SolvayBrusselsSchool
of Economics and Management

Théorie Financière

2. Valeur actuelle – Evaluation d’obligations

Objectifs de la session

1. Comprendre les calculs de Valeur Actuelle (VA, Present Value, PV)
   - Formule générale, facteur d'actualisation (discount factor) et taux d'intérêt du marché
   - Formules utiles
   - Taux d'intérêts et intérêts composés
   - Taux d'intérêts réels et nominaux
2. Introduire les principales catégories d'obligations
3. Comprendre l'évaluation des obligations
4. Analyser le lien entre taux d'intérêts et cours des obligations
5. Introduire la structure par terme des taux d'intérêts
6. Examiner pourquoi les taux d'intérêts peuvent varier en fonction de la maturité

Valeur Actuelle (formule générale)

- Cash flows: $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_t, \ldots C_T$
- Facteur d'actualisation: $v_1, v_2, \ldots, v_t, \ldots, v_T$

- Valeur Actuelle: $\mathrm{PV} = C_1 \times v_1 + C_2 \times v_2 + \ldots + C_T \times v_T$

- Un exemple:

Année	0	1	2	3
Cash flow	-100	40	60	30
Facteur d'actualisation	1.000	0.9803	0.9465	0.9044
Valeur actuelle	-100	39.21	56.79	27.13

  - VAN = - 100 + 123.13 = 23.13

Les U.S. Treasury STRIPS

- STRIPS ⇔ Separate Trading of Registered Interest and Principal of Securities
- Prix de zéro-coupons

- Exemple: Supposons qu'on observe les cours suivants

Maturité	Prix pour un facial de \$100 (face value)
1	98.03
2	94.65
3	90.44
4	86.48
5	80.00

- Le prix de marché pour \$1 dans 5 ans est $v_5 = 0.80$

Valeur Actuelle et Actualisation

- Combien un investisseur serait-il prêt à payer en t = 0 pour recevoir C_t€ dans t années connaissant le taux du marché r_t?
- Nous savons que $1\ €_0 \Rightarrow (1+r_t)^t\ €_t$
- D'ou $PV \times (1+r_t)^t = C_t \Rightarrow \boldsymbol{PV = C_t / (1+r_t)^t = C_t \times v_t}$

- Le processus permettant de calculer la valeur actuelle (present value) des cash flows futurs s'appelle l'*actualisation* (*discounting*).
- La valeur actuelle d'un cash flow futur est obtenue en multipliant ce cash flow par un *facteur d'actualisation* (*discount factor ou present value factor*) v_t
- La formule générale pour un facteur d'actualisation pour *t*-années est:

$$v_t = \frac{1}{(1+r_t)^t}$$

Taux d'intérêts spot

- Revenons au STRIPS. Supposons que le cours d'un zéro-coupon avec une maturité de 5 ans et une valeur faciale de 100 vaille 75.
- Quel est alors le taux d'intérêt sous-jacent?
- Le taux de rendement actuariel (YTM, yield-to-maturity) d'une obligation est le taux d'intérêt qui égalise le cours avec la valeur actuelle des cash flows futurs.
- Sachant que $75 = 100 * v_5$ et $v_5 = 1/(1+r_5)^5$
- Le YTM r_5 est la solution de:

$$75 = \frac{100}{(1+r_5)^5}$$

- La solution :

$$r_5 = \left(\frac{100}{75}\right)^{1/5} - 1 = 5.92\%$$

- Équivaut au taux spot à 5 ans

Structure par terme des taux d’intérêts

- Relations entre taux spot et maturité.
- Exemple:

Maturité	Prix (facial de €100)	YTM (Spot)
1	98.03	$r_1 = 2.00\%$
2	94.65	$r_2 = 2.79\%$
3	90.44	$r_3 = 3.41\%$
4	86.48	$r_4 = 3.70\%$
5	80.00	$r_5 = 4.56\%$

- La structure par terme:
  - Est croissante si $r_t > r_{t\text{-}1}$ pour tout t
  - Plate (Flat) si $r_t = r_{t\text{-}1}$ pour tout t
  - Est décroissante (ou inverse) si $r_t < r_{t\text{-}1}$ pour tout t

Utilisation d'un taux unique

- Lors de l'analyse de cash flows sans risque, il est important de capturer la structure par terme des taux: les taux d'actualisation devraient varier avec la maturité.
- Dans le cas de cash flows risqués, la structure par terme des taux est souvent ignorée.
- Les Valeurs Actuelles sont souvent calculées en utilisant un taux d'actualisation unique *r*, identique pour toutes les maturités.
  - Pour rappel: ce taux représente la rentabilité attendue (espérée).
  - = Taux sans risque + Prime de risque
- Cette hypothèse simplificatrice permet de considérer les formules pour des:
  - Perpétuités (constantes ou croissantes à taux constant)
  - Annuités (constantes ou croissantes à taux constant)

Perpétuité constante

- $C_t = C$ pour $t = 1, 2, 3, ...$

$$PV = \frac{C}{r}$$

Preuve:
$PV = C\,d + C\,d^2 + C\,d3 + \ldots$
$PV(1+r) = C + C\,d + C\,d^2 + \ldots$
$PV(1+r) - PV = C$
$PV = C/r$

