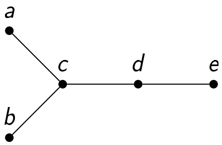
Descriptions linéaires de polytopes associés aux antimatroïdes

Keno Merckx

Un premier exemple

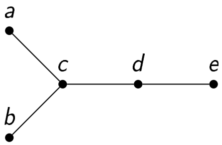
Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:



$\Rightarrow$ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

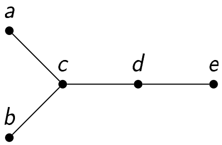


⇒ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\mathcal{F} = \{$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

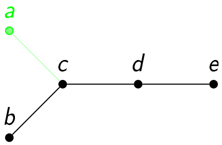


$\Rightarrow$ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\mathcal{F} = \{\varnothing,$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

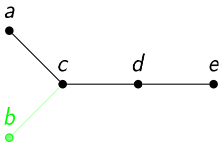


$\Rightarrow$ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{a\},$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

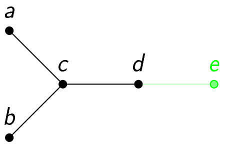


⇒ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\},$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

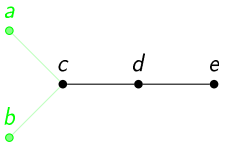


$\Rightarrow$ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\},$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

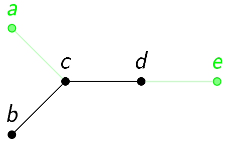


⇒ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, b\},$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

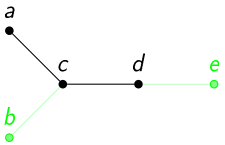


$\Rightarrow$ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, e\},$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

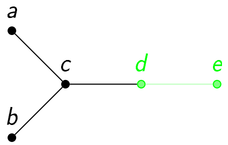


⇒ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\},$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

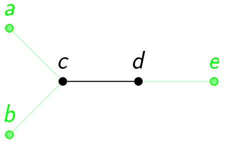


$\Rightarrow$ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{d, e\},$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

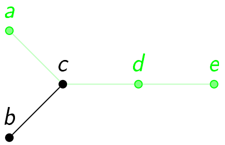


$\Rightarrow$ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{d, e\}, \{a, b, e\},$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

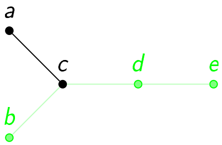


⇒ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{d, e\}, \{a, b, e\}, \\ \{a, d, e\},$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

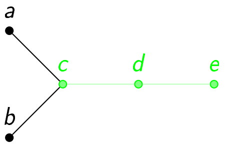


$\Rightarrow$ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{ & \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a,b\}, \{a,e\}, \{b,e\}, \{d,e\}, \{a,b,e\}, \\ & \{a,d,e\}, \{b,d,e\},\end{aligned}$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

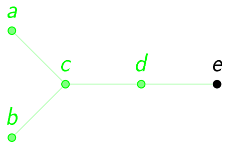


$\Rightarrow$ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a,b\}, \{a,e\}, \{b,e\}, \{d,e\}, \{a,b,e\}, \{a,d,e\}, \{b,d,e\}, \{c,d,e\},$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

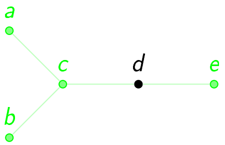


$\Rightarrow$ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a,b\}, \{a,e\}, \{b,e\}, \{d,e\}, \{a,b,e\}, \\ \{a,d,e\}, \{b,d,e\}, \{c,d,e\}, \{a,b,c,d\},$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

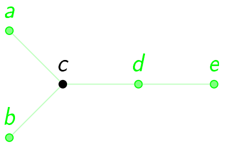


$\Rightarrow$ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a,b\}, \{a,e\}, \{b,e\}, \{d,e\}, \{a,b,e\}, \{a,d,e\}, \{b,d,e\}, \{c,d,e\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c,e\},$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

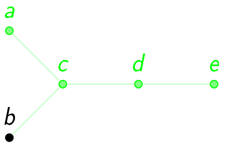


$\Rightarrow$ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{&\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a,b\}, \{a,e\}, \{b,e\}, \{d,e\}, \{a,b,e\},\\ &\{a,d,e\}, \{b,d,e\}, \{c,d,e\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c,e\},\\ &\{a,b,d,e\},\end{aligned}$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

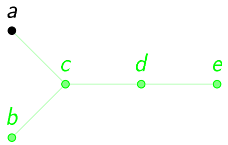


⇒ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a,b\}, \{a,e\}, \{b,e\}, \{d,e\}, \{a,b,e\},$$
$$\{a,d,e\}, \{b,d,e\}, \{c,d,e\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c,e\},$$
$$\{a,b,d,e\}, \{a,c,d,e\},$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

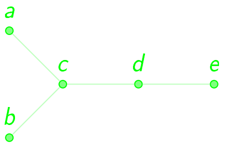


⇒ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{d, e\}, \{a, b, e\}, \{a, d, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\},$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:

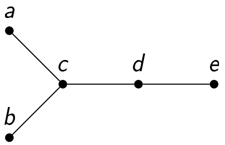


$\Rightarrow$ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{&\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{d, e\}, \{a, b, e\},\\ &\{a, d, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\},\\ &\{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}\end{aligned}$$

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:



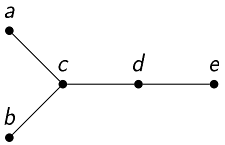
$\Rightarrow$ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{&\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{d, e\}, \{a, b, e\},\\ &\{a, d, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\},\\ &\{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}\end{aligned}$$

- Stabilité par réunion,

Un premier exemple

Soit l'arbre $T = (V, E)$ suivant:



$\Rightarrow$ Quels sont les sous-ensembles de V que nous pouvons retirer à T tels que le graphe obtenu soit toujours un arbre ?

