Théorie Financière

6. Relation risque – rentabilité attendue (1/2)

ULB
SolvayBrusselsSchool
of Economics and Management

Objectifs de la session

1. Revoir le problème du coût d'opportunité du capital

2. Analyser les statistiques des returns

3. Introduire la variance ou l'écart-type comme mesure du risque d'un portefeuille

4. Voir comment déterminer le taux d'actualisation pour un projet au risque égal à celui du marché

5. Donner un premier aperçu des implications de la diversification

ULB

SolvayBrusselsSchool of Economics and Management

Déterminer le taux d’actualisation pour un projet risqué

- Les actionnaires ont un choix:
  - Soit ils investissent dans les projets réels des sociétés
  - Soit ils investissent dans des titres échangés sur les marchés des capitaux

- Le *coût du capital* est le coût d’opportunité d’investir dans des actifs réels

- Il se définit comme la rentabilité attendue sur les marchés des capitaux qu’on aurait pu espérer pour un investissement dans un actif réel ***de même risque***

ULB
Solvay Brussels School of Economics and Management

Trois idées clefs

1. Les returns sont des variables aléatoires distribuées selon une loi normale
    - Markowitz 1952: théorie du portefeuille, diversification

2. Les prix des actions ne sont pas prévisibles (Hypothèse de l'efficience des marchés)
    - Kendall 1953: Mouvements du prix des actions est aléatoire

3. Capital Asset Pricing Model (Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers)
    - Sharpe 1964, Lintner 1965
    - Les rentabilités espérées sont fonction du risque systématique (risque de marché)