- Exemples: Actions Privilégiées (Preferred stock) payant un dividende fixe
- Si $r = 10\%$ et le Dividende annuel = 50
- Valeur de Marché P_0? $$P_0 = \frac{50}{.10} = 500$$
- Note: prix attendu en t = 1 => $$P_1 = \frac{50}{.10} = 500$$
- Rentabilité attendue =

$$\frac{div_1 + (P_1 - P_0)}{P_0} = \frac{50 + (500 - 500)}{500} = 10\%$$

Perpétuité croissante

- $C_t = C_1\,(1+g)^{t-1}$ pour t=1, 2, 3, ...   **r>g**

$$PV = \frac{C_1}{r-g}$$

- Exemple: Evaluation d'action basée sur:
  - Prochain dividende *div1,* et croissance long terme du dividende g
- Si r = 10%, div_1 = 50, g = 5%

$$P_0 = \frac{50}{.10-.05} = 1{,}000$$

- Note: Prix attendu en t = 1

$$P_1 = \frac{52.5}{.10-.05} = 1{,}050$$

- Rentabilité attendue =

$$\frac{div_1 + (P_1 - P_0)}{P_0} = \frac{50 + (1{,}050 - 1{,}000)}{1{,}000} = 10\%$$

Annuité constante

- Un ensemble de cash flows constant pour un nombre fixé de périodes
- $C_1 = C_2 = \ldots = C_T = C$

- Exemple:
  - Remboursement constant dans le cadre d'un crédit hypothécaire

- $PV = C * v_1 + C * v_2 + \ldots + C * v_T +$

  $= C * [v_1 + v_2 + \ldots + v_T]$

  $= C *$ Facteur d'Annuité

- Facteur d'Annuité = valeur actuelle d'1€ payé à la fin de chacune des périodes T.

ULB Solvay Brussels School of Economics and Management

Annuité constante

- $C_t = C$ pour $t = 1, 2, \ldots, T$

$$PV = \frac{C}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right]$$

- Différence entre deux perpétuités:
  - Commençant en $t = 1$ $\quad PV = C/r$
  - Commençant en $t = T+1$ $\quad PV = C/r \times [1/(1+r)^T]$
- Exemple: crédit hypothécaire sur 20 ans

  Paiement annuel = €25,000

  Taux d'emprunt = 10%

  PV =(25,000/0.10)[1-1/(1.10)^{20}] = 25,000 * 10 *(1 – 0.1486)

  = 25,000 * 8.5136

  = € 212,839

Annuité croissante

- $C_t = C_1\ (1+g)^{t-1}$ pour $t = 1, 2, \ldots, T$
  - Si $r \neq g$: $$PV = \frac{C_1}{r-g}\left[1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^T\right]$$
  - Si $r = g$: $$PV = T \times \frac{C_1}{1+r}$$
- De nouveau différence entre deux annuités croissantes:
  - Commençant en $t = 1$, premier cash flow = C_1
  - Commençant en $t = T+1$ avec comme premier cash flow = $C_1\ (1+g)^T$
- Exemple: Quelle est la VAN du projet suivant si $r = 10\%$?

  Investissement initial = 100, $C_1 = 20$, $g = 8\%$, $T = 10$

  VAN= – 100 + [20/(10% - 8%)]*[1 – (1.08/1.10)^{10}]

  = – 100 + 167.64

  = + 67.64

Formules utiles: résumé

- Perpétuité constante: $C_t = C$ pour tout t

$$PV = \frac{C}{r}$$

- Perpétuité croissante : $C_t = C_{t-1}(1+g)$, pour $t = 1$ à ∞

  ⚠ $r>g$

$$PV = \frac{C_1}{r-g}$$

- Annuité constante: $C_t=C$, *pour* $t = 1$ to T

$$PV = \frac{C}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right)$$

- Annuité croissante : $C_t = C_{t-1}(1+g)$, pour $t = 1$ à T

  → si $r \neq g$:

$$PV = \frac{C_1}{r-g}\left(1 - \frac{(1+g)^T}{(1+r)^T}\right)$$

  → si $r = g$:

$$PV = T \times \frac{C_1}{1+r}$$

Fréquence des paiements d'intérêts

- Jusqu'à présent, intérêts payés annuellement
- Si n paiements par an, la valeur avec intérêts composés sera après 1 an de :

$$(1+\frac{r}{n})^n$$

- Exemple: Paiement mensuel :
  - Taux d'intérêt annuel ***annoncé*** = r = 12%, n = 12
  - Valeur avec intérêts composés après un an: $(1 + 0.12/12)^{12} = 1.1268$
  - Taux d'intérêt annuel ***Effectif***: 12.68%
- Taux d'intérêt continu:
  - $[1+(r/n)]^n \rightarrow e^r$ (e= 2.7183)
  - Exemple : Taux d'intérêt annuel ***annoncé*** = r = 12%, e^{12} = 1.1275
  - → Taux d'intérêt annuel ***Effectif***: : 12.75%