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{&\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{d, e\}, \{a, b, e\},\\ &\{a, d, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\},\\ &\{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}\end{aligned}$$

- Stabilité par réunion,
- Accessibilité.

Définition

Soient

- E un ensemble fini,
- $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ une collection non vide.

Définition

Le couple $(E, \mathcal{F})$ est un antimatroïde s'il vérifie les deux conditions suivantes:

$$\text{Si } F_1, F_2 \in \mathcal{F} \text{ alors } F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}, \tag{AM1}$$

$$\forall F \in \mathcal{F}, F \neq \varnothing, \exists f \in F \text{ tel que } F \backslash \{f\} \in \mathcal{F}. \tag{AM2}$$

Les ensembles F de $\mathcal{F}$ sont appelés les faisables.

Définition

Soient

- E un ensemble fini,
- $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ une collection non vide.

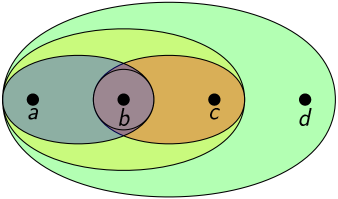
Définition

Le couple $(E, \mathcal{F})$ est un antimatroïde s'il vérifie les deux conditions suivantes:

$$\text{Si } F_1, F_2 \in \mathcal{F} \text{ alors } F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}, \tag{AM1}$$

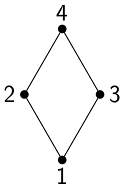
$$\forall F \in \mathcal{F}, F \neq \varnothing, \exists f \in F \text{ tel que } F \backslash \{f\} \in \mathcal{F}. \tag{AM2}$$

Les ensembles F de $\mathcal{F}$ sont appelés les faisables.



Antimatroïde d'ordre

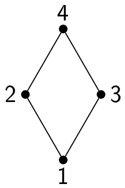
Soit l'ordre $(E, \leq)$ défini par le diagramme de Hasse:



$\Rightarrow$ Prenons les idéaux de E comme éléments de $\mathcal{F}$.

Antimatroïde d'ordre

Soit l'ordre $(E, \leq)$ défini par le diagramme de Hasse:



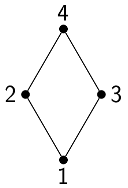
$\Rightarrow$ Prenons les idéaux de E comme éléments de $\mathcal{F}$.

Nous avons l'antimatroïde $(E, \mathcal{F})$, avec

$$\mathcal{F} = \{ \qquad \}$$

Antimatroïde d'ordre

Soit l'ordre $(E, \leq)$ défini par le diagramme de Hasse:



$\varnothing$

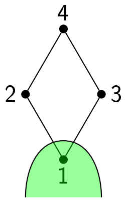
$\Rightarrow$ Prenons les idéaux de E comme éléments de $\mathcal{F}$.

Nous avons l'antimatroïde $(E, \mathcal{F})$, avec

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \qquad \}$$

Antimatroïde d'ordre

Soit l'ordre $(E, \leq)$ défini par le diagramme de Hasse:



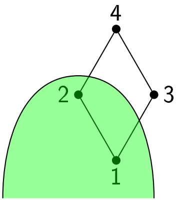
$\Rightarrow$ Prenons les idéaux de E comme éléments de $\mathcal{F}$.

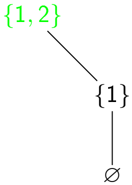
Nous avons l'antimatroïde $(E, \mathcal{F})$, avec

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{1\}, \qquad\qquad \}$$

Antimatroïde d'ordre

Soit l'ordre $(E, \leq)$ défini par le diagramme de Hasse:





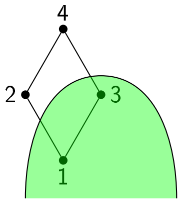
$\Rightarrow$ Prenons les idéaux de E comme éléments de $\mathcal{F}$.

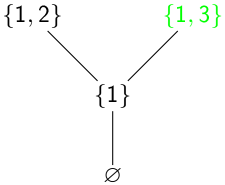
Nous avons l'antimatroïde $(E, \mathcal{F})$, avec

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \qquad\qquad \}$$

Antimatroïde d'ordre

Soit l'ordre $(E, \leq)$ défini par le diagramme de Hasse:





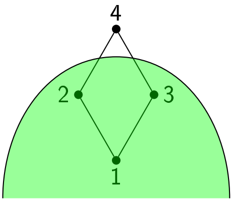
$\Rightarrow$ Prenons les idéaux de E comme éléments de $\mathcal{F}$.

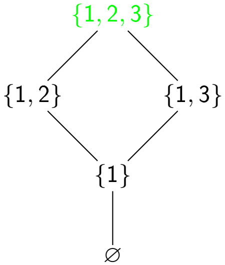
Nous avons l'antimatroïde $(E, \mathcal{F})$, avec

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \qquad \}$$

Antimatroïde d'ordre

Soit l'ordre $(E, \leq)$ défini par le diagramme de Hasse:





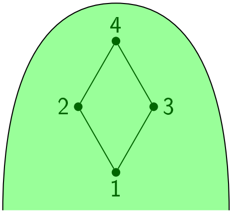
$\Rightarrow$ Prenons les idéaux de E comme éléments de $\mathcal{F}$.