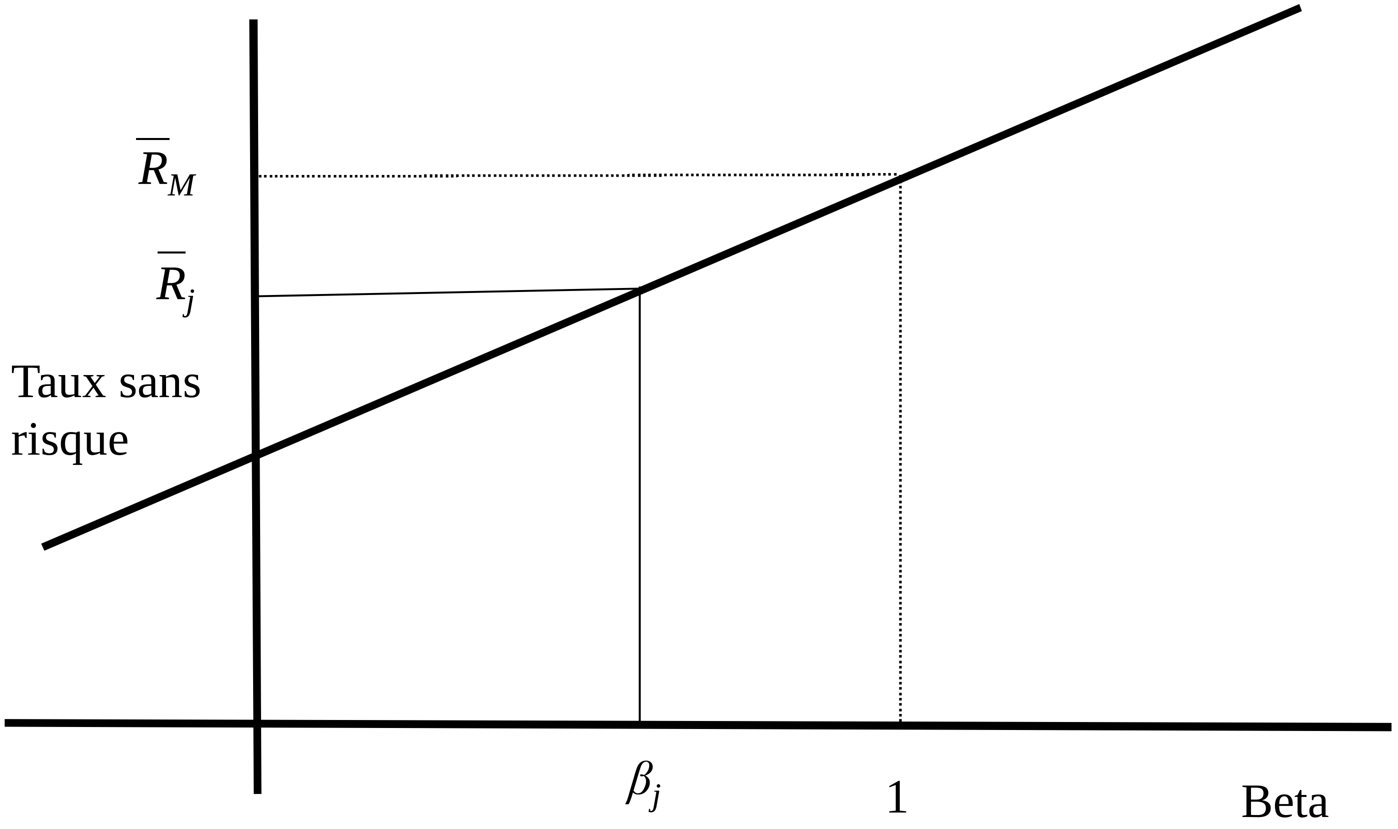
Avant-goût de la suite

- En premier lieu, nous analyserons les rentabilités passée pour obtenir une estimation de la prime de *risque historique du marché* (la rentabilité excédentaire obtenue en investissant dans des actifs risqués par opposition à l'actif sans risque)
- Puis nous verrons les implications de la diversification.
- Nous montrerons que:
  - La diversification permet à l'investisseur d'éliminer une partie du risque d'un titre s'il était détenu seul (le risque non systématique (*unsystematic)*– encore nommé le risque idiosyncratique).
  - Seul le risque restant (le risque *systématique*) doit être rétribué par une rentabilité attendue supérieure
  - Le risque systématique d'une action est mesuré par son *beta* (β), une mesure de la sensibilité du return d'une action par rapport au return non anticipé du portefeuille de marché
  - La rentabilité attendue d'un titre doit être positivement corrélée au beta du titre

Capital Asset Pricing Model

Rentabilité attendue

$$\overline{R}_j = R_F + (\overline{R}_M - R_F) \times \beta_j$$



Returns

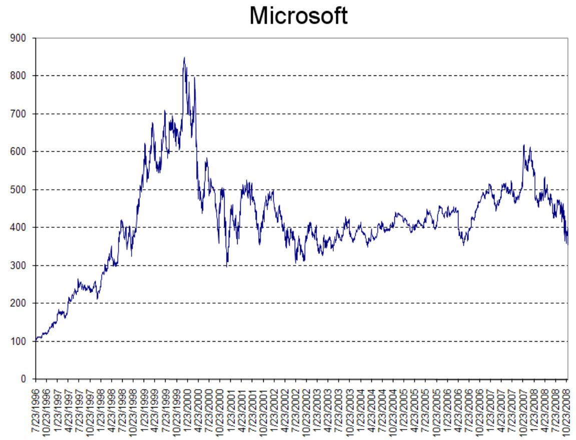
- Les éléments de base que nous utiliserons sont les rentabilités (returns) exprimés en pourcent sur une période donnée:

$$R_t = \frac{div_t}{P_{t-1}} + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

- Le taux de rentabilité est un taux par dollar (ou EUR, ou £, …) investi dans un titre. Il provient:
  - de la rémunération du titre (dividend yield)
  - du gain en capital

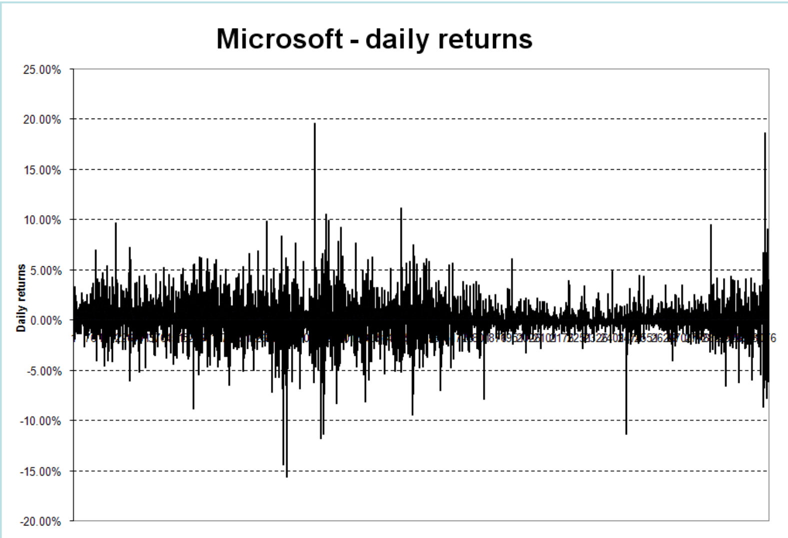
- La période pourrait être de n’importe quelle longueur: un jour, un mois, un trimestre, un an.

