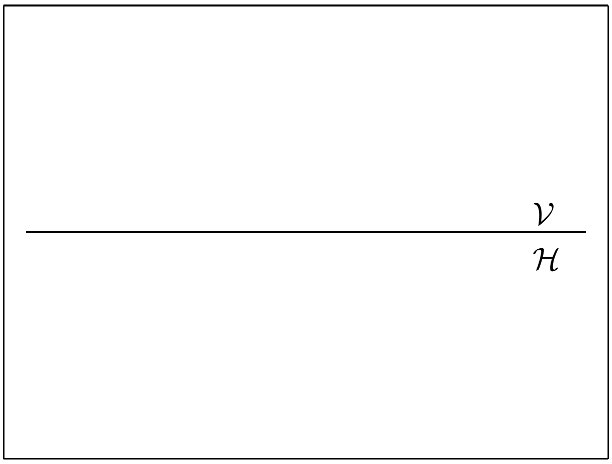
Twee willekeurige kruisende rechten:



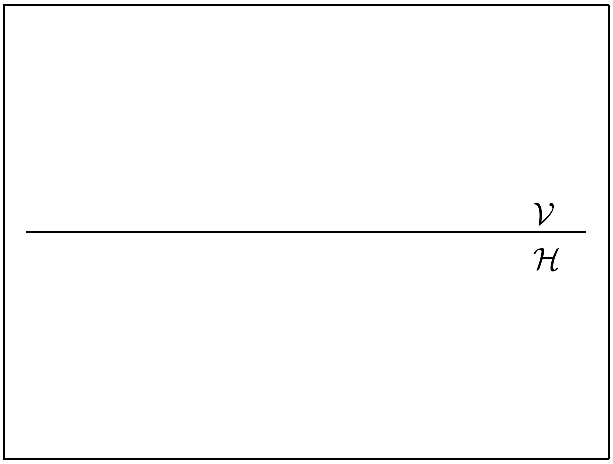

Twee willekeurige snijdende rechten:




Een horizontaal vlak, voorgesteld door twee rechten:

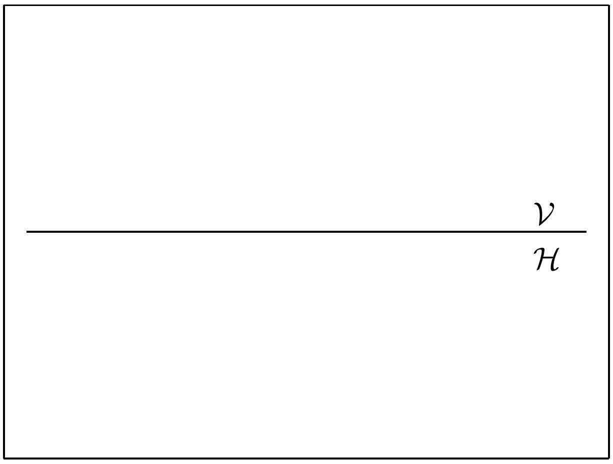



Een vlak evenwijdig met de projectieas:



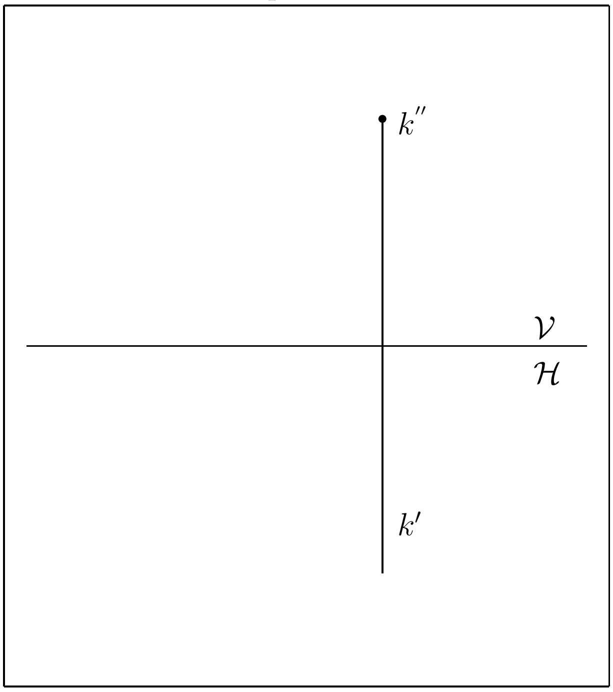

Een vlak loodrecht op de projectieas:


Een verticaal vlak:

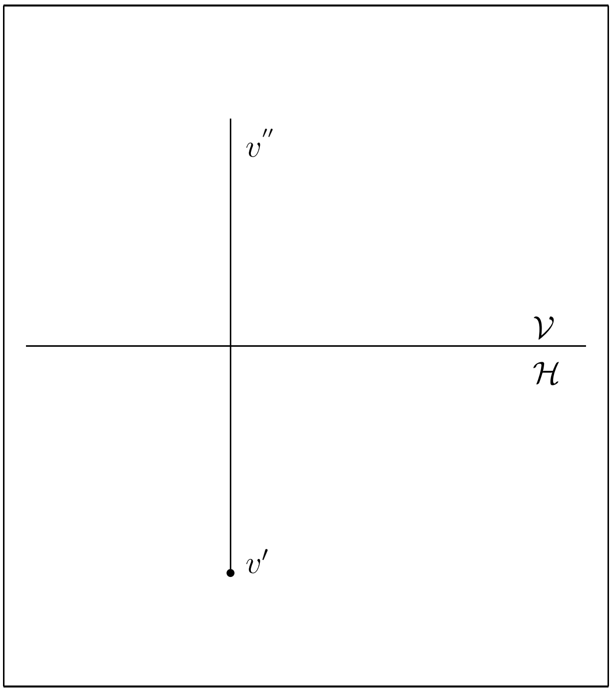


Teken een rechte loodrecht op de gegeven rechte

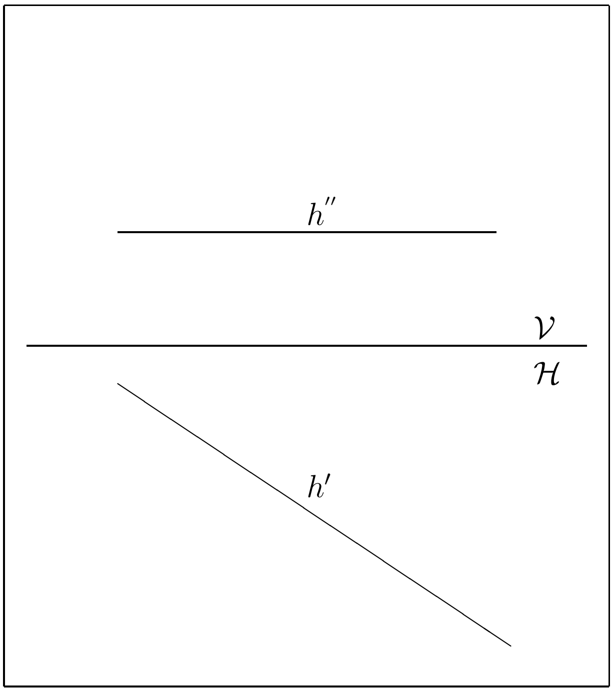
Koprechte:



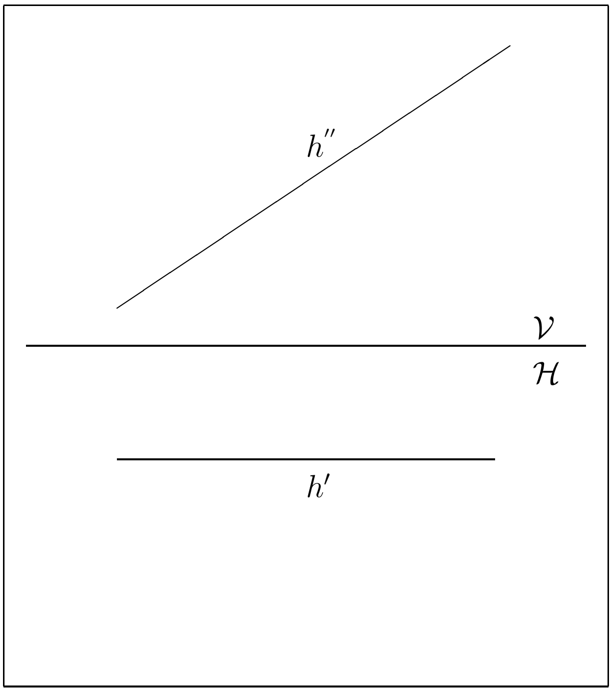

Verticale rechte:



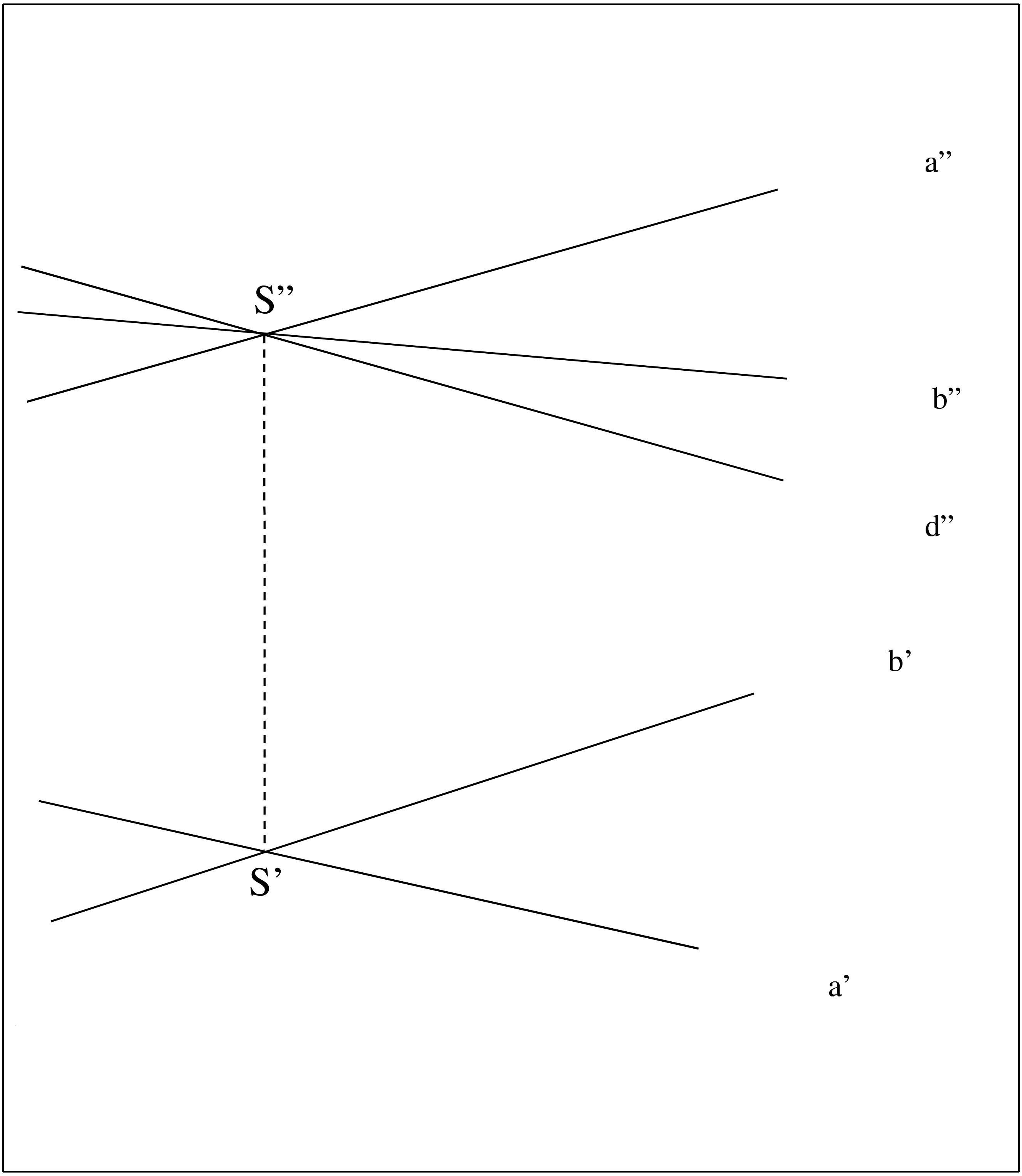

Horizontale rechte:



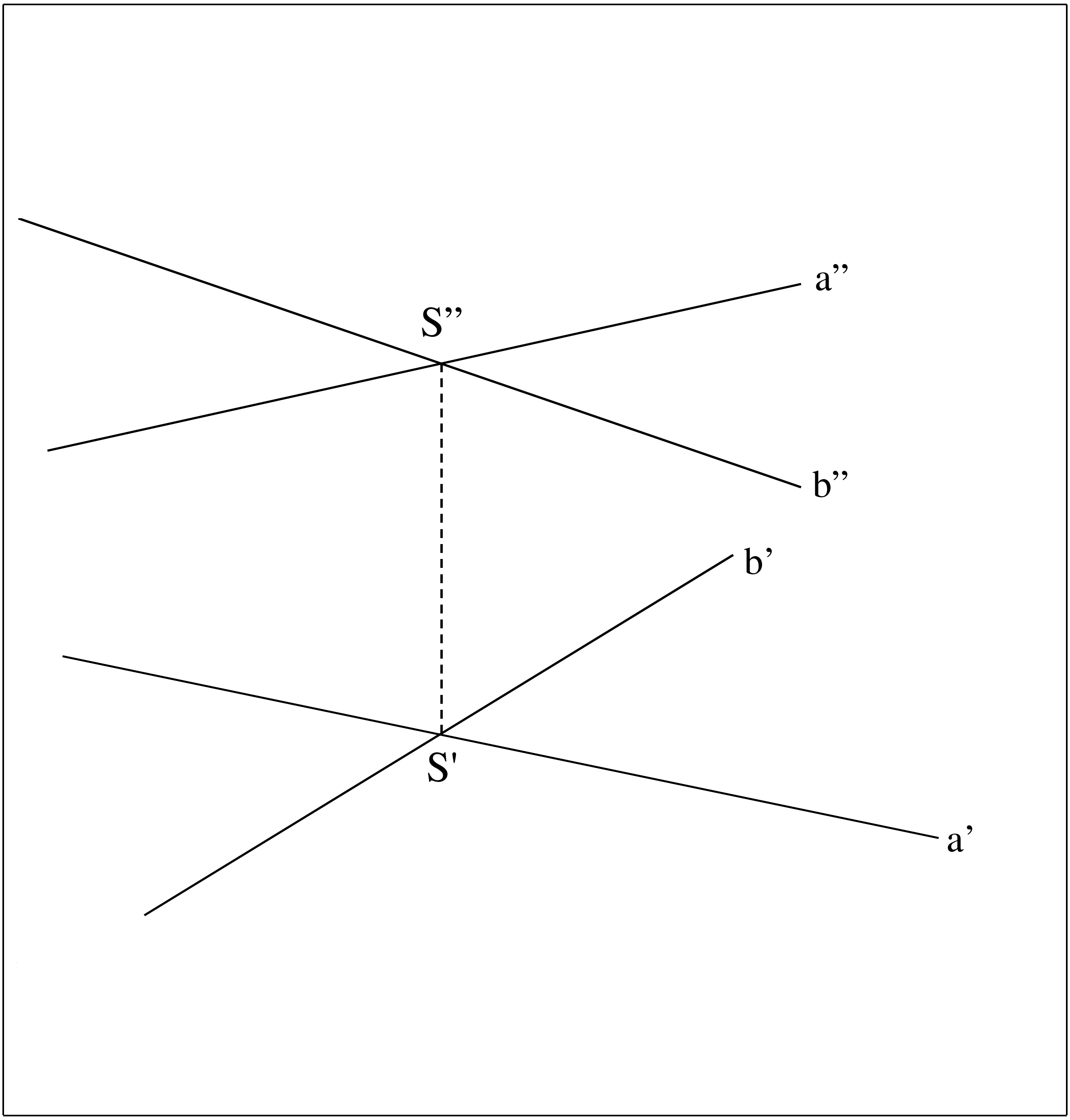

Frontrechte:



Een vlak wordt voorgesteld door 2 rechten $a$ en $b$. De rechte $d$ ligt in $ab$.
Teken de ontbrekende projectie.

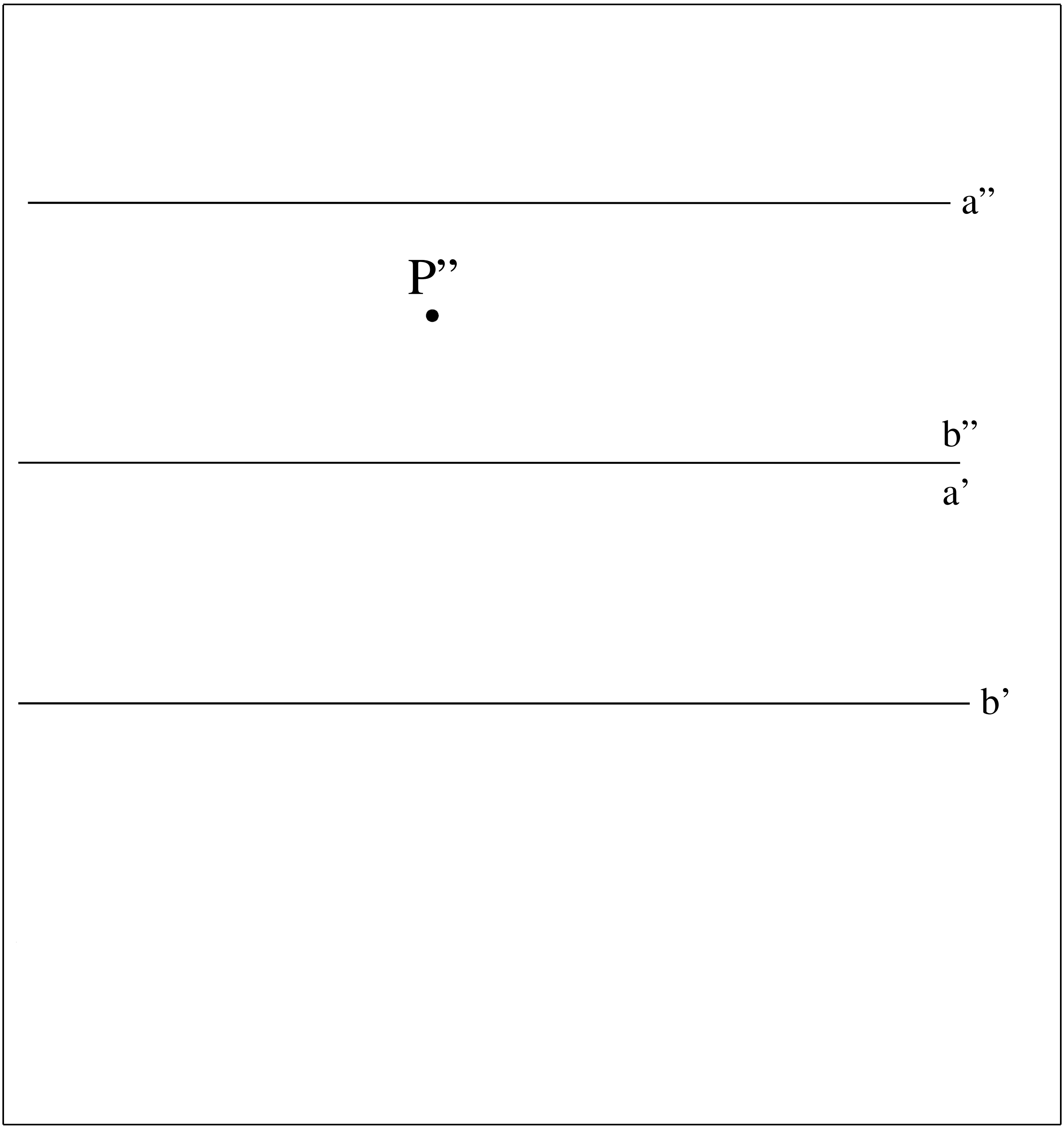


Construeer een horizontale rechte $h$ en een frontrechte $f$ van het gegeven vlak $ab$.



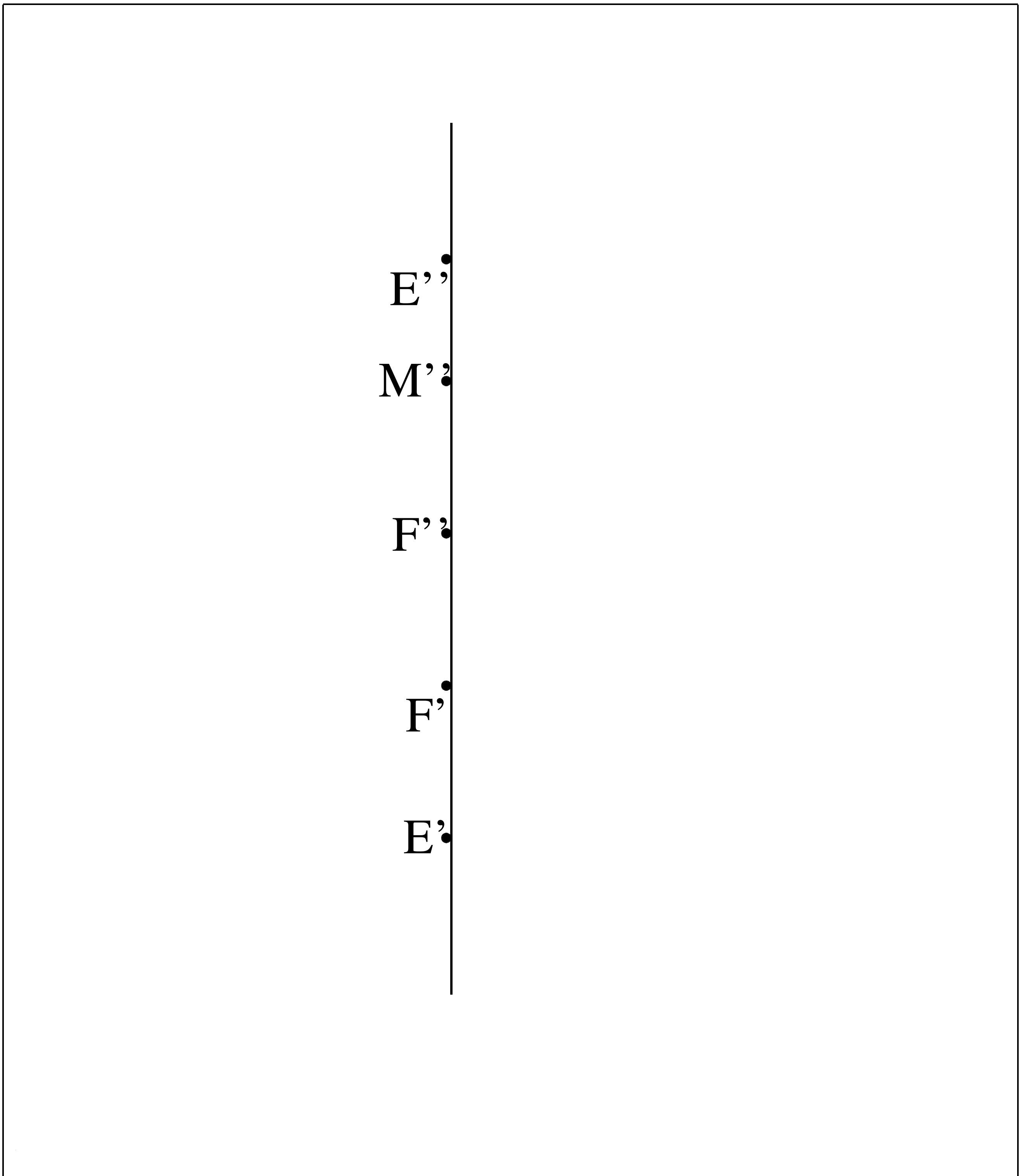
**Oefening 1.6** **Punt in een gegeven vlak**