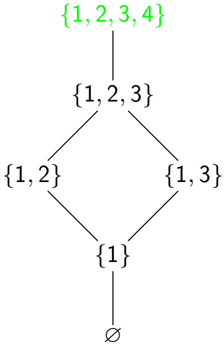
Nous avons l'antimatroïde $(E, \mathcal{F})$, avec

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \qquad \}$$

Antimatroïde d'ordre

Soit l'ordre $(E, \leq)$ défini par le diagramme de Hasse:





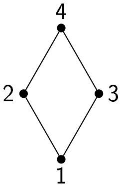
$\Rightarrow$ Prenons les idéaux de E comme éléments de $\mathcal{F}$.

Nous avons l'antimatroïde $(E, \mathcal{F})$, avec

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$$

Antimatroïde d'ordre double

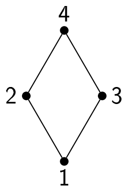
Soit l'ordre $(E, \leq)$ défini par le diagramme de Hasse:



$\Rightarrow$ Prenons les unions d'idéaux et de filtres de E comme éléments de $\mathcal{F}$.

Antimatroïde d'ordre double

Soit l'ordre $(E, \leq)$ défini par le diagramme de Hasse:



$\Rightarrow$ Prenons les unions d'idéaux et de filtres de E comme éléments de $\mathcal{F}$.

Nous avons l'antimatroïde $(E, \mathcal{F})$, avec

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{1\}, \{4\}, \{1,4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

le polytope $P_{\mathcal{F}}$

Soit $(E, \mathcal{F})$ un antimatroïde.

Définition

Le polytope des faisables de $(E, \mathcal{F})$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^E$ défini par:

$$P_{\mathcal{F}} = \text{conv}(\chi^F : F \in \mathcal{F}).$$

le polytope $P_{\mathcal{F}}$

Soit $(E, \mathcal{F})$ un antimatroïde.

Définition

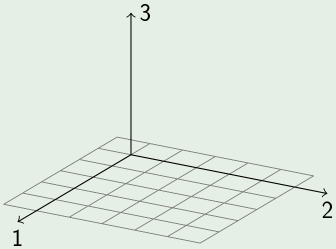
Le polytope des faisables de $(E, \mathcal{F})$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^E$ défini par:

$$P_{\mathcal{F}} = \text{conv}(\chi^F : F \in \mathcal{F}).$$

Exemple

Soit $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre défini par l'ensemble ordonné suivant:

$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$



le polytope $P_{\mathcal{F}}$

Soit $(E, \mathcal{F})$ un antimatroïde.

Définition

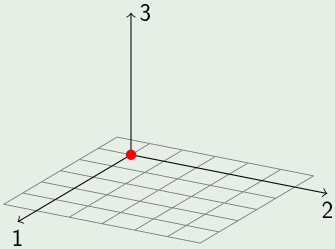
Le polytope des faisables de $(E, \mathcal{F})$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^E$ défini par:

$$P_{\mathcal{F}} = \mathrm{conv}(\chi^F : F \in \mathcal{F}).$$

Exemple

Soit $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre défini par l'ensemble ordonné suivant:

$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$



le polytope $P_{\mathcal{F}}$

Soit $(E, \mathcal{F})$ un antimatroïde.

Définition

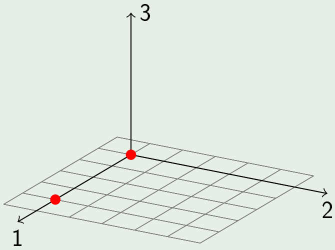
Le polytope des faisables de $(E, \mathcal{F})$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^E$ défini par:

$$P_{\mathcal{F}} = \mathrm{conv}(\chi^F : F \in \mathcal{F}).$$

Exemple

Soit $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre défini par l'ensemble ordonné suivant:

$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$



le polytope $P_{\mathcal{F}}$

Soit $(E, \mathcal{F})$ un antimatroïde.

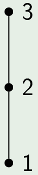
Définition

Le polytope des faisables de $(E, \mathcal{F})$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^E$ défini par:

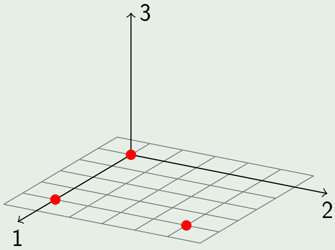
$$P_{\mathcal{F}} = \mathrm{conv}(\chi^F : F \in \mathcal{F}).$$

Exemple

Soit $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre défini par l'ensemble ordonné suivant:



$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$



le polytope $P_{\mathcal{F}}$

Soit $(E, \mathcal{F})$ un antimatroïde.

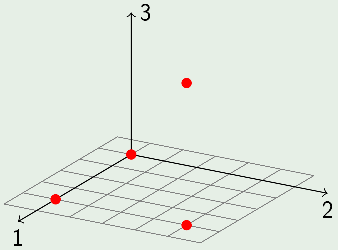
Définition

Le polytope des faisables de $(E, \mathcal{F})$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^E$ défini par:

$$P_{\mathcal{F}} = \mathrm{conv}(\chi^F : F \in \mathcal{F}).$$

Exemple

Soit $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre défini par l'ensemble ordonné suivant:



$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

le polytope $P_{\mathcal{F}}$

Soit $(E, \mathcal{F})$ un antimatroïde.

Définition

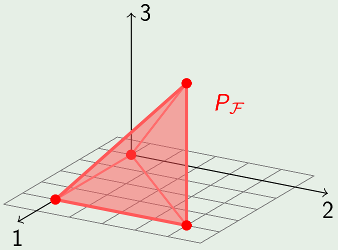
Le polytope des faisables de $(E, \mathcal{F})$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^E$ défini par:

$$P_{\mathcal{F}} = \mathrm{conv}(\chi^F : F \in \mathcal{F}).$$

Exemple

Soit $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre défini par l'ensemble ordonné suivant:

$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$



$P_{\mathcal{F}}$ pour les antimatroïdes d'ordre

Soient

- un ensemble ordonné $(E, \leq)$,
- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$.