Jongler avec les fréquences de paiement

- Supposons que le taux d'intérêt annuel <u>effectif</u> soit de 10%
- Considérons une perpétuité avec cash flow annuel C = 12
  - Si ce cash flow est payé une fois par an: PV = 12 / 0.10 = 120
- Supposons maintenant que le cash flow est payé une fois par mois (le cash flow mensuel vaut 12/12 = 1). Quelle est alors la valeur actuelle?
- Solution 1: considérons qu'une période = 1 mois
  1. Calculons le <u>taux d'intérêt mensuel</u> (en gardant le taux effectif annuel constant)

     $$(1+r_{\text{monthly}})^{12} = 1.10 \rightarrow r_{\text{mensuel}} = 0.7974\%$$

  2. La formule de la perpétuité donne:

     $$\text{VA} = 1 / 0.007974 = 125.40$$

Jongler avec les fréquences de paiement

- Solution 2: utiliser le taux d'intérêt annuel <u>annoncé</u>

  1. Calculer taux d'intérêt annuel <u>annoncé</u> = 0.7974% * 12 = 9.568%
  2. Utiliser la formule pour une perpétuité : PV = 12 / 0.09568 = 125.40

- A l'évidence, ces éléments ne sont pas intuitifs, d'ou un danger d'abus par des personnes malveillantes mais aussi une potentielle difficulté pour comparer différentes offres.
- Concept de TAEG = Taux Annuel Effectif Global et législation fixant les taux maximaux légaux

Taux d'intérêts et inflation: Taux d'intérêt réel

	Date 0	Date 1
• Taux d'intérêt *Nominal* = 10%	Date 0	Date 1
• Investissement	$ 1,000	
• Montant perçu		$ 1,100
• Hamburger se vend	$1	$1.06
• Taux d'nflation = 6%		
• Pouvoir d'achat (# hamburgers)	H1,000	H1,038

Taux d'intérêt Réel = 3.8%

- (1+Taux Nominal) = (1+Taux Réel)×(1+Inflation)

- Approximation:

Taux Réel ≈ Taux Nominal - Inflation

Catégories d'obligation (1/2)

- **Zéro-coupon bond**
- (Pure discount bond - Bullet bond)
- Le détenteur de l'obligation à le droit de recevoir:
  - Un paiement future (***la valeur faciale***) F
  - À une date donnée (***l'échéance (maturity***) T
- Exemple : un zéro-coupon échéant dans 10 ans, valeur faciale $1,000

$$PV = \frac{1}{(1+r_T)^T}$$

- Valeur du zéro-coupon:
- Si le taux spot à 10 ans est de 5%
- Le zéro-coupon se vendra à:

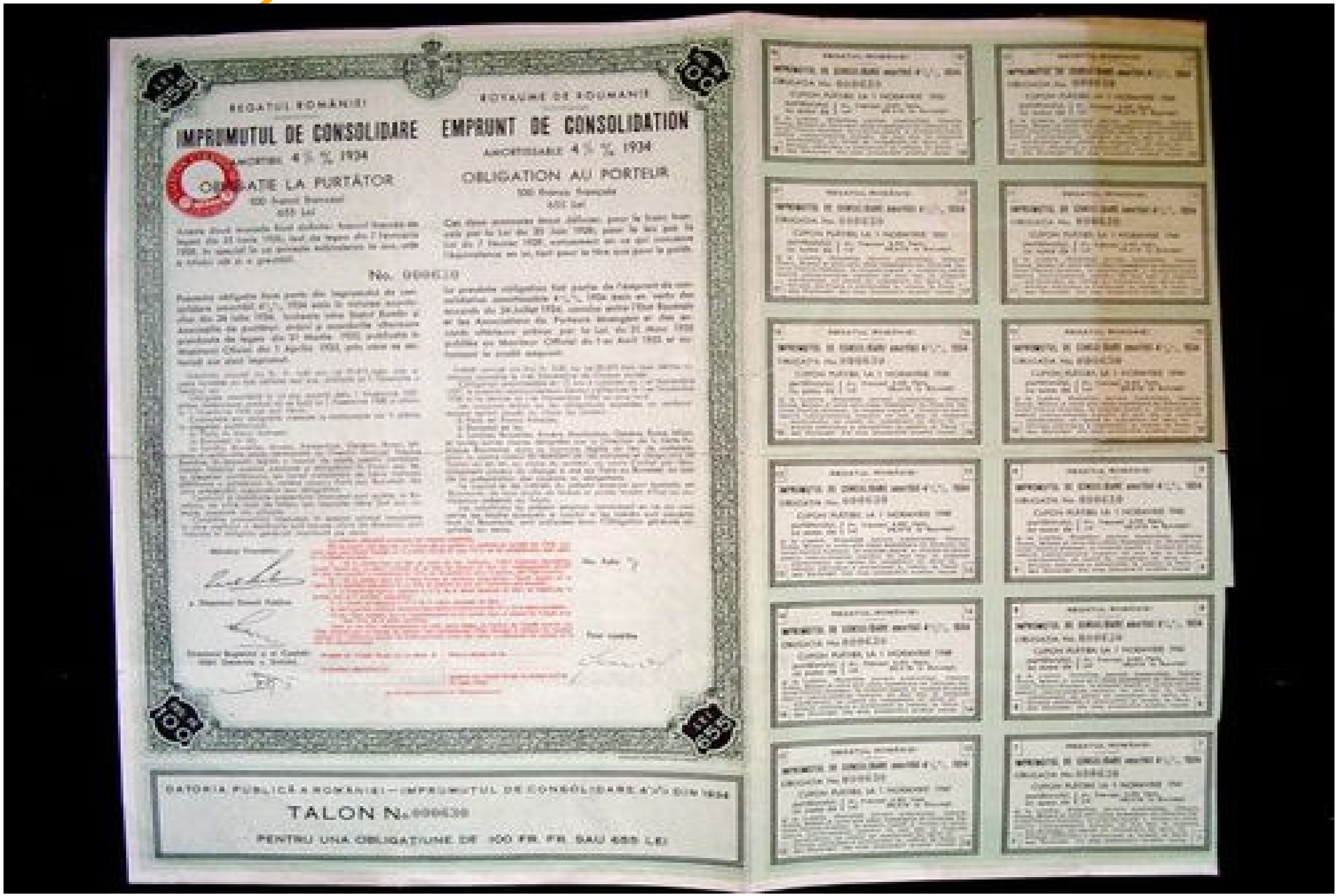
$$PV = \frac{1,000}{(1.05)^{10}} = 613.91$$