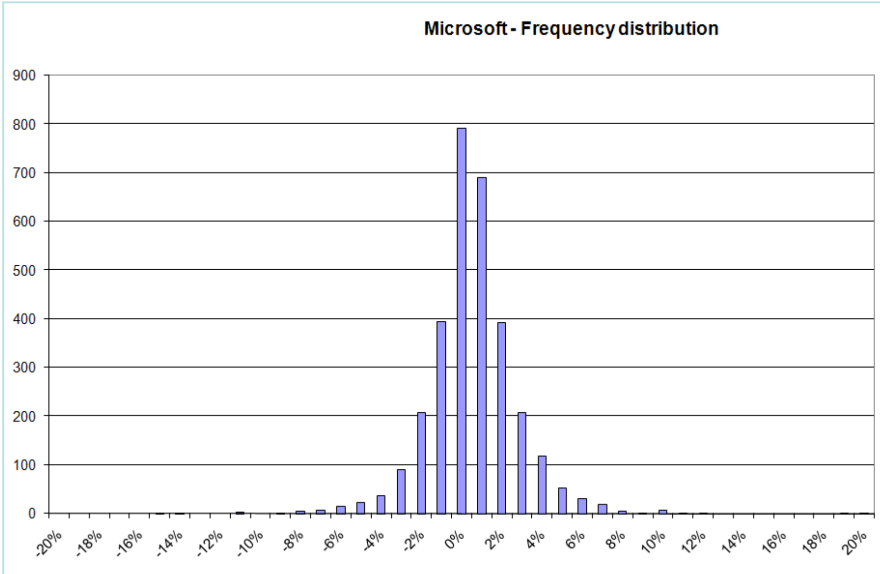
Exemple: Microsoft 1996-2008



Data downloaded form www.finance.yahoo.con

	MSFT		S&P500
From:	23-Jul-96	From:	23-Jul-96
To:	7-Nov-08	To:	7-Nov-08
# obs	3,096		3,096
Mean	0.07%	Mean	0.02%
StDev	2.23%	StDev	1.25%
Max	19.60%	Max	11.58%
Min	-15.61%	Min	-9.03%
Skewness	0.28		0.04
Kurtosis	6.99		8.40





Returns totaux USA 1926-2002

	Moyenne Arithmétique (%)	Ecart-Type (%)	Prime de risque (%)
Actions ordinaires	**12.2**	**20.5**	**8.4**
Actions de petites sociétés	**16.9**	**33.2**	**13.1**
Obligations Corporate LT	**6.2**	**8.7**	**2.4**
Obligations Souveraines LT	**5.8**	**9.4**	**2.0**
Obligations Souveraines MT (1926-1999)	**5.4**	**5.8**	**1.6**
U.S. T-Bills	**3.8**	**3.2**	
Inflation	**3.1**	**4.4**	

Source: Ross, Westerfield, Jaffee (2005) Table 9.2

Prime de risque pour actifs risqués

- La prime de risque est la rentabilité excédentaire gagnée en investissant dans un actif risqué par opposition à un actif sans risque

- Les U.S.Treasury bills, des obligations CT, souvent considérées comme sans risque seront utilisées comme une approximation de l'actif sans-risque.

- La prime *ex post* (après les faits) encore appelée prime réalisée est calculée en soustrayant la rentabilité moyenne de l'actif sans risque de la rentabilité moyenne pour un actif de risque moyen.

- Rentabilité de l'actif sans-risque = rentabilité sur les T-Bills à un an

- Prime de risque = rentabilité excédentaire moyenne pour un actif risqué

Prime de risque du marché: Le très LT

L'equity premium puzzle:

	1802-1870	1871-1925	1926-1999	**1802-2002**
Actions ordinaires	6.8	8.5	**12.2**	**9.7**
Treasury Bills	5.4	4.1	**3.8**	**4.3**
Prime de risque	1.4	4.4	**8.4**	**5.4**