Teken de ontbrekende projectie van het punt $P$. $P$ ligt in het vlak $ab$, evenwijdig met de projectieas.

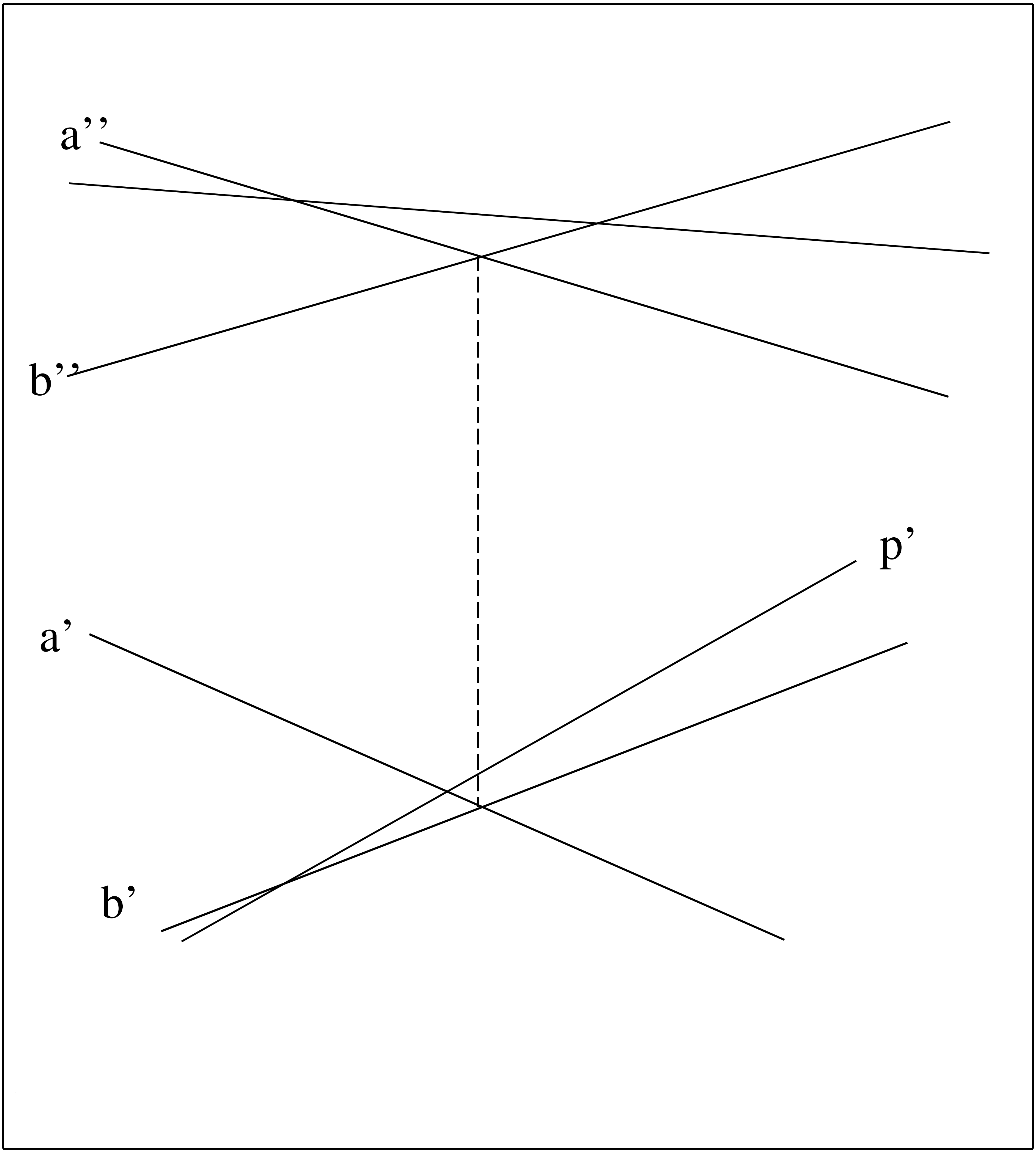


**Oefening 1.7** **Punt op een rechte**

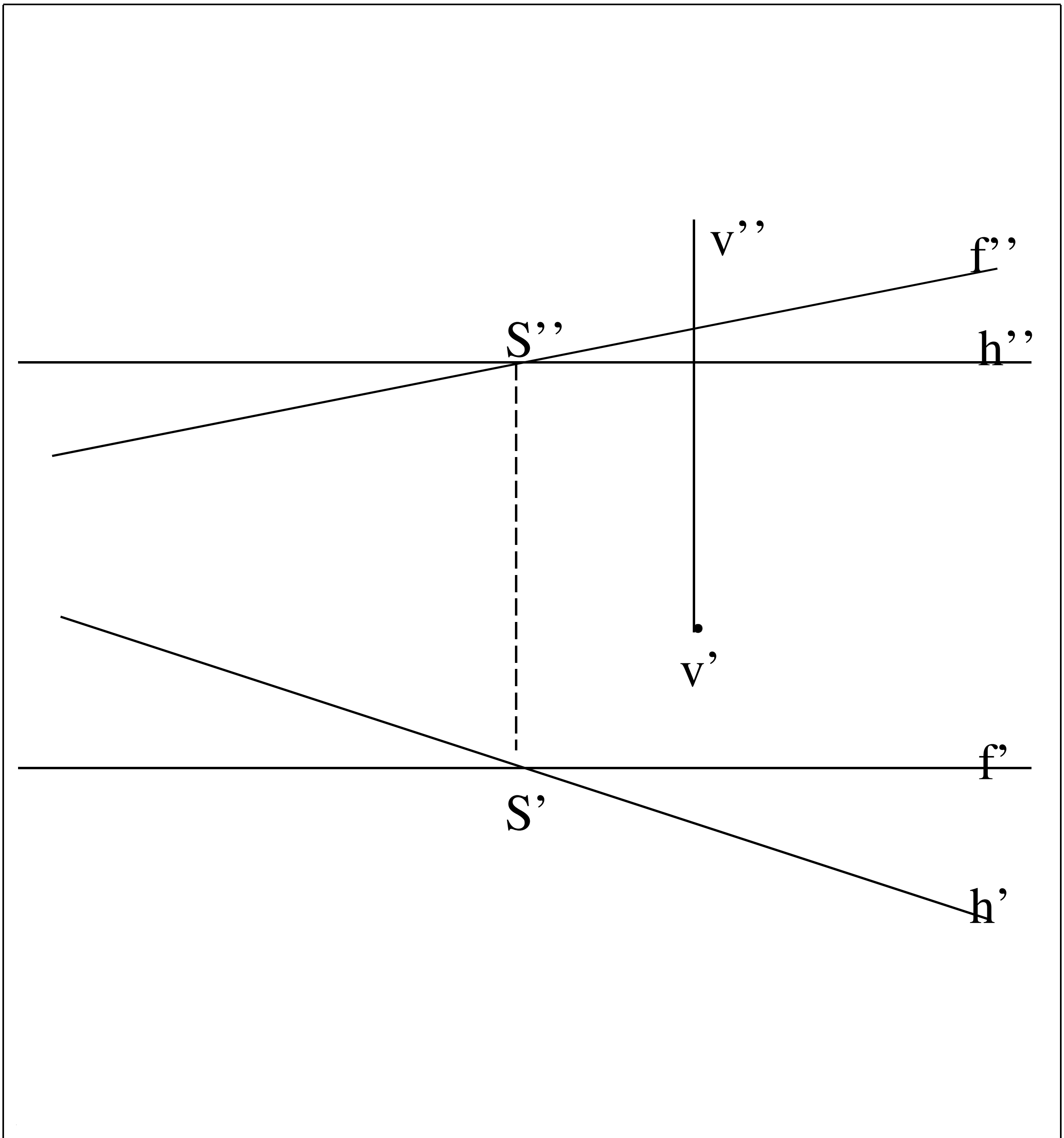
Teken de ontbrekende projectie van het punt $M$, gelegen op de profielrechte $EF$.