Catégories d'obligation (2/2)

- **Obligation classique (Level-coupon bond)**
- Paiement périodique d'intérêts (*coupons*)
  - Europe : d'ordinaire une fois par an
  - US : tous les 6 mois
  - Coupon d'ordinaire exprimé en % du *principal*
  - A l'échéance, remboursement du principal
- Exemple : Emprunt d'état émis en 2011 dont le 1er coupon tombe dans exactement un an
  - Coupon 5.00%
  - Valeur Faciale 100
  - Échéance finale 2016

2011	2012	2013	2014	2015	2016
	5.00	5.00	5.00	5.00	105.00

Coupon, valeur faciale



Evaluer une obligation classique

$$P_0 = \frac{C}{1+r_1} + \frac{C}{(1+r_2)^2} + \ldots + \frac{C}{(1+r_T)^T} + \frac{100}{(1+r_T)^T}$$

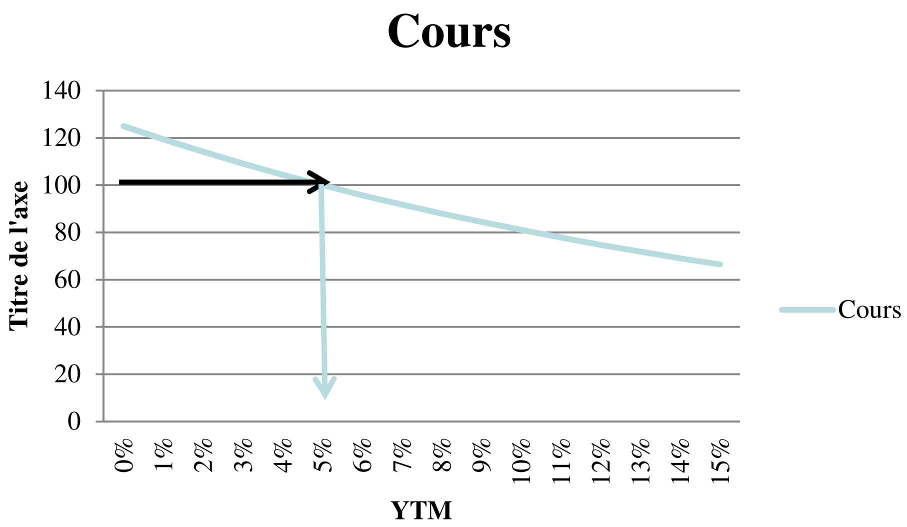
Coupon	5%					
Face value	100					
n	5 ans					
	2011	2012	2013	2014	2015	2016
CF		5	5	5	5	105
Spot rates		0,80%	1,46%	1,96%	2,34%	2,66%
DF		0,99206349	0,97142725	0,94343182	0,91162946	0,8769881
DCF		4,96	4,86	4,72	4,56	92,08
Price	111,18 "=SOMME(C10:G10)"					
Yield to Maturity		2,59% "=TRI(B17:G17)"				
	-111,18	5,00	5,00	5,00	5,00	105,00

Note: Si $P_0 > F$: l'obligation cote au-dessus du pair
Si $P_0 < F$: l'obligation cote en-dessous du pair

Yield to maturity

- Si on connaît le cours de l'obligation
- *Yield to maturity* = taux d'actualisation implicite
- YTM ⇔ TRI (IRR)
- Solution de l'équation:

$$P_0 = \frac{C}{1+y} + \frac{C}{(1+y)^2} + \ldots + \frac{C+F}{(1+y)^T}$$



Quand une obligation cote-t-elle au-dessus du pair?

$$P_0 > F \quad \leftrightarrow \quad C/F > y$$

- Notations: C = coupon, F = valeur faciale, P = prix (cours)
- Supposons $C/F > y$
- 1 an avant l'échéance: $P_0 = \frac{C+F}{1+y} = F\frac{1+\frac{C}{F}}{1+y} \Rightarrow P_0 > F$
- 2 ans avant l'échéance : $P_0 = \frac{C+P_1}{1+y}$ avec $P_1 = \frac{C+F}{1+y}$
- Si: $P_1 > F$

$$P_0 > \frac{C+F}{1+y} = F\frac{1+\frac{C}{F}}{1+y} > F$$

Une obligation classique , somme de zéro-coupons

- « Découper » l'obligation classique en autant de zéro-coupons coupons que de paiements

- Si le taux du marché = 5% et le coupon vaut 6.5%

	Valeur faciale	Echéance	Valeur
• Zéro 1	6.50	1	6.19
• Zéro 2	6.50	2	5.89
• Zéro 3	6.50	3	5.61
• Zéro 4	6.50	4	5.35
• Zéro 5	106.50	5	83.45
Total			106.49