Source: Ross, Westerfield, Jaffee (2005) Table 9A.1

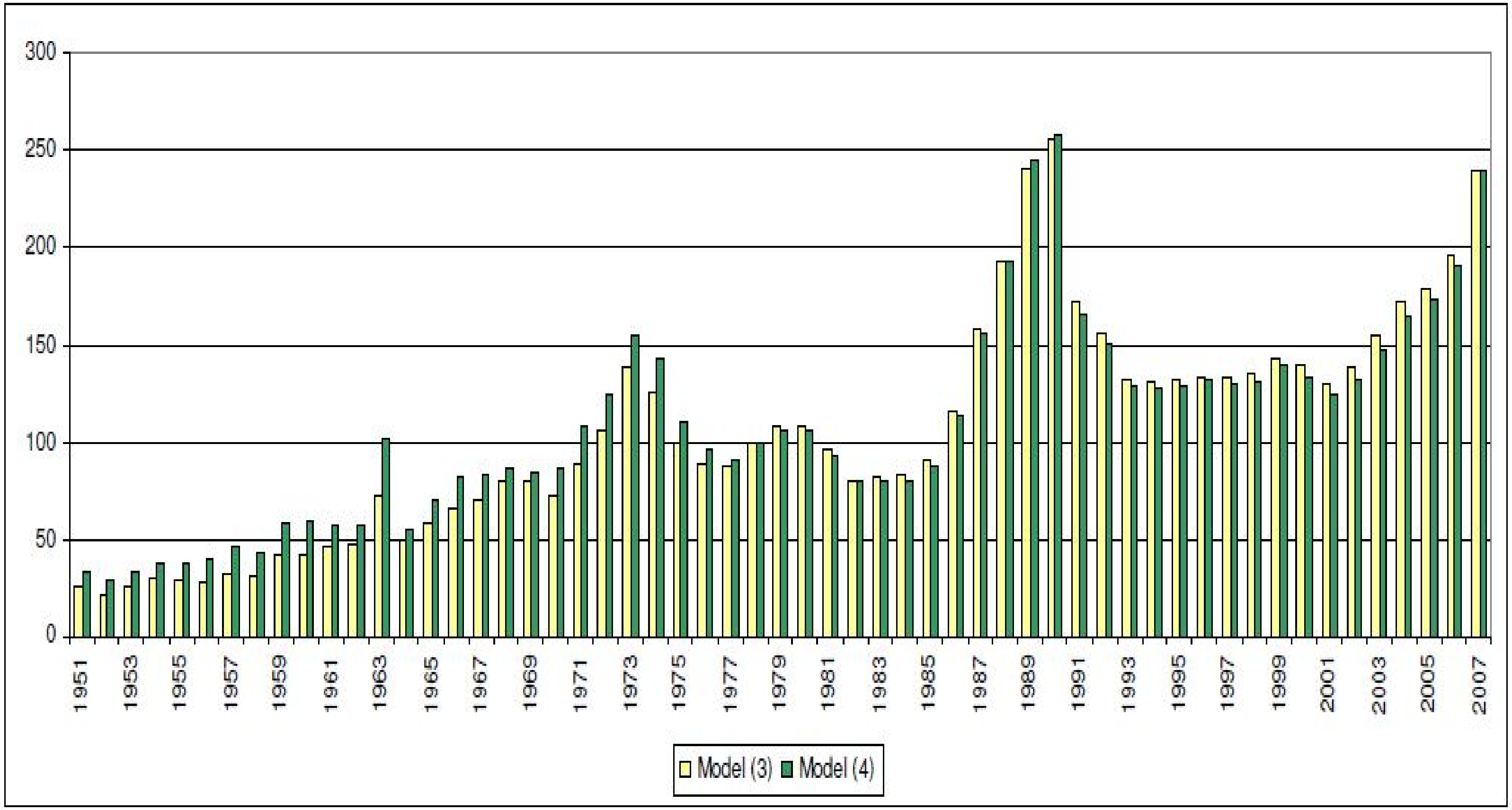
Le 20ème siècle constitue-t-il une anomalie?