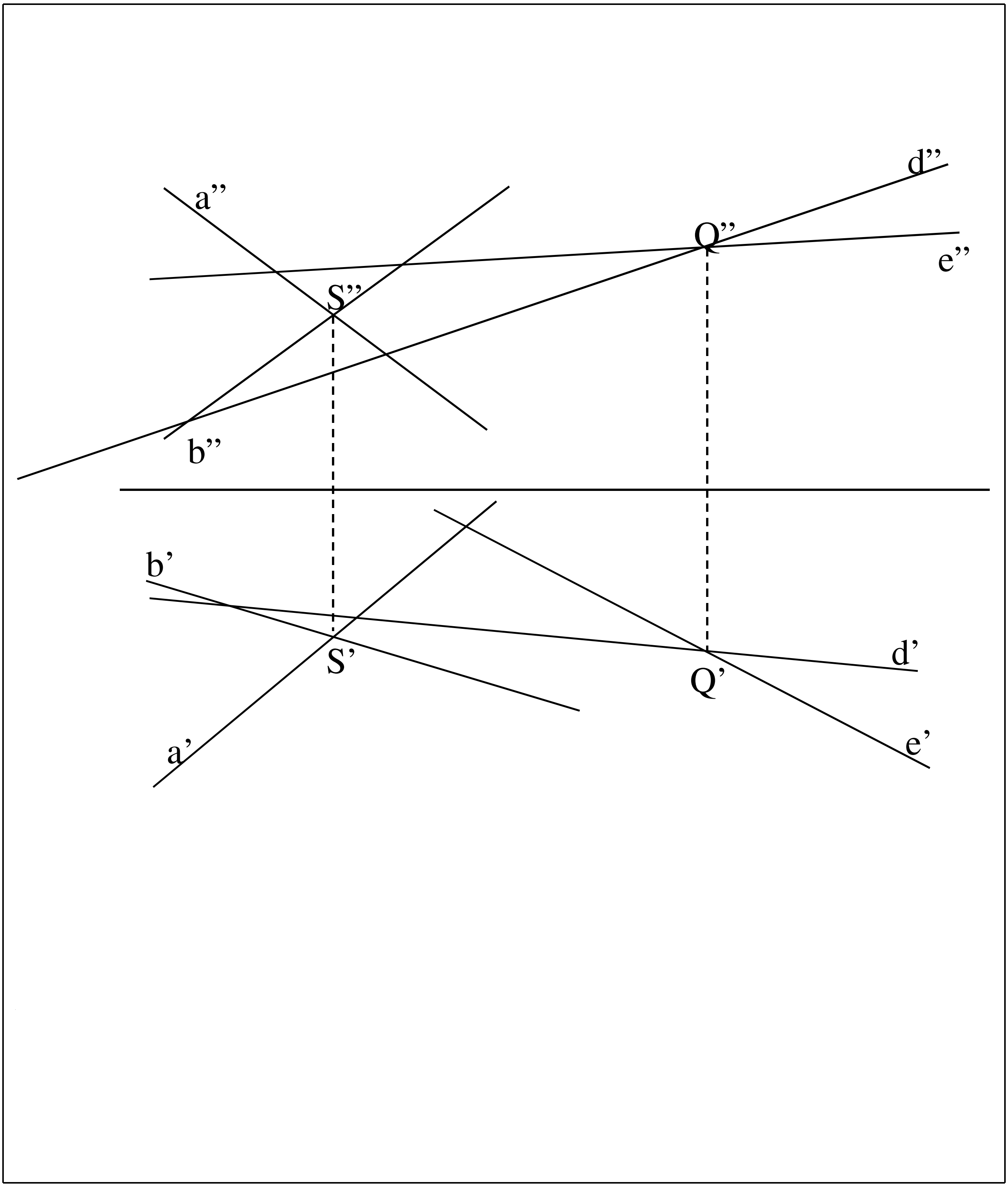
Construeer het snijpunt $S$ van het vlak $ab$ en de rechte $p$.



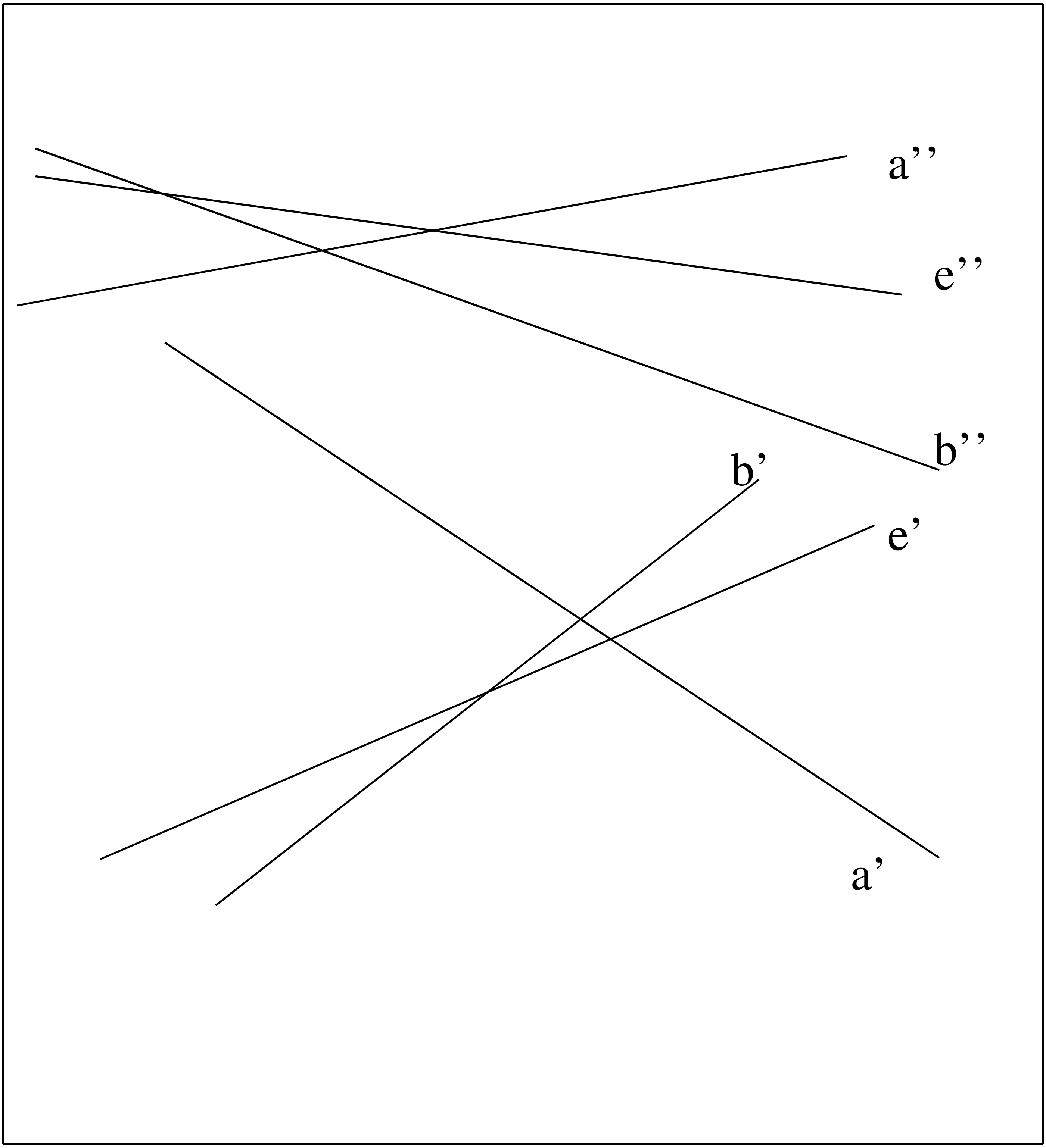
Construeer het snijpunt van een willekeurig vlak met de vertikale rechte $v$.



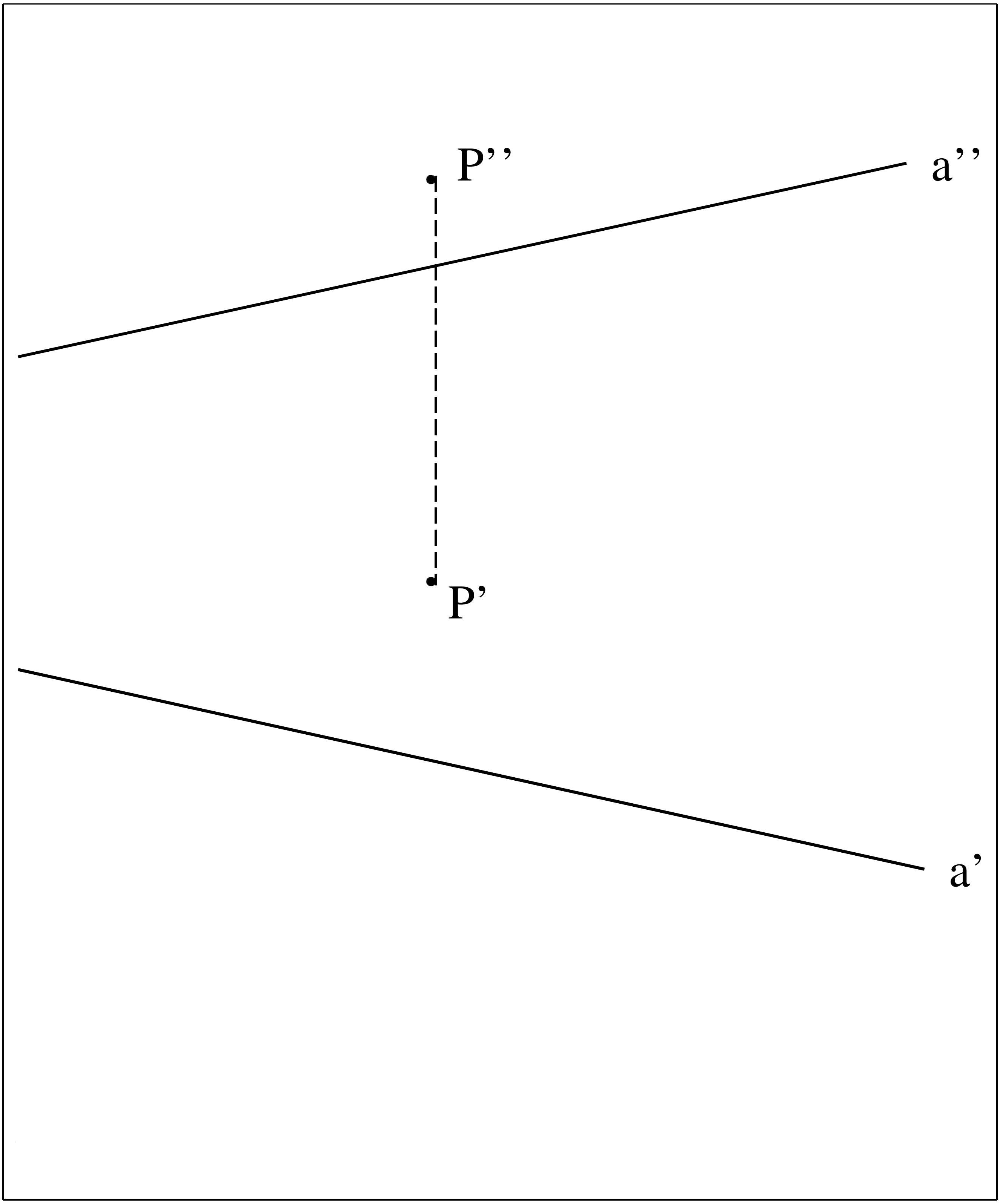
Bepaal de snijding tussen de vlakken *ab* en *de*.



Construeer de rechte $p$ die evenwijdig is met een gegeven rechte $e$ en die steunt op twee gegeven kruisende rechten $a$ en $b$.