Loi du Prix Unique

- Supposons que l'on observe les données suivantes:

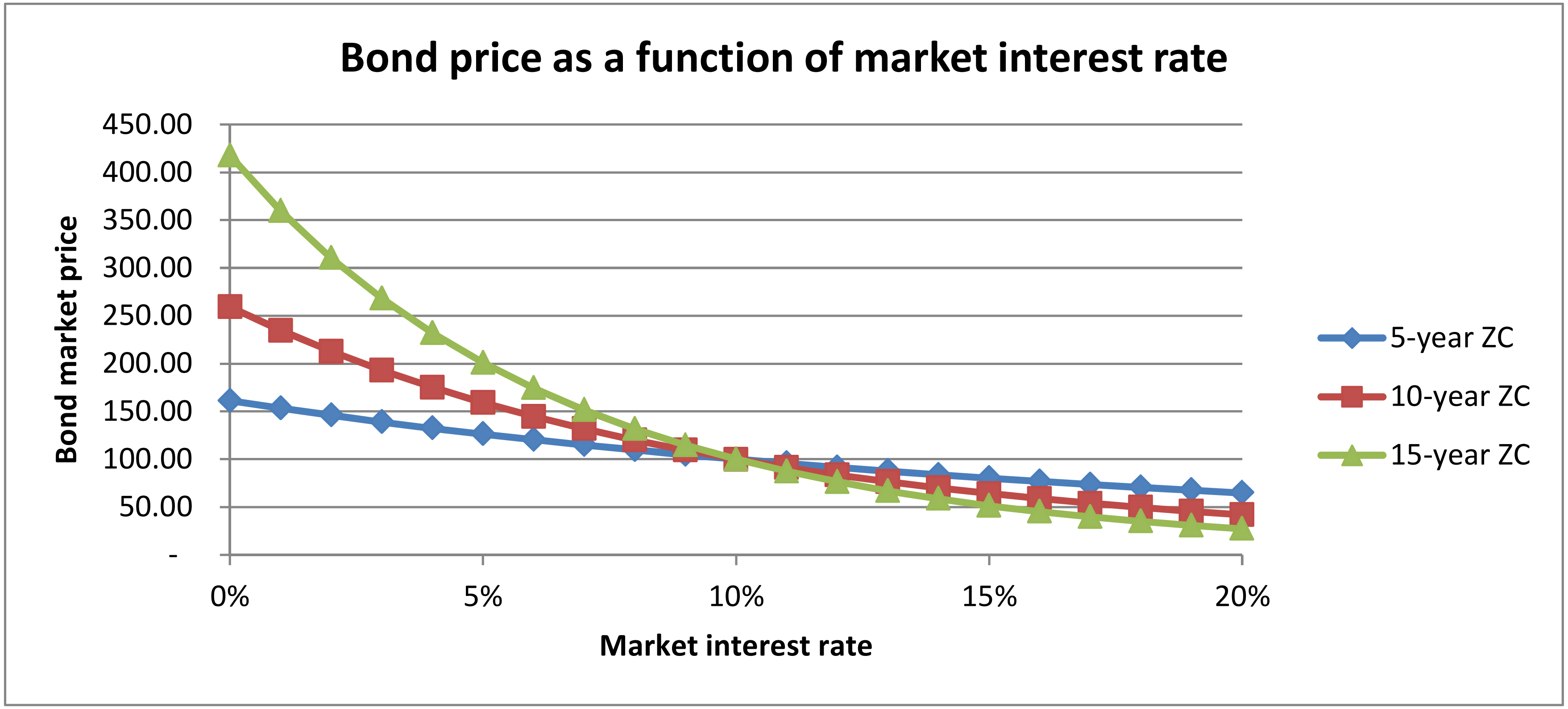
		Maturity		
Bond	Price	1	2	3
A	100.97	104	0	0
B	105.72	7	107	0
C	101.56	5.5	5.5	105.5

- Que valent les taux d'intérêts sous-jacents? Méthode de "Bootstrap"

$$100.97 = v_1 \; 104$$
$$105.72 = v_1 \; 7 + v_2 \; 107$$
$$101.56 = v_1 \; 5.5 + v_2 \; 5.5 + v_3 \; 105.5$$