Volatilité: évolution récente

Mais aussi par exemple marché de l’art

Figure 2: Hedonic price index 1951-2007 for benchmark models

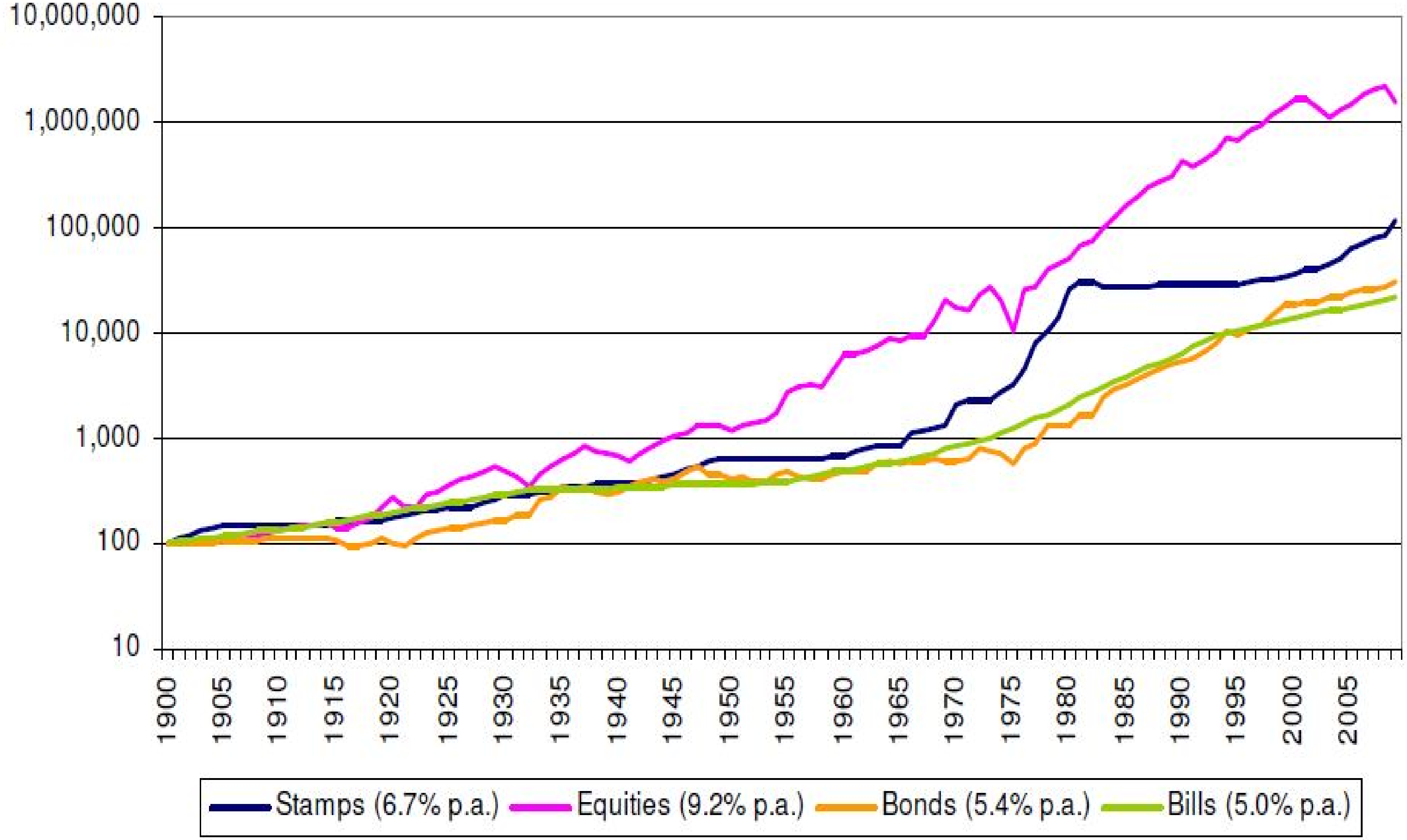
Figure 2 presents our general hedonic price indices since 1951, based on the results of models (3) and (4). The index values in 1978 are set equal to 100.



Source: Renneboog and Spaenjers (2012)

Ou les timbres…

Figure 2: Cumulative returns on stamps and financial assets in nominal terms 1900-2008



Source: Dimson and Spaenjers (2011)

Notions d'Efficience des Marchés

- Un marché est efficient si:
  - Il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage : il n'existe pas de repas gratuit
  - L'achat ou la vente de titres au cours du jour n'est jamais une transaction amenant une VAN positive
  - Les cours révèlent de l'information