Théorème

$$P_{\mathcal{F}} \equiv \begin{cases} 0 \leq x_h & \textit{pour } h \textit{ maximal dans } E, \\ x_m \leq 1 & \textit{pour } m \textit{ minimal dans } E, \\ x_i \leq x_j & \textit{pour } j \prec i \textit{ dans } E. \end{cases}$$

De plus, toutes ces inégalités définissent des facettes.

$P_{\mathcal{F}}$ pour les antimatroïdes d'ordre

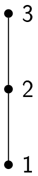
Soient

- un ensemble ordonné $(E, \leq)$,
- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$.

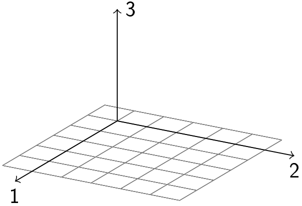
Théorème

$$P_{\mathcal{F}} \equiv \begin{cases} 0 \leq x_h & \textit{pour } h \textit{ maximal dans } E, \\ x_m \leq 1 & \textit{pour } m \textit{ minimal dans } E, \\ x_i \leq x_j & \textit{pour } j \prec i \textit{ dans } E. \end{cases}$$

De plus, toutes ces inégalités définissent des facettes.



Sommets	Facettes
$(0,0,0)$	$x_3 \geq 0$,
$(1,0,0)$	$x_1 \leq 1$,
$(1,1,0)$	$x_1 - x_2 \geq 0$,
$(1,1,1)$	$x_2 - x_3 \geq 0$



$P_{\mathcal{F}}$ pour les antimatroïdes d'ordre

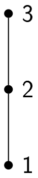
Soient

- un ensemble ordonné $(E, \leq)$,
- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$.

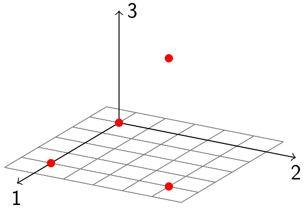
Théorème

$$P_{\mathcal{F}} \equiv \begin{cases} 0 \leq x_h & \text{pour } h \text{ maximal dans } E, \\ x_m \leq 1 & \text{pour } m \text{ minimal dans } E, \\ x_i \leq x_j & \text{pour } j \prec i \text{ dans } E. \end{cases}$$

De plus, toutes ces inégalités définissent des facettes.



Sommets	Facettes
$(0,0,0)$	$x_3 \geq 0$,
$(1,0,0)$	$x_1 \leq 1$,
$(1,1,0)$	$x_1 - x_2 \geq 0$,
$(1,1,1)$	$x_2 - x_3 \geq 0$



$P_{\mathcal{F}}$ pour les antimatroïdes d'ordre

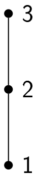
Soient

- un ensemble ordonné $(E, \leq)$,
- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$.

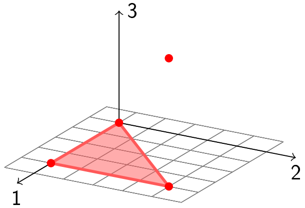
Théorème

$$P_{\mathcal{F}} \equiv \begin{cases} 0 \leq x_h & \textit{pour } h \textit{ maximal dans } E, \\ x_m \leq 1 & \textit{pour } m \textit{ minimal dans } E, \\ x_i \leq x_j & \textit{pour } j \prec i \textit{ dans } E. \end{cases}$$

De plus, toutes ces inégalités définissent des facettes.



Sommets	Facettes
$(0,0,0)$	$x_3 \geq 0$,
$(1,0,0)$	$x_1 \leq 1$,
$(1,1,0)$	$x_1 - x_2 \geq 0$,
$(1,1,1)$	$x_2 - x_3 \geq 0$



$P_{\mathcal{F}}$ pour les antimatroïdes d'ordre

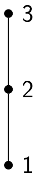
Soient

- un ensemble ordonné $(E, \leq)$,
- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$.

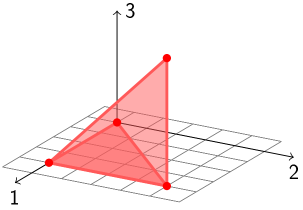
Théorème

$$P_{\mathcal{F}} \equiv \begin{cases} 0 \leq x_h & \textit{pour } h \textit{ maximal dans } E, \\ x_m \leq 1 & \textit{pour } m \textit{ minimal dans } E, \\ x_i \leq x_j & \textit{pour } j \prec i \textit{ dans } E. \end{cases}$$

De plus, toutes ces inégalités définissent des facettes.



Sommets	Facettes
$(0,0,0)$	$x_3 \geq 0,$
$(1,0,0)$	$x_1 \leq 1,$
$(1,1,0)$	$x_1 - x_2 \geq 0,$
$(1,1,1)$	$x_2 - x_3 \geq 0$



$P_{\mathcal{F}}$ pour les antimatroïdes d'ordre

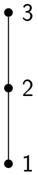
Soient

- un ensemble ordonné $(E, \leq)$,
- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$.