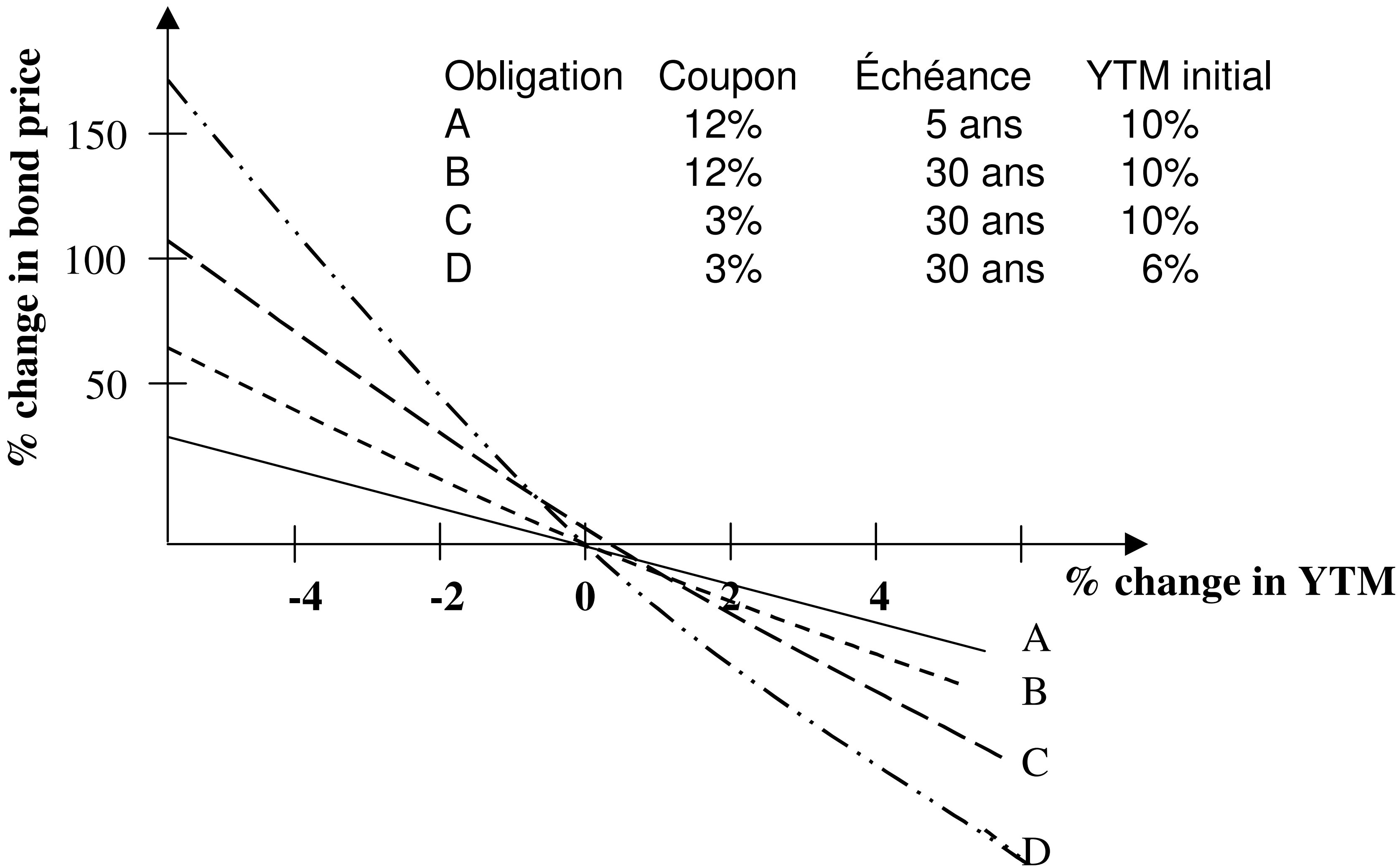
	1	2	3
Discount factors	0.971	0.925	0.864
Spot rates	3%	4%	5%

Sensibilité des Z-C aux taux



Sensibilité des cours, qu'est-ce qui joue un rôle?

Obligation	Coupon	Échéance	YTM initial
A	12%	5 ans	10%
B	12%	30 ans	10%
C	3%	30 ans	10%
D	3%	30 ans	6%



Malkiel (1962)

Toutes autres choses étant égales par ailleurs:

1) Le prix des obligations est inversement relié aux taux actuariels
2) Un accroissement du YTM d'une obligation entraîne une plus petite variation de prix qu'une diminution de YTM de même magnitude
3) Le cours d'obligations à LT tend à être plus sensible à une variation de taux
4) Le risque de taux est inversement relié au taux du coupon de l'obligation

=> Apparition du concept de duration pour tenir compte de ces éléments

Reference: Burton G. Malkiel, "Expectations, bond prices and the term structure of interest rates" , *Quarterly Journal of Economics*, 76, (May 1962), pp. 197-218.

Duration pour un Zéro-coupon

- Supposons un zéro-coupon avec une échéance de t années:

$$P = \frac{100}{(1+r)^t}$$

- Que se passe-t-il si *r* change?

$$\frac{dP}{dr} = -t\frac{100}{(1+r)^{t+1}} = -\frac{t}{1+r} \times \frac{100}{(1+r)^t} = -\frac{t}{1+r}P$$

- Pour un P donné, le changement est proportionnel à l'échéance.

- Comme 1$^{\text{ère}}$ approximation (pour un petit changement de *r*):

$$\frac{\Delta P}{P} = -\frac{t}{1+r}\Delta r$$

Duration = Echéance

Duration pour obligations classiques

- Supposons une obligation avec les cash flows: $C_1, ..., C_T$
- Similaire à un portefeuille de T zéro-coupons.
- La valeur de l'obligation est: $P = PV(C_1) + PV(C_2) + ... + PV(C_T)$
- Fraction investie dans chaque zéro-coupon t: $w_t = PV(C_t) / P$
- *Duration* : moyenne pondérée des échéances des zéro-coupons

  $D = w_1 \times 1 + w_2 \times 2 + w_3 \times 3 + \ldots + w_t \times t + \ldots + w_T \times T$

Duration - exemple

- Revenons à notre obligation à 5ans au coupon de 6.50% (taux d'intérêt du marché = 5%):