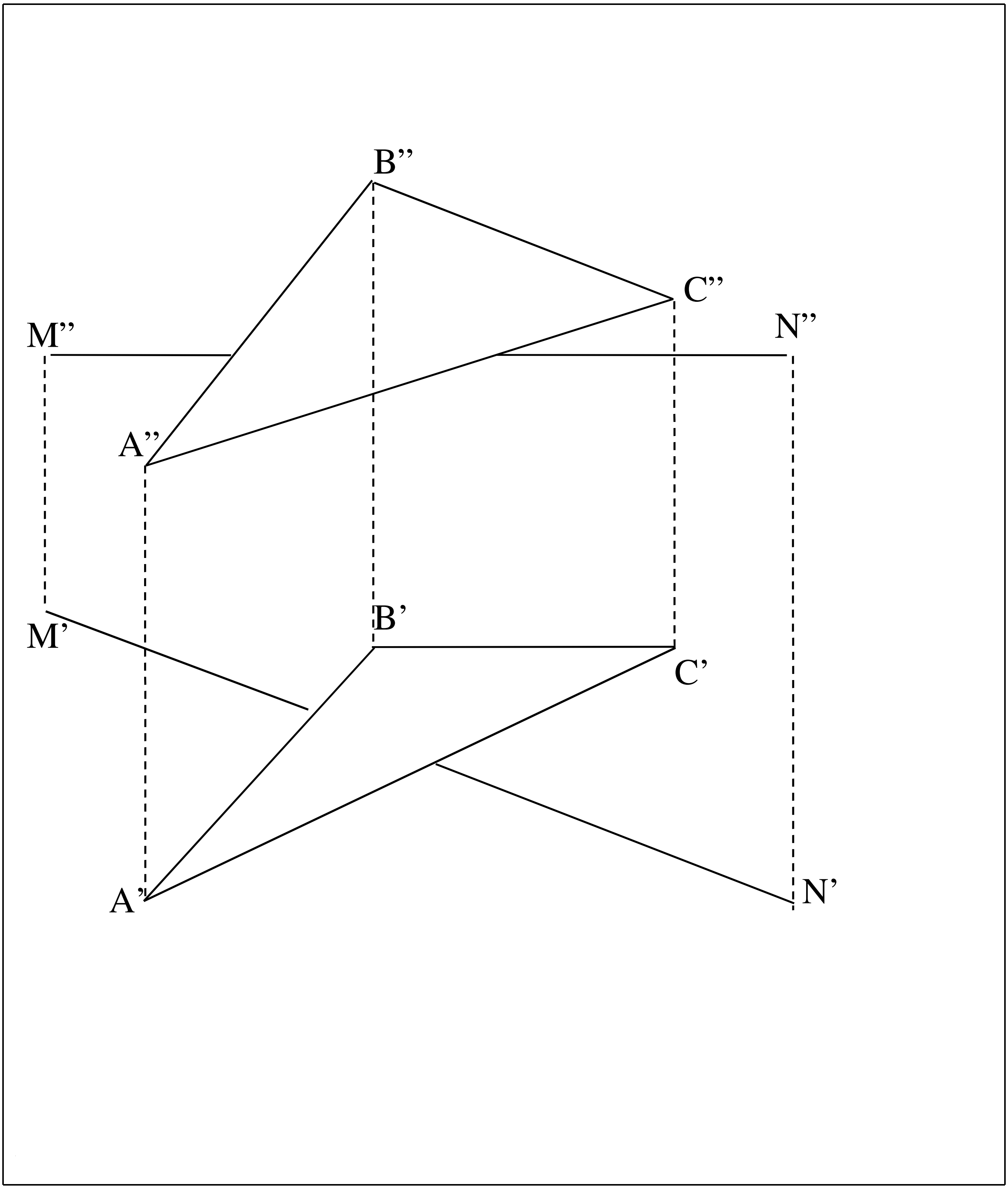


Construeer het vlak door het punt $P$ en loodrecht op $a$.



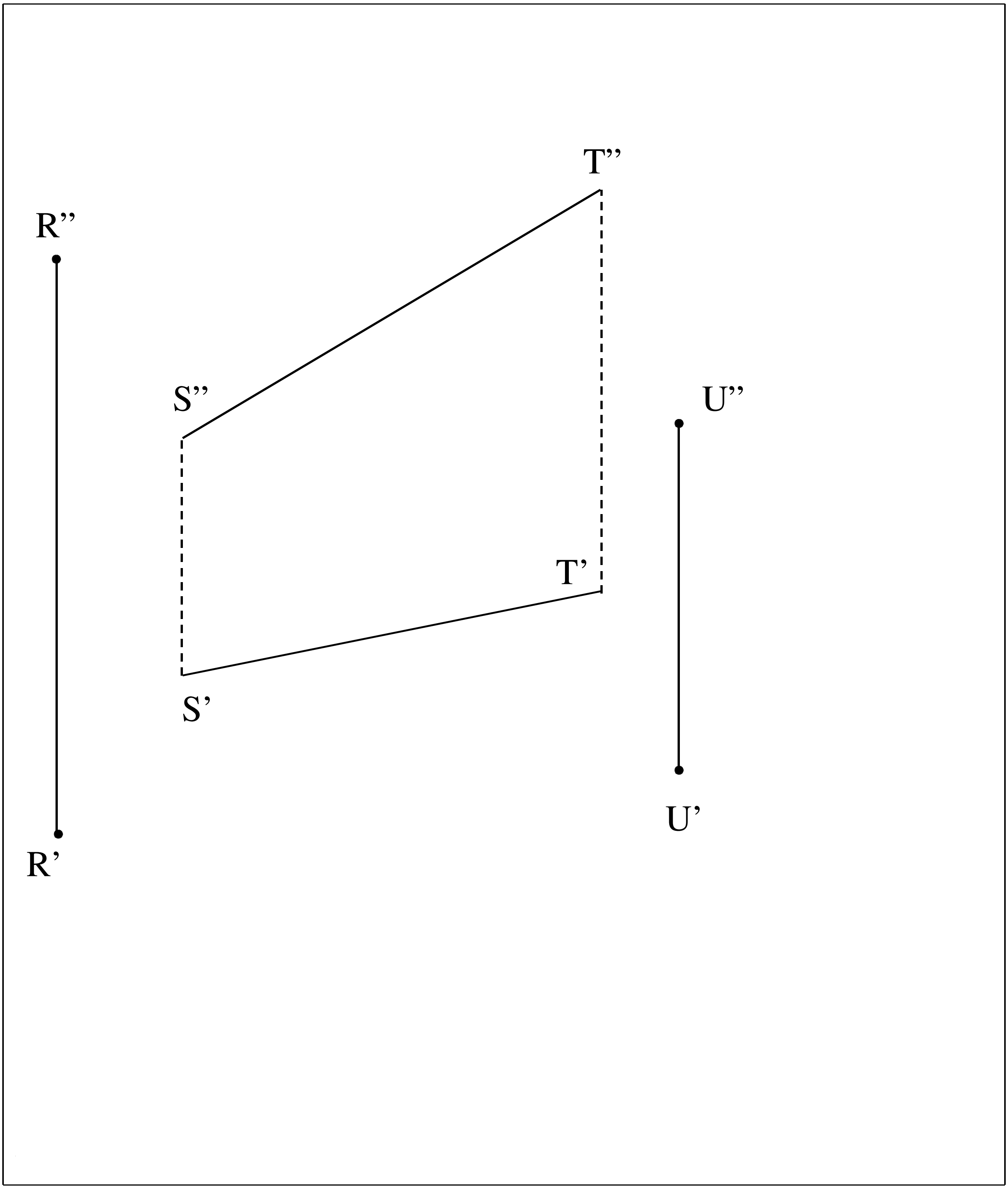
**Oefening 1.13** **Zichtbaarheid**

Bepaal het snijpunt van $MN$ met de driehoek $ABC$. Teken onzichtbare lijnstukken in stippellijn.



**Oefening 1.14** **Zichtbaarheid**

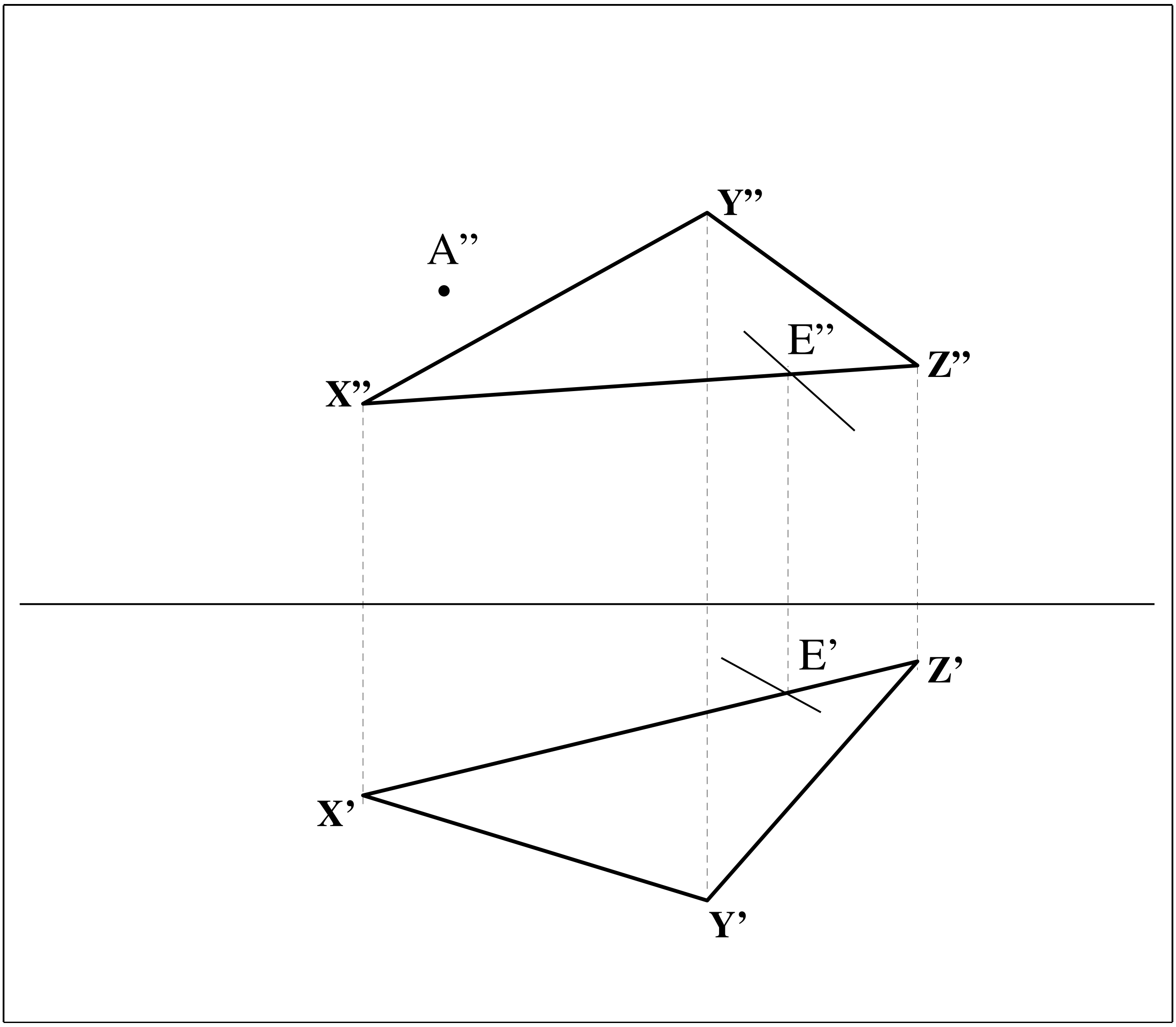
Teken de driehoeken $RST$ en $STU$ met de juiste zichtbaarheid.