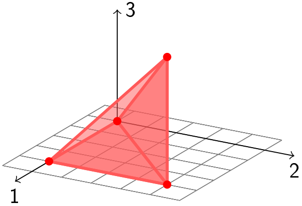
Théorème

$$P_{\mathcal{F}} \equiv \begin{cases} 0 \leq x_h & \textit{pour } h \textit{ maximal dans } E, \\ x_m \leq 1 & \textit{pour } m \textit{ minimal dans } E, \\ x_i \leq x_j & \textit{pour } j \prec i \textit{ dans } E. \end{cases}$$

De plus, toutes ces inégalités définissent des facettes.



Sommets	Facettes
$(0,0,0)$	$x_3 \geq 0$,
$(1,0,0)$	$x_1 \leq 1$,
$(1,1,0)$	$x_1 - x_2 \geq 0$,
$(1,1,1)$	$x_2 - x_3 \geq 0$



$P_{\mathcal{F}}$ pour les antimatroïdes d'ordre

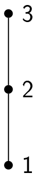
Soient

- un ensemble ordonné $(E, \leq)$,
- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$.

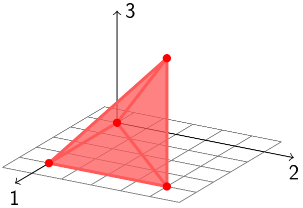
Théorème

$$P_{\mathcal{F}} \equiv \begin{cases} 0 \leq x_h & \text{pour } h \text{ maximal dans } E, \\ x_m \leq 1 & \text{pour } m \text{ minimal dans } E, \\ x_i \leq x_j & \text{pour } j \prec i \text{ dans } E. \end{cases}$$

De plus, toutes ces inégalités définissent des facettes.



Sommets	Facettes
$(0,0,0)$	$x_3 \geq 0$,
$(1,0,0)$	$x_1 \leq 1$,
$(1,1,0)$	$x_1 - x_2 \geq 0$,
$(1,1,1)$	$x_2 - x_3 \geq 0$



$P_{\mathcal{F}}$ pour les antimatroïdes d'ordre double

Soient $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre double provenant de $(E, \leq)$.

Théorème

$$P_{\mathcal{F}} \equiv \begin{cases} 0 \leq x_i & \textit{pour tout } i \textit{ dans } E, \\ x_i \leq 1 & \textit{pour tout } i \textit{ dans } E, \\ 0 \leq x_{i_1} - x_{i_2} + x_{i_3} - \ldots + x_{i_{2k+1}} & \textit{pour tout } i_1 < \ldots < i_{2k+1} \\ & \quad \textit{dans } E. \end{cases}$$

De plus, toutes ces inégalités définissent des facettes.

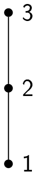
$P_{\mathcal{F}}$ pour les antimatroïdes d'ordre double

Soient $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre double provenant de $(E, \leq)$.

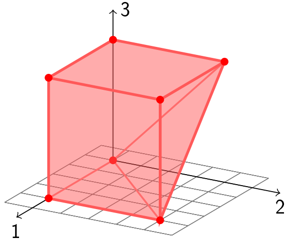
Théorème

$$P_{\mathcal{F}} \equiv \begin{cases} 0 \leq x_i & \textit{pour tout } i \textit{ dans } E, \\ x_i \leq 1 & \textit{pour tout } i \textit{ dans } E, \\ 0 \leq x_{i_1} - x_{i_2} + x_{i_3} - \ldots + x_{i_{2k+1}} & \textit{pour tout } i_1 < \ldots < i_{2k+1} \\ & \quad \textit{dans } E. \end{cases}$$

De plus, toutes ces inégalités définissent des facettes.



Sommets	
$(0,0,0)$	$(1,1,0)$
$(1,0,0)$	$(0,1,1)$
$(0,0,1)$	$(1,1,1)$
$(1,0,1)$	



Déscriptions linéaires connues

Korte et Lovász ont donné une description linéaire pour le polytope des faisables des antimatroïdes suivants:

- les antimatroïdes d'ordre,
- les antimatroïdes d'ordre double,
- les antimatroïdes d'élagage d'arbre par arêtes,
- les antimatroïdes d'élagage d'arbre par sommets.

Déscriptions linéaires connues

Korte et Lovász ont donné une description linéaire pour le polytope des faisables des antimatroïdes suivants:

- les antimatroïdes d'ordre,
- les antimatroïdes d'ordre double,
- les antimatroïdes d'élagage d'arbre par arêtes,
- les antimatroïdes d'élagage d'arbre par sommets.

Mais il existe beaucoup d'antimatroïdes n'appartenant à aucune de ces quatre familles.

$\Rightarrow$ Le but de ce mémoire a été de trouver de nouvelles familles et d'optenir une description linéaire du polytope associé aux antimatroïdes de celles-ci.

Enumeration

Recherche d'exemples d'antimatroïdes:

1.

Enumeration

Recherche d'exemples d'antimatroïdes:

- Il existe 22 antimatroïdes sur trois éléments.
  - ⇒ Uniquement des antimatroïdes d'ordre et d'ordre double.

1.

Enumeration

Recherche d'exemples d'antimatroïdes:

- Il existe 22 antimatroïdes sur trois éléments.
  ⇒ Uniquement des antimatroïdes d'ordre et d'ordre double.
- Il existe 485 antimatroïdes sur quatre éléments (Eppstein).
  ⇒ Certains exemples intéressants, mais trop nombreux pour une étude "à la main" efficace.

1.

Enumeration

Recherche d'exemples d'antimatroïdes:

- Il existe 22 antimatroïdes sur trois éléments.
  - ⇒ Uniquement des antimatroïdes d'ordre et d'ordre double.
- Il existe 485 antimatroïdes sur quatre éléments (Eppstein).
  - ⇒ Certains exemples intéressants, mais trop nombreux pour une étude "à la main" efficace.
- Quid du nombre d'antimatroïdes sur quatre éléments pris à isomorphisme près ?
  - ⇒ Nous en avons compté 34.