	Valeur faciale	VA	w_t
ZC 1	6.50	6.19	5.81%
ZC 2	6.50	5.89	5.53%
ZC 3	6.50	5.61	5.27%
ZC 4	6.50	5.35	5.02%
ZC 5	106.50	83.44	78.35%
Total		106.49	

- Duration $D = 5.81\% \times 1 + 5.53\% \times 2 + 5.27\% \times 3 + 5.02\% \times 4 + 78.35\% \times 5$

  $= 4.44$
- Ceci représente la duration <u>*si le taux d'intérêt vaut 5%*</u>
- Pour des obligations classiques, duration < échéance

Estimation de la variation de prix sur base de la duration

- Formule générale:

$$\frac{\Delta P}{P} = -\frac{Duration}{1+r}\Delta r$$

- Dans l'exemple: *Duration* = 4.44 (quand r=5%)
- Si Δr =+1% : Δ ×4.44 × 1% = - 4.23%

Différence due à la convexité

- Check: Si r = 6%, P = 102.11
- $\Delta P/P$ = (102.11 – 106.49)/106.49 = - 4.11%

Duration - maths

- Si le taux d'interêt change:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dPV(C_1)}{dr} + \frac{dPV(C_2)}{dr} + \ldots + \frac{dPV(C_T)}{dr}$$

$$= -\frac{1}{1+r} PV(C_1) - \frac{2}{1+r} PV(C_2) - \ldots - \frac{T}{1+r} PV(C_T)$$

- Divisons les deux termes par *P* pour déterminer le % de changement:

$$\frac{dP}{dr}\frac{1}{P} = -\frac{1}{1+r}\left(1\times\frac{PV(C_1)}{P} + 2\times\frac{PV(C_2)}{P} + \ldots + T\times\frac{PV(C_T)}{P}\right)$$

- Comme: $$Duration = 1\times\frac{PV(C_1)}{P} + 2\times\frac{PV(C_2)}{P} + \ldots + T\times\frac{PV(C_T)}{P}$$

- On obtient: $$\frac{dP}{dr}\frac{1}{P} = -\frac{Duration}{1+r}$$

Gestion obligataire

Deux types de risque interviennent dans la gestion obligataire:

1. Le risque de taux (quand les taux montent le prix baisse et vice versa)
2. Le risque de réinvestissement (à quel taux est-il possible de réinvestir les coupons reçus?)

Ces éléments vont dans des directions opposées!!!

- Stratégie d'immunisation : se couvrir contre les changements de taux. Idée de base: deux portefeuilles de même duration réagissent identiquement à des changements de taux.

- Supposons que nous recevons un dépôt de 10000$ pour lequel nous devons payer un intérêt de 8% en moyenne chaque année pour les 5 prochaines années. Le paiement se fera cependant en une fois dans 5 ans. Nous devrons donc: $10000 \times (1{,}08)^5 = 14693{,}28\$$
- Comment pourrions-nous nous couvrir du risque de taux? En achetant une obligation classique à 5 ans avec un coupon de 8%?

Immunisation

Si les taux restent constants: pas de problème, les coupons seront réinvestis à du 8% et finalement nous aurons: $10000 \times (1{,}08)^5 = 14693{,}28\$$

Que se passerait-il cependant si les taux devaient varier?

Imaginons que les taux changent l'an prochain puis demeurent à leur nouveau niveau?

Taux	Valeur en t = 5
5%	*14420,51*
6%	*14509,67*
7%	*14600,59*
8%	**14693,28**
9%	**14787,77**
10%	**14884,08**

Immunisation

- Cet exemple montre que l'échéance seule ne nous permet pas de couvrir notre position de manière satisfaisante....

- Alternative: stratégie d'immunisation basée sur la duration
- Dans notre cas: un paiement final ⇔ ZC donc la duration à couvrir ⇔ échéance.

- Une obligation classique à 6 ans payant un coupon de 8% a presque la même duration. Voyons ce que ça donne dans ce cas là...

Immunisation (1/3), taux passe à 7%

Année	Années restantes	Valeur finale	Total
1	4	$800 \times 1{,}07^4$	1048,64
2	3	$800 \times 1{,}07^3$	980,03
3	2	$800 \times 1{,}07^2$	915,92
4	1	$800 \times 1{,}07$	856
5	0	800	800
Revente obligation	0	10800/1,07	10093,46
TOTAL			14 694,05

Immunisation (2/3), taux passe à 9%

Année	Années restantes	Valeur finale	Total
1	4	$800 \times 1{,}09^4$	1129,27
2	3	$800 \times 1{,}09^3$	1036,02
3	2	$800 \times 1{,}09^2$	950,48
4	1	$800 \times 1{,}09$	872
5	0	800	800
Revente obligation	0	10800/1,09	9908,28
TOTAL			14 696,02

Immunisation (3/3), taux passe à 6%

Année	Années restantes	Valeur finale	Total
1	4	$800 \times 1{,}06^4$	1009,98
2	3	$800 \times 1{,}06^3$	952,81
3	2	$800 \times 1{,}06^2$	898,88
4	1	800 x 1,06	848
5	0	800	800
Revente obligation	0	10800/1,06	9818,18
TOTAL			14 698,36