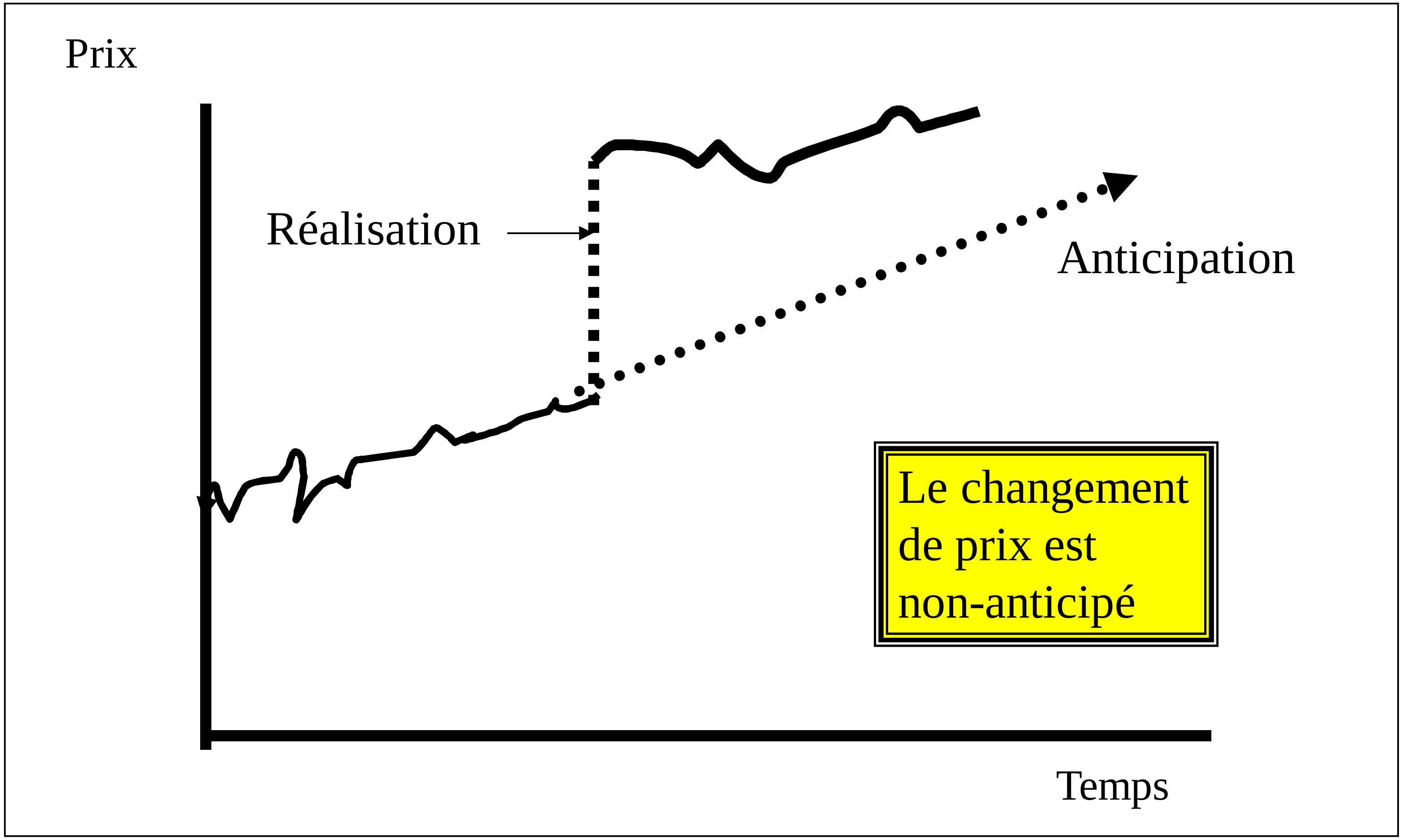
- Trois formes d'efficience des marchés (NB: **efficience informationnelle**)

  (a) Forme Faible d'Efficience
  - Les Prix reflètent toute l'information passée du cours des actions

  (b) Forme Semi-forte d'Efficience
  - Les Prix reflètent toute l'information publique disponible

  (c) Forme Forte d'Efficience
  - Les Prix reflètent toute l'information (publique et privée)