NB: Ce nombre a été confirmé par l'OEIS [1] le 19 avril 2013 grâce au travail de Przemysław Uznański.

1. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

Pyramide (type 1)

Exemple: $(\{1,2,3,4\},\mathcal{F})$

$$\mathcal{F}=\{\varnothing,\{1\},\{3\},\{1,3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}\}$$

Pyramide (type 1)

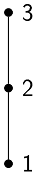
Exemple: $(\{1,2,3,4\},\mathcal{F})$

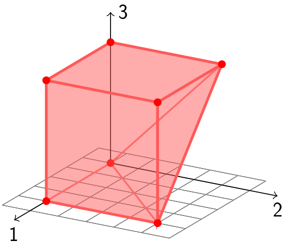
$$\mathcal{F} = \{\underbrace{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}}_{\text{donne un antimatroïde sur } \{1,2,3\}}, \{1,2,3,4\}\}$$

Pyramide (type 1)

Exemple: $(\{1,2,3,4\},\mathcal{F})$

$$\mathcal{F} = \{\underbrace{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}}_{\text{donne un antimatroïde sur } \{1,2,3\}}, \{1,2,3,4\}\}$$





Pyramide (type 1)

Exemple: $(\{1,2,3,4\},\mathcal{F})$

$$\mathcal{F}=\{\underbrace{\varnothing,\{1\},\{3\},\{1,3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}}_{\text{donne un antimatroïde sur }\{1,2,3\}},\{1,2,3,4\}\}$$

Proposition

Soit $(E,\mathcal{F})$ un antimatroïde. Supposons qu'il existe un élément a dans E tel que $(E\backslash\{a\},\mathcal{F}\backslash\{E\})$ soit encore un antimatroïde. Alors $P_{\mathcal{F}}$ est une pyramide dont la base est $P_{\mathcal{F}\backslash\{E\}}$.

Si nous connaissons la description linéaire de $P_{\mathcal{F}\backslash\{E\}}$, alors nous en déduisons la description linéaire de $P_{\mathcal{F}}$.

Pyramide (type 2)

Exemple: $(\{1,2,3,4\},\mathcal{F})$

$$\mathcal{F} = \{\varnothing,\ \{1\},\{1,2\},\{1,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$$

Pyramide (type 2)

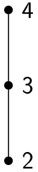
Exemple: $(\{1,2,3,4\},\mathcal{F})$

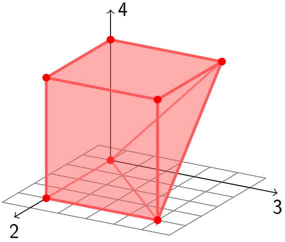
$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \underbrace{\{1\},\{1,2\},\{1,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}}_{\text{"}\backslash\{1\}\text{" donne un antimatroïde sur } \{2,3,4\}}\}$$

Pyramide (type 2)

Exemple: $(\{1,2,3,4\},\mathcal{F})$

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \underbrace{\{1\},\{1,2\},\{1,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}}_{\text{"}\setminus\{1\}\text{" donne un antimatroïde sur } \{2,3,4\}}\}$$





Pyramide (type 2)

Exemple: $(\{1,2,3,4\},\mathcal{F})$

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \underbrace{\{1\},\{1,2\},\{1,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}}_{\text{"}\backslash\{1\}\text{" donne un antimatroïde sur } \{2,3,4\}}\}$$

Proposition

Soit $(E,\mathcal{F})$ un antimatroïde qui ne possède qu'un seul singleton faisable. Soit $\{a\} \in \mathcal{F}$, alors $P_{\mathcal{F}}$ est une pyramide dont la base est $P_{\mathrm{Tr}(\mathcal{F},E\setminus\{a\})}$.

Si nous connaissons la description linéaire de $P_{\mathrm{Tr}(\mathcal{F},E\setminus\{a\})}$, alors nous en déduisons la description linéaire de $P_{\mathcal{F}}$.

Antimatroïde d'ordre augmenté

Exemple: $(\{1,2,3,4\}, \mathcal{F} \cup \{R\})$

$\mathcal{F} \cup \{R\} = \{\,\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\} \cup \{\,\{2,3\}\}$

Antimatroïde d'ordre augmenté

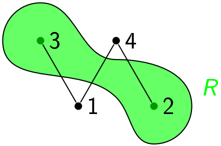
Exemple: $(\{1,2,3,4\}, \mathcal{F} \cup \{R\})$

$$\mathcal{F} \cup \{R\} = \{\underbrace{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}}_{\text{donne un antimatroïde d'ordre sur } \{1,2,3,4\}}\} \cup \{\underbrace{\{2,3\}}_{R}\}$$

Antimatroïde d'ordre augmenté

Exemple: $(\{1,2,3,4\}, \mathcal{F} \cup \{R\})$

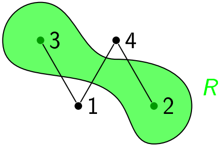
$$\mathcal{F} \cup \{R\} = \{\underbrace{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}}_{\text{donne un antimatroïde d'ordre sur } \{1,2,3,4\}}\} \cup \{\underbrace{\{2,3\}}_{R}\}$$



Antimatroïde d'ordre augmenté

Exemple: $(\{1,2,3,4\}, \mathcal{F} \cup \{R\})$

$$\mathcal{F} \cup \{R\} = \{\underbrace{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}}_{\text{donne un antimatroïde d'ordre sur } \{1,2,3,4\}}\} \cup \{\underbrace{\{2,3\}}_{R}\}$$



$\Rightarrow$ Nous connaissons la description linéaire de $P_{\mathcal{F}}$.