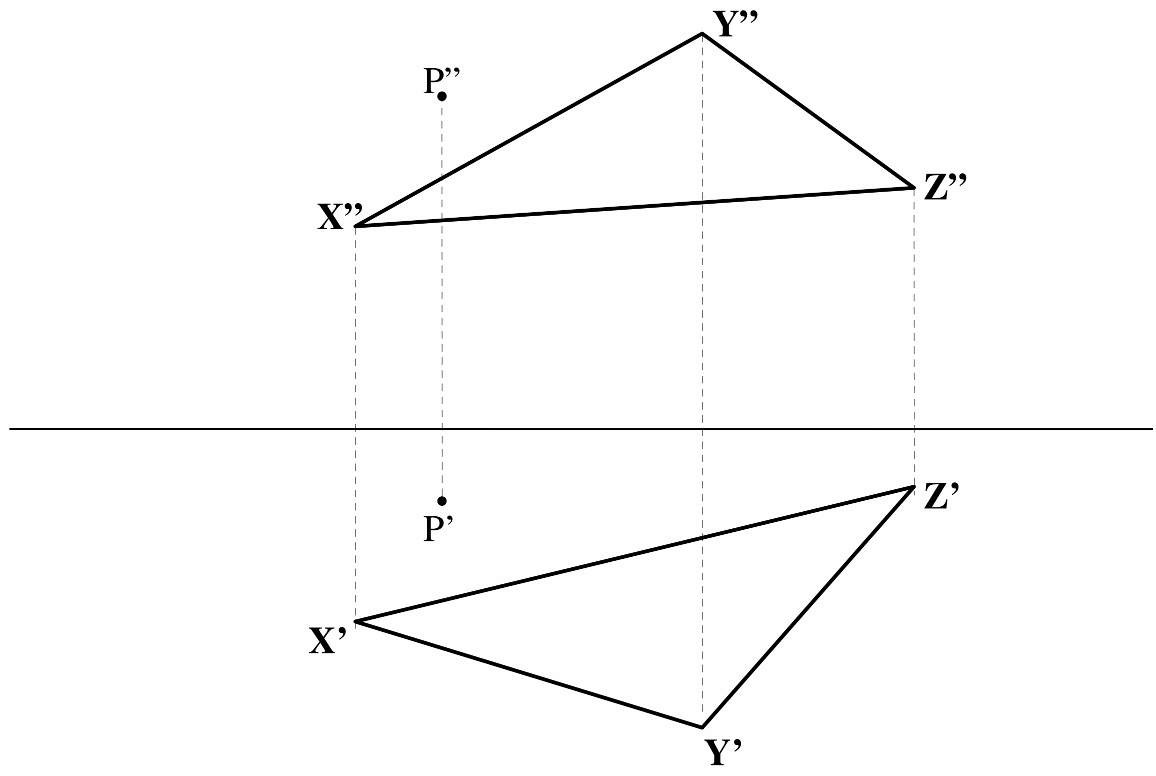
# Reeks 2 : Vlakke Constructies : Ware Groottes

**Oefening 2.1** **Voorstelling van een vlak**

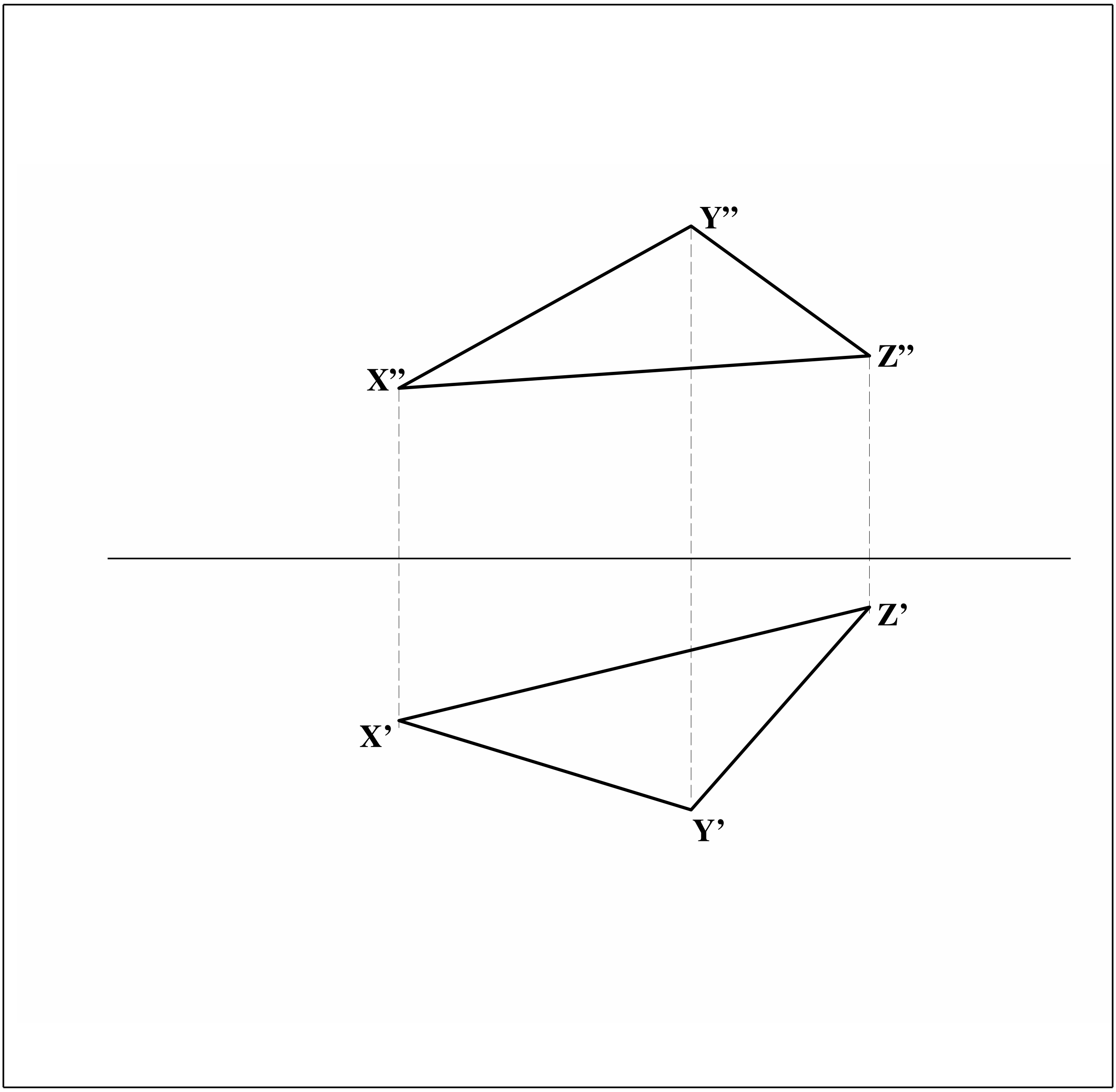
Bepaal $A$ zodat het in het vlak van de driehoek gelegen is. Ga na of de lijn $E$ in het vlak van de driehoek ligt. Construeer in $XYZ$ een frontrechte door $F$.



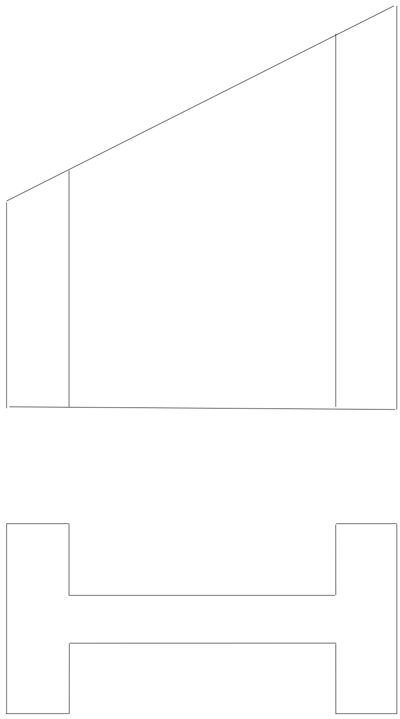
Teken en vlak dat $P$ bevat, evenwijdig met $XYZ$. Bepaal de afstand tussen de twee vlakken.



Bepaal een punt op $XY$ dat op dezelfde afstatnd ligt van $Y$ en $Z$.