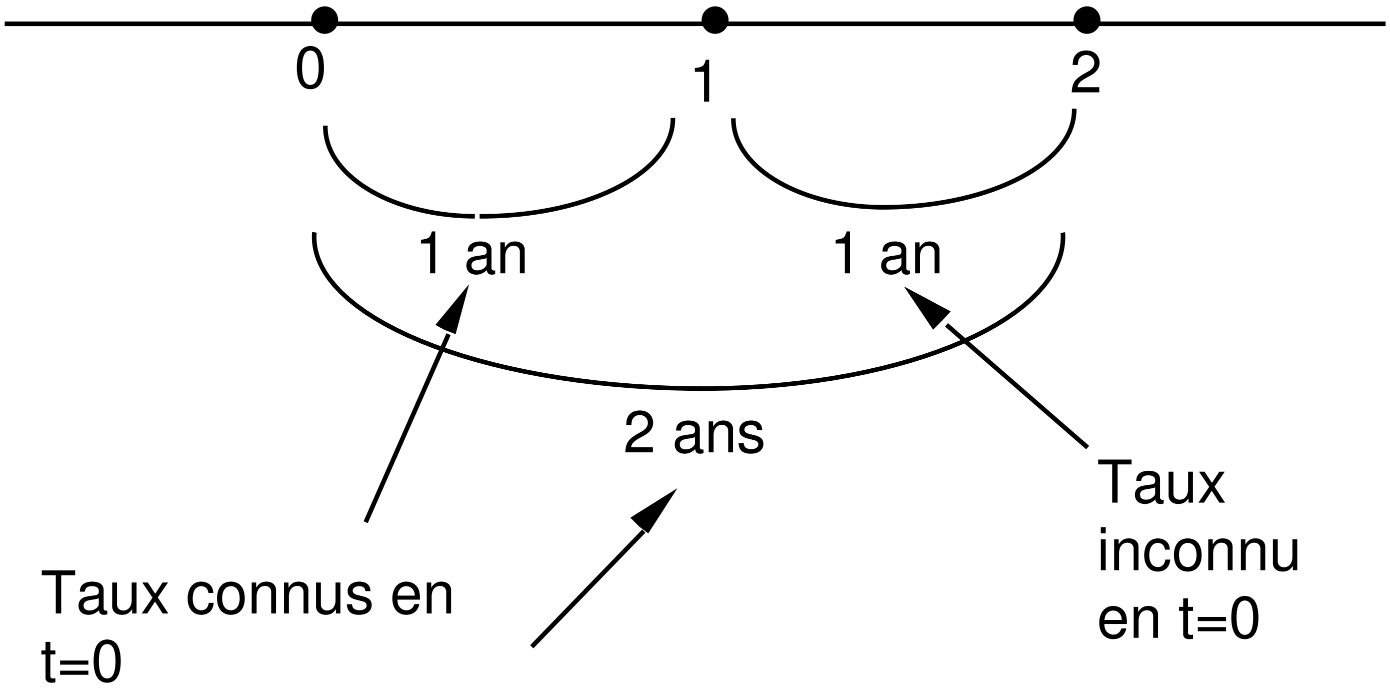
Taux Spots

- Taux spot ⇔ yield to maturity d'un zéro coupon
- Considérons les cours suivants pour des zéro-coupons (Face value = 100):

Echéance	Prix
1-an	95.24
2-ans	89.85

- Le taux *spot* à un an est obtenu en résolvant: $$95.24 = \frac{100}{1+r_1} \Rightarrow r_1 = 5\%$$
- Le taux *spot* à deux ans est obtenu en résolvant : $$89.85 = \frac{100}{(1+r_2)^2} \Rightarrow r_2 = 5.5\%$$
- L'achat d'un ZC à deux ans implique qu'on investit à un taux *moyen* de 5.5% sur ces deux ans
- Mais on peut vouloir emprunter de t = 1 à t = 2 en fixant le taux déjà aujourd'hui… quelle devrait être sa valeur?

Taux Spots et Taux forward



Taux Forward

- Supposons que le taux à un an soit égal à 5%. Quel taux puis-je obtenir pour la seconde année ? Ce taux est nommé le taux *forward*
- Il se calcule comme suit (cf données):
  - $89.85 \times (1.05) \times (1+f_2) = 100 \rightarrow f_2 = 6\%$
- De manière plus générale:

$$(1+r_1)(1+f_2) = (1+r_2)^2$$

- En résolvant pour f_2:

$$f_2 = \frac{(1+r_2)^2}{1+r_1} - 1 = \frac{d_1}{d_2} - 1$$

- La formule générale devient:

$$f_t = \frac{(1+r_t)^t}{(1+r_{t-1})^{t-1}} - 1 = \frac{d_{t-1}}{d_t} - 1$$

- Si la relation liant les taux spots aux taux forwards n'était pas vérifiée il y aurait des opportunités d'arbitrage

Taux forwards: exemples

Echéance	Discount factor	Taux Spot	Taux Forward
1	0.9500	5.26	
2	0.8968	5.60	5.93
3	0.8444	5.80	6.21
4	0.7951	5.90	6.20
5	0.7473	6.00	6.40

- Taux spot à 3 ans : $0.8444 = \frac{1}{(1+r_3)^3} \Rightarrow r_3 = \left(\frac{1}{0.8444}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 5.80\%$
- Forward d'un an de t=2 à t= 3:

$$f_3 = \frac{(1+r_3)^3}{(1+r_2)^2} - 1 = \frac{d_2}{d_3} - 1 = \frac{0.8968}{0.8444} - 1 = 6.21\%$$