Quid de la description de $P_{\mathcal{F} \cup \{R\}}$?

L'ensemble R

Soient

- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$,
- $R \in 2^E \backslash \mathcal{F}$.

Proposition

$(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ *est un antimatroïde si et seulement si il existe deux éléments* a *et* b *de* E *tels que* b *couvre* a *et* $R^{\complement} = \text{filtre}(a) \backslash \{b\}$. *De plus* a *et* b *sont uniques.*

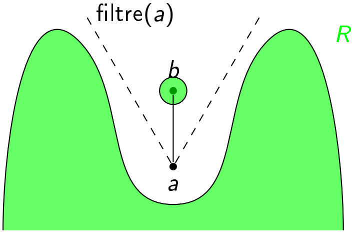
L'ensemble R

Soient

- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$,
- $R \in 2^E \backslash \mathcal{F}$.

Proposition

$(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ est un antimatroïde si et seulement si il existe deux éléments a et b de E tels que b couvre a et $R^{\complement} = \text{filtre}(a) \backslash \{b\}$. De plus a et b sont uniques.



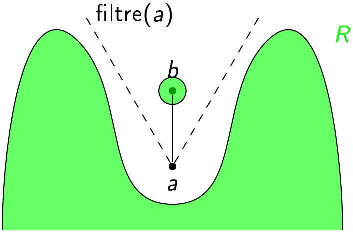
L'ensemble R

Soient

- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$,
- $R \in 2^E \backslash \mathcal{F}$.

Proposition

$(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ est un antimatroïde si et seulement si il existe deux éléments a et b de E tels que b couvre a et $R^\complement = \text{filtre}(a) \backslash \{b\}$. De plus a et b sont uniques.



Notons que parfois l'antimatroïde d'ordre augmenté $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ est aussi un antimatroïde d'ordre. Nous avons démontré une condition nécessaire et suffisante sur l'ensemble R qui caractérise ces cas.

Aspect géométrique

Soient

- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$,
- $R \in 2^E \backslash \mathcal{F}$ de sorte que $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ soit un antimatroïde d'ordre augmenté.

Proposition

χ^R *viole exactement une inégalité définissant une facette de* $P_{\mathcal{F}}$.

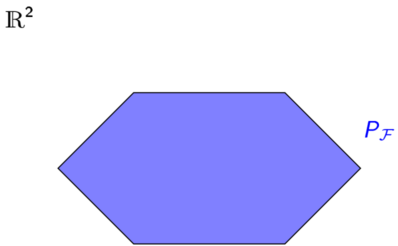
Aspect géométrique

Soient

- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$,
- $R \in 2^E \backslash \mathcal{F}$ de sorte que $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ soit un antimatroïde d'ordre augmenté.

Proposition

χ^R viole exactement une inégalité définissant une facette de $P_{\mathcal{F}}$.



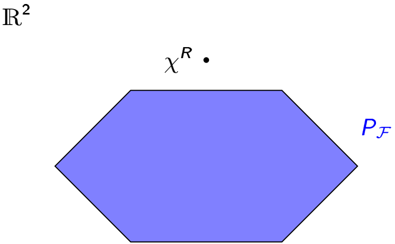
Aspect géométrique

Soient

- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$,
- $R \in 2^E \setminus \mathcal{F}$ de sorte que $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ soit un antimatroïde d'ordre augmenté.

Proposition

χ^R viole exactement une inégalité définissant une facette de $P_{\mathcal{F}}$.



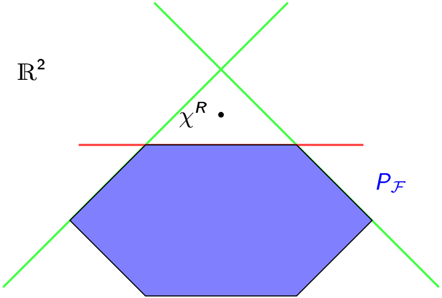
Aspect géométrique

Soient

- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$,
- $R \in 2^E \backslash \mathcal{F}$ de sorte que $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ soit un antimatroïde d'ordre augmenté.

Proposition

χ^R viole exactement une inégalité définissant une facette de $P_{\mathcal{F}}$.



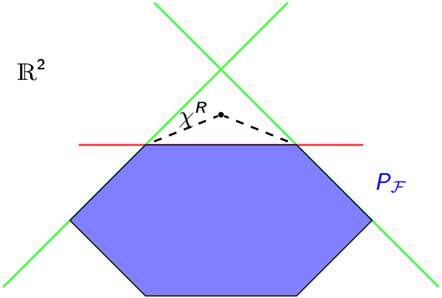
Aspect géométrique

Soient

- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$,
- $R \in 2^E \backslash \mathcal{F}$ de sorte que $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ soit un antimatroïde d'ordre augmenté.

Proposition

χ^R viole exactement une inégalité définissant une facette de $P_{\mathcal{F}}$.



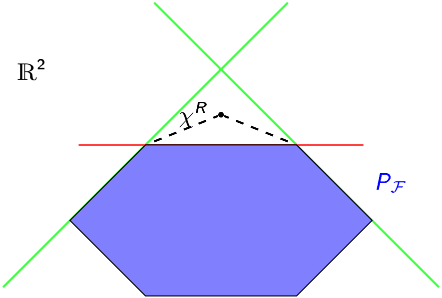
Aspect géométrique

Soient

- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$,
- $R \in 2^E \backslash \mathcal{F}$ de sorte que $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ soit un antimatroïde d'ordre augmenté.