Efficience des marchés: l'intuition



Forme Faible d'Efficience

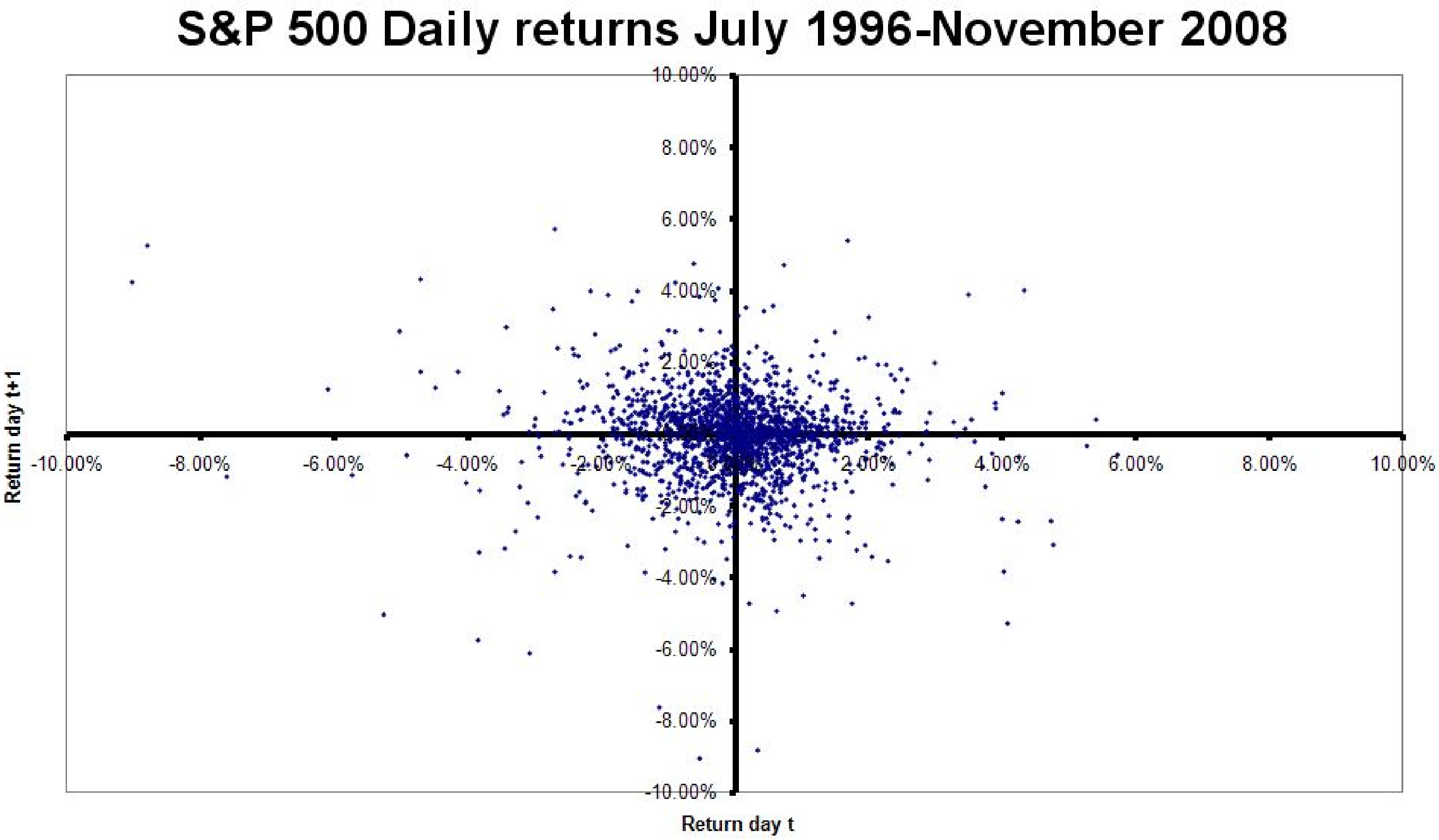
- **Modèle de la marche aléatoire:**
  - $P_t - P_{t\text{-}1} = P_{t\text{-}1}$ * (Rentabilité attendue) + erreur aléatoire
  - Valeur anticipée du terme d'erreur = 0
  - L'erreur aléatoire de la période t n'est pas liée à la composante aléatoire des périodes antérieures

- **Implication:**
  - Valeur anticipée (P_t) = $P_{t\text{-}1}$ * (1 + Rentabilité attendue)
  - Analyse technique: inutile

- **Empiriquement: existence d'auto-corrélation**
  - Coefficient de Corrélation entre les returns actuels et passés
  - Auto-corrélation = Cor (R_t, $R_{t\text{-}s}$)

Modèle de marche aléatoire des cours des actions

$$Correlation(R_t, R_{t+1}) = -0.028$$



Forme Semi-forte d'Efficience

- Les Prix reflètent toute l'information publique disponible

- **Empiriquement: Etudes d'événements (MacKinlay, 1997)**

  – Tester si la publication d'informations influence les returns et si oui quand cette influence se matérialise