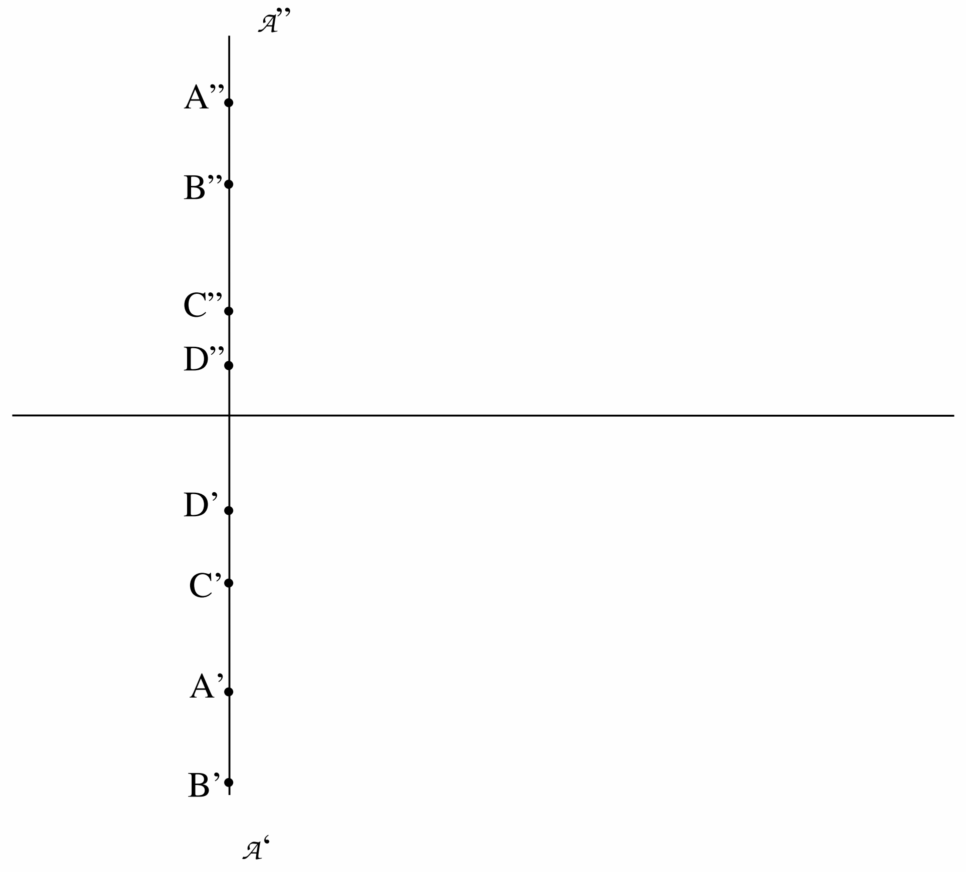


Teken de ware grootte van de schuine doorsnede

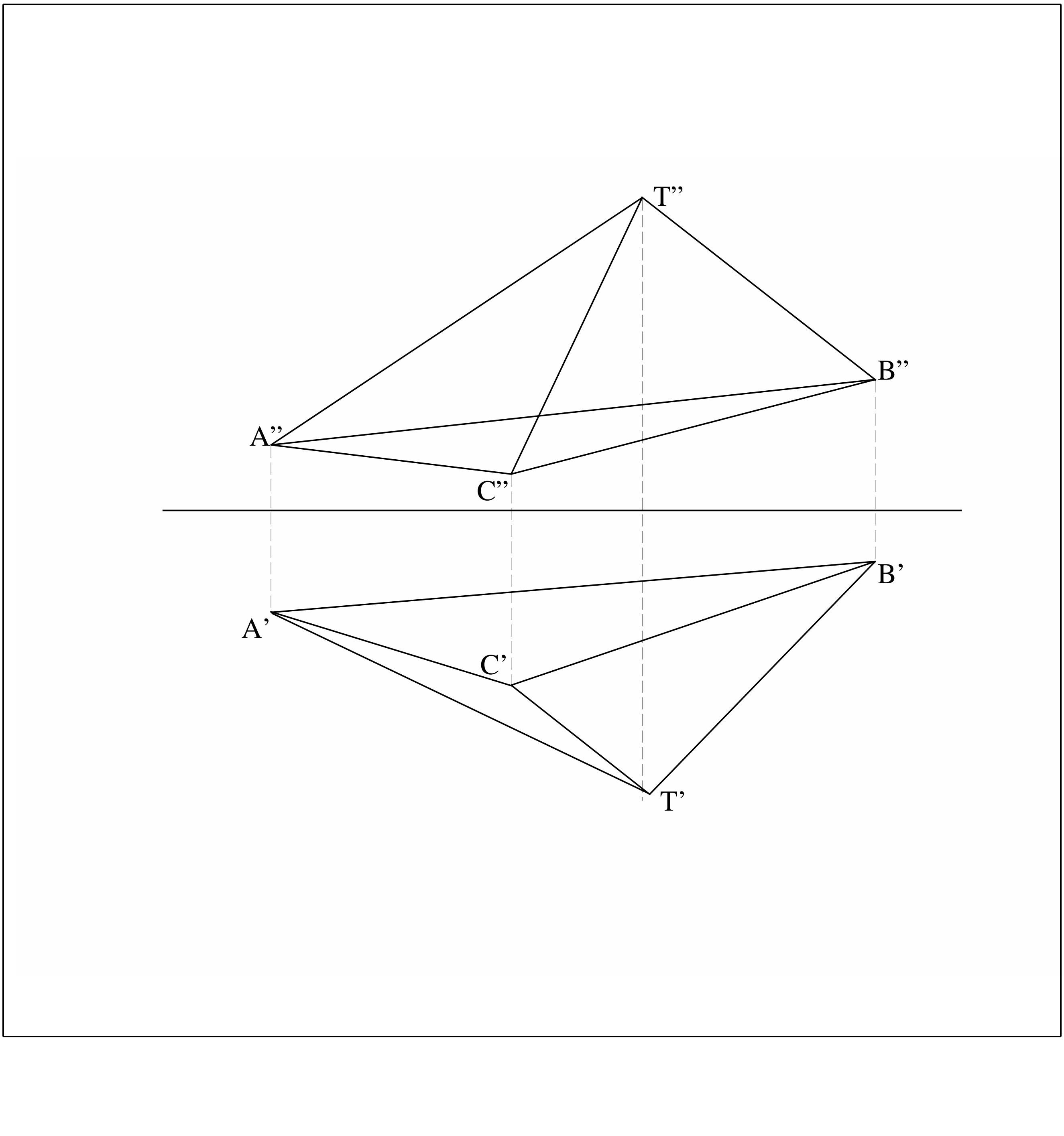


**Oefening 2.5** **Ware Grootte**

Bepaal de ware grootte van de vierhoek $ABCD$ gelegen in het vlak $\mathcal{A}$

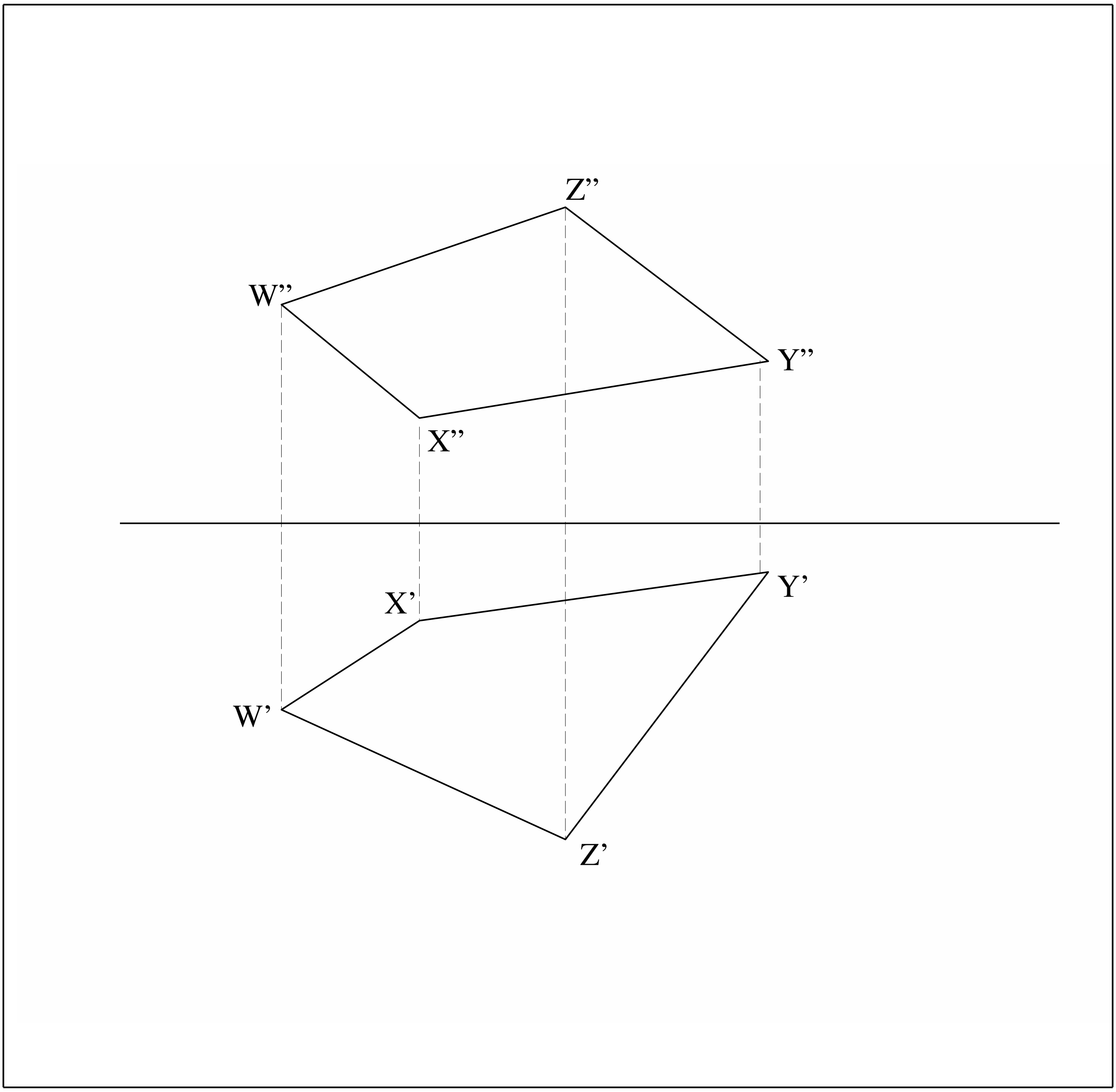


Wentel het volgende volume zodat $ABC$ een kopvlak wordt. Bepaal de grootte van de hoek $ABC$.