Proposition

χ^R viole exactement une inégalité définissant une facette de $P_{\mathcal{F}}$.



Il nous faut à présent chercher les crêtes de $P_{\mathcal{F}}$ qui sont sur la facette dont l'inégalité est violée par χ^R.

Recherche de crête

Nous savons que $P_{\mathcal{F}}$ est décrit par trois types d'inégalités:

- $0 \leq x_h$ pour h maximal dans E,
- $x_m \leq 1$ pour m minimal dans E,
- $x_i \leq x_j$ pour $j \prec i$ dans E.

Recherche de crête

Nous savons que $P_{\mathcal{F}}$ est décrit par trois types d'inégalités:

- $0 \leq x_h$ pour h maximal dans E,
- $x_m \leq 1$ pour m minimal dans E,
- $x_i \leq x_j$ pour $j \prec i$ dans E.

Soient

- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$,
- R tel que $R^{\complement} = \text{filtre}(a) \setminus \{b\}$,
- B la facette de $P_{\mathcal{F}}$ définie par la contrainte violée par χ^R.

Recherche de crête

Nous savons que $P_{\mathcal{F}}$ est décrit par trois types d'inégalités:

- $0 \leq x_h$ pour h maximal dans E,
- $x_m \leq 1$ pour m minimal dans E,
- $x_i \leq x_j$ pour $j \prec i$ dans E.

Soient

- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$,
- R tel que $R^{\complement} = \text{filtre}(a) \backslash \{b\}$,
- B la facette de $P_{\mathcal{F}}$ définie par la contrainte violée par χ^R.

Proposition

Pour tout h élément maximal de $(E, \leq)$, la facette définie par $0 \leq x_h$ possède une crête en commun avec B sauf dans le cas où $h = b$ et $\text{filtre}(a) \neq \{a, b\}$.

Recherche de crête

Nous savons que $P_{\mathcal{F}}$ est décrit par trois types d'inégalités:

- $0 \leq x_h$ pour h maximal dans E,
- $x_m \leq 1$ pour m minimal dans E,
- $x_i \leq x_j$ pour $j \prec i$ dans E.

Soient

- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$,
- R tel que $R^{\complement} = \text{filtre}(a) \setminus \{b\}$,
- B la facette de $P_{\mathcal{F}}$ définie par la contrainte violée par χ^R.

Proposition

Pour tout m élément minimal de $(E, \leq)$, la facette définie par $x_m \leq 1$ possède une crête en commun avec B sauf dans le cas où $m = a$ et $\text{ideal}(b) \neq \{a, b\}$.

Recherche de crête

Nous savons que $P_{\mathcal{F}}$ est décrit par trois types d'inégalités:

- $0 \leq x_h$ pour h maximal dans E,
- $x_m \leq 1$ pour m minimal dans E,
- $x_i \leq x_j$ pour $j \prec i$ dans E.

Soient

- $(E, \mathcal{F})$ l'antimatroïde d'ordre provenant de $(E, \leq)$,
- R tel que $R^{\complement} = \text{filtre}(a) \backslash \{b\}$,
- B la facette de $P_{\mathcal{F}}$ définie par la contrainte violée par χ^R.

Proposition

Pour tout i, j de $(E, \leq)$ tels que i couvre j, (avec $(a, b) \neq (u, v)$). La facette définie par $x_i \leq x_j$ possède une crête en commun avec B sauf dans le cas où les conditions suivantes sont réunies: $j \in \text{ideal}(b)$, $a \in \text{ideal}(i)$, $a \neq j$ et $b \neq i$.

Conclusion

- Dans la liste des 34 antimatroïdes sur quatre éléments pris à isomorphisme près, 21 étaient déjà classés dans une des familles dont la description linéaire de leurs polytopes est connue.

Conclusion

- Dans la liste des 34 antimatroïdes sur quatre éléments pris à isomorphisme près, 21 étaient déjà classés dans une des familles dont la description linéaire de leurs polytopes est connue.
- En introduisant les nouvelles familles des antimatroïdes aux polytopes pyramidaux et des antimatroïdes d'ordre augmenté, nous sommes passés de 21 à 27 antimatroïdes couverts sur quatre éléments.

Conclusion

- Dans la liste des 34 antimatroïdes sur quatre éléments pris à isomorphisme près, 21 étaient déjà classés dans une des familles dont la description linéaire de leurs polytopes est connue.
- En introduisant les nouvelles familles des antimatroïdes aux polytopes pyramidaux et des antimatroïdes d'ordre augmenté, nous sommes passés de 21 à 27 antimatroïdes couverts sur quatre éléments.
- Le but ici n'était pas de compléter cette liste au cas par cas (ce qui serait aisé avec un logiciel tel que `polymake`) mais bien de trouver des familles aussi larges que possible.

Conclusion

- Dans la liste des 34 antimatroïdes sur quatre éléments pris à isomorphisme près, 21 étaient déjà classés dans une des familles dont la description linéaire de leurs polytopes est connue.
- En introduisant les nouvelles familles des antimatroïdes aux polytopes pyramidaux et des antimatroïdes d'ordre augmenté, nous sommes passés de 21 à 27 antimatroïdes couverts sur quatre éléments.
- Le but ici n'était pas de compléter cette liste au cas par cas (ce qui serait aisé avec un logiciel tel que `polymake`) mais bien de trouver des familles aussi larges que possible.
- De nombreuses pistes méritent encore d'être explorées pour trouver de nouvelles descriptions linéaires.

Merci de votre écoute