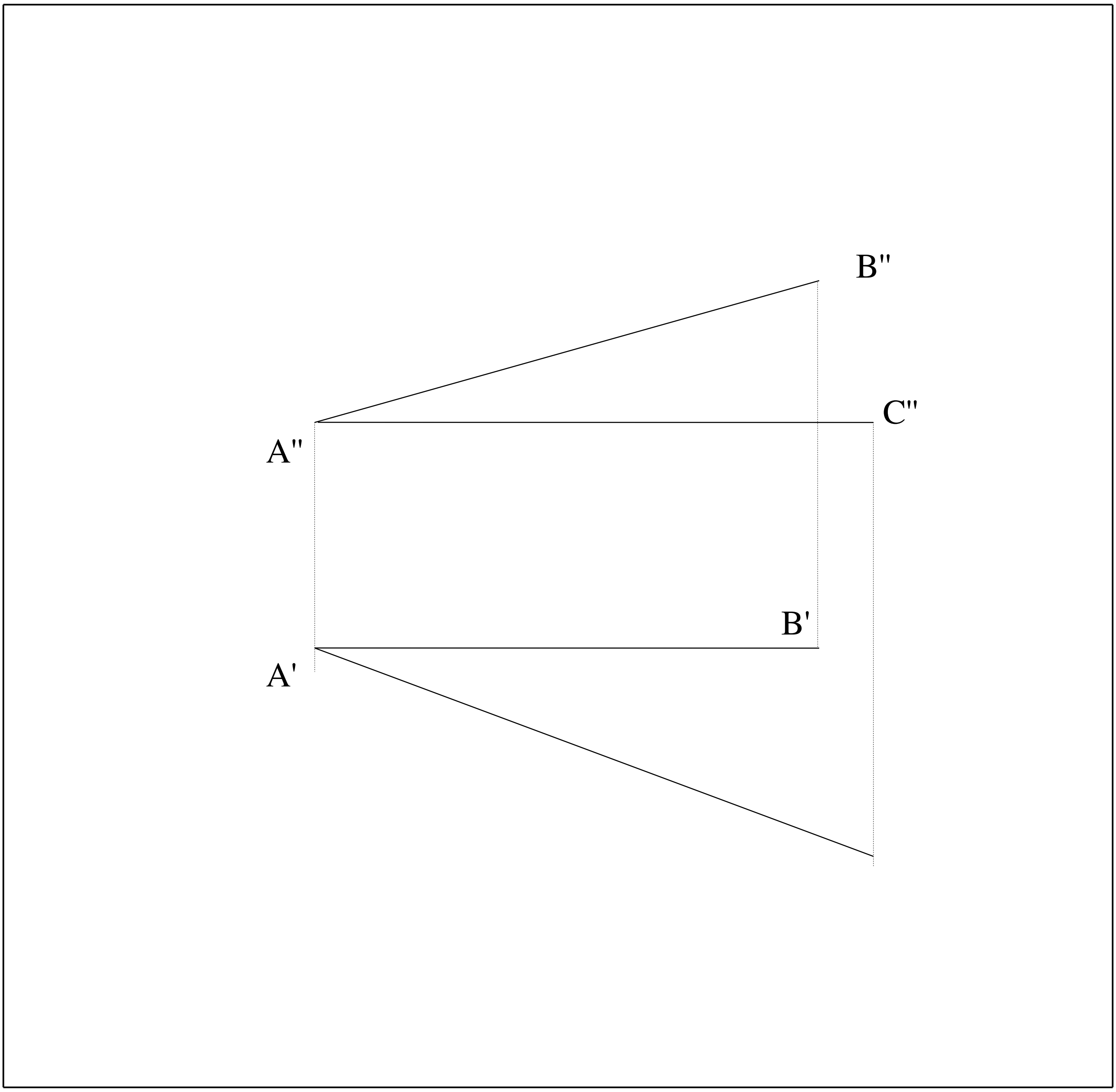
**Oefening 2.7** **Neerslaan**

Bepaal de grootte van de vierhoek $WXYZ$

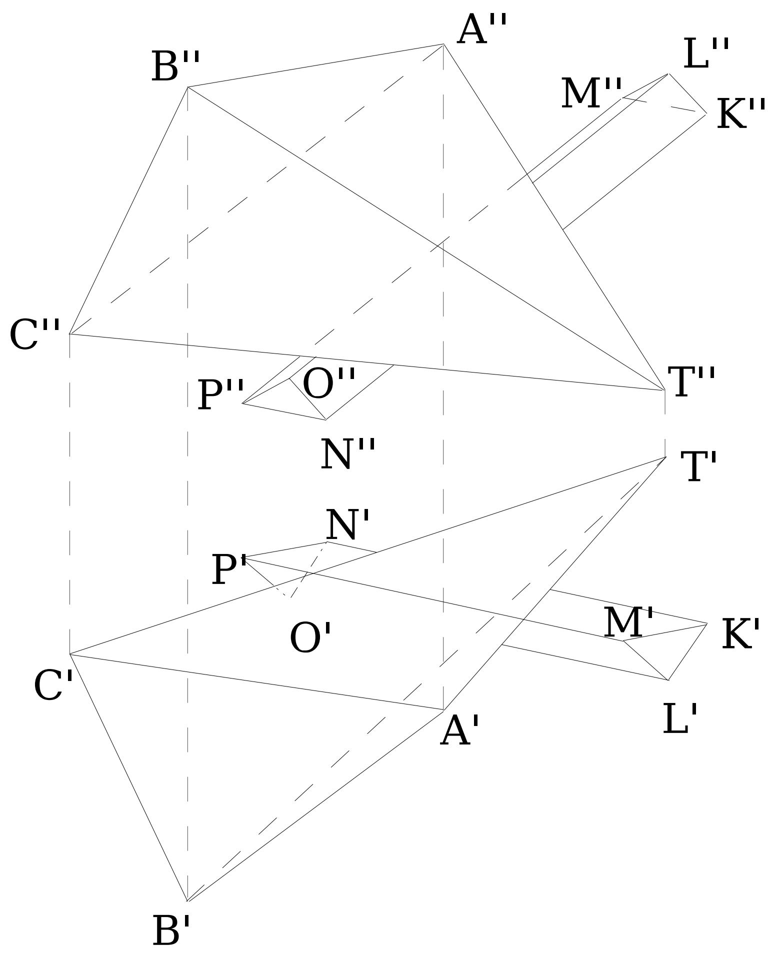


**Oefening 2.8** **Neerslaan**

Bepaal de hoek tussen het vlak $ABC$ en het horizontaal vlak.



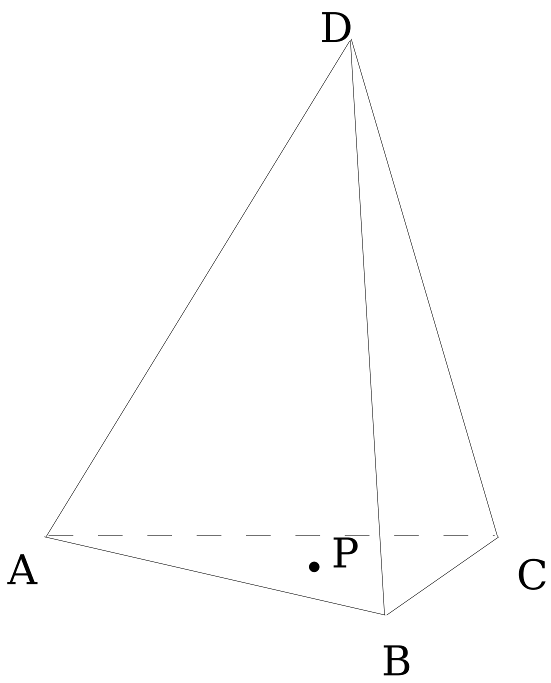
Teken de doorsnede van het prisma en de piramide



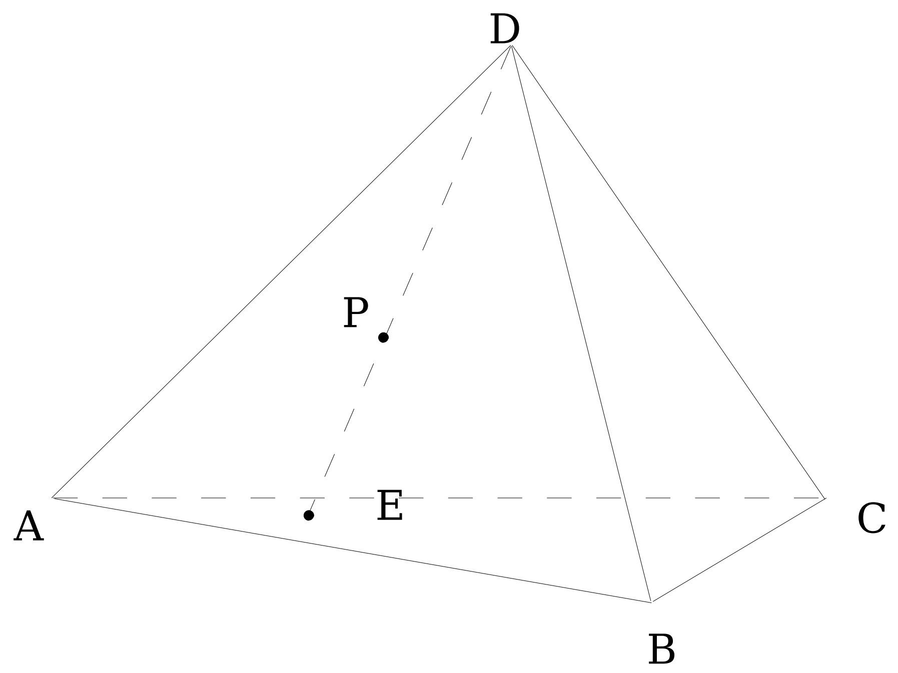
# Reeks 3 : Ruimtelijke Constructies

**Oefening 3.1** **Ruimtelijke constructies**

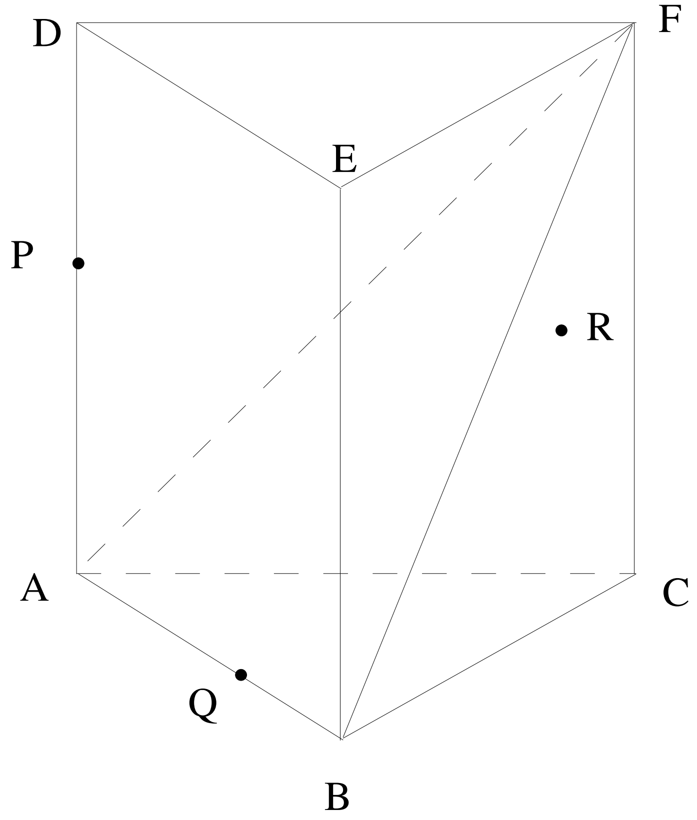
Het punt $P$ ligt in het vlak $(A, B, C)$ van de piramide $(D, A, B, C)$. Teken een lijn door $P$ evenwijdig aan $AD$ en construeer het snijpunt van deze lijn met $BDC$.



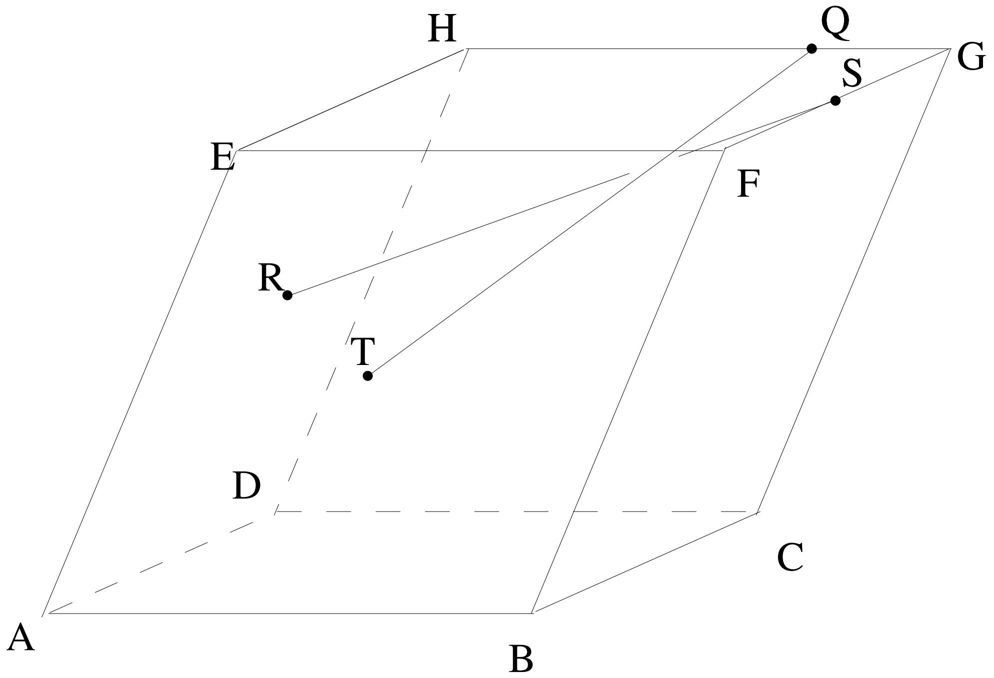
$E$ is gelegen in het vlak $(A, B, C)$ van de piramide $(D, A, B, C)$. $P$ is gelegen op $DE$.
Construeer een lijn door $P$ die $BD$ en $AC$ snijdt.



In het prisma $(A, B, C, D, E, F)$ is een punt $P$ gegeven op $AD$, een punt $Q$ op $AB$ en een punt $R$ in het vlak $(B, C, E, F)$. Teken de doorsnede van het vlak bepaald door $P$, $Q$ en $R$ met het prisma. Teken ook de snijlijn van dit vlak met het vlak $(A, B, F)$.



In het parallellepipedum $(A, B, C, D, E, F, G, H)$ bevindt het punt $P$ zich in het vlak $(A, B, F, E)$ en het punt $R$ in het vlak $(A, D, E, H)$. Duidt aan door een tekening of $PQ$ en $RS$ elkaar kruisen of snijden.



In de piramide $(T, A, B, C, D, E, F)$ ligt $P$ op $AT$, $Q$ op $TC$ en $R$ op $TE$. $H$ is gelegen in het vlak $(A, B, T)$. Bepaal de doorsnede van het vlak $(P, Q, R)$ met de piramide. Trek daarna een lijn door het punt $H$, die evenwijdig is met $(P, Q, R)$ en $TE$ snijdt.