  – Return anormal AR : ARt = Rt - Rmt

  – Return anormal cumulé:

$$CAR_t = AR_{t0} + AR_{t0+1} + AR_{t0+2} + \ldots + AR_{t0+1}$$

CAR for earning announcements

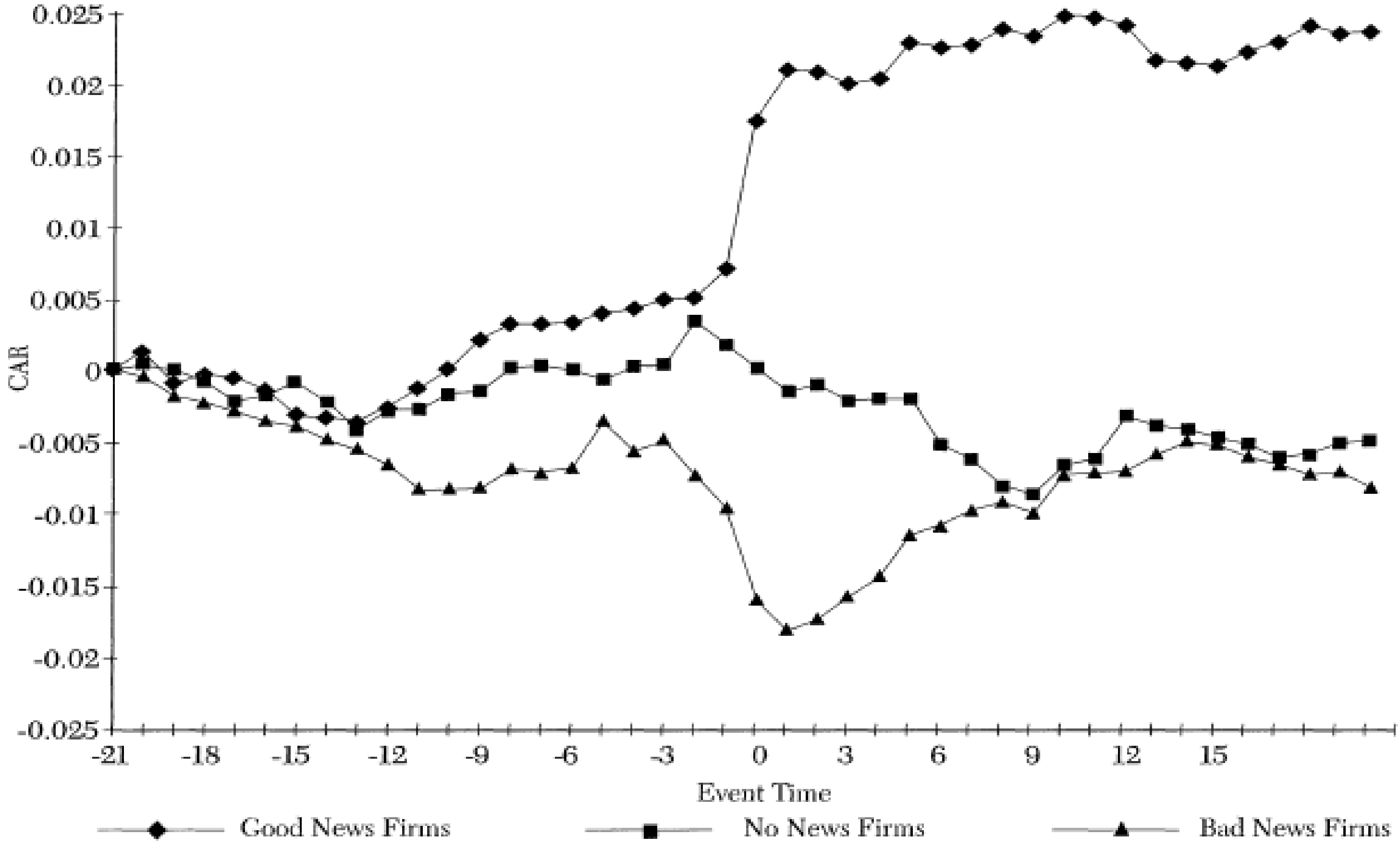


Figure 2b. Plot of cumulative abnormal return for earning announcements from event day -20 to event day 20. The abnormal return is calculated using the constant mean return model as the normal return

Forme Forte d'Efficience

- Comment les gestionnaires (professionnels) de portefeuilles performent-ils?

- Jensen (1968): Les Mutual funds ne génèrent pas de returns anormaux

- $R_{fund} - R_f = \alpha + \beta \, (R_M - R_f)$

- Insider trading: Les insiders semblent en revanche générer des returns anormaux

US Equity Mutual Funds 1982-1991
(Malkiel, 1995)

	Return Annuel Moyen
• Capital appreciation funds	16.32%
• Growth funds	15.81%
• Small company growth funds	13.46%
• Growth and income funds	15.97%
• Equity income funds	15.66%
• S&P 500 Index	17.52%
• Déviation moyenne par rapport au benchmark (ajusté pour le risque)	-3.20%

US Equity Mutual Funds 1982-1991

(Malkiel, 1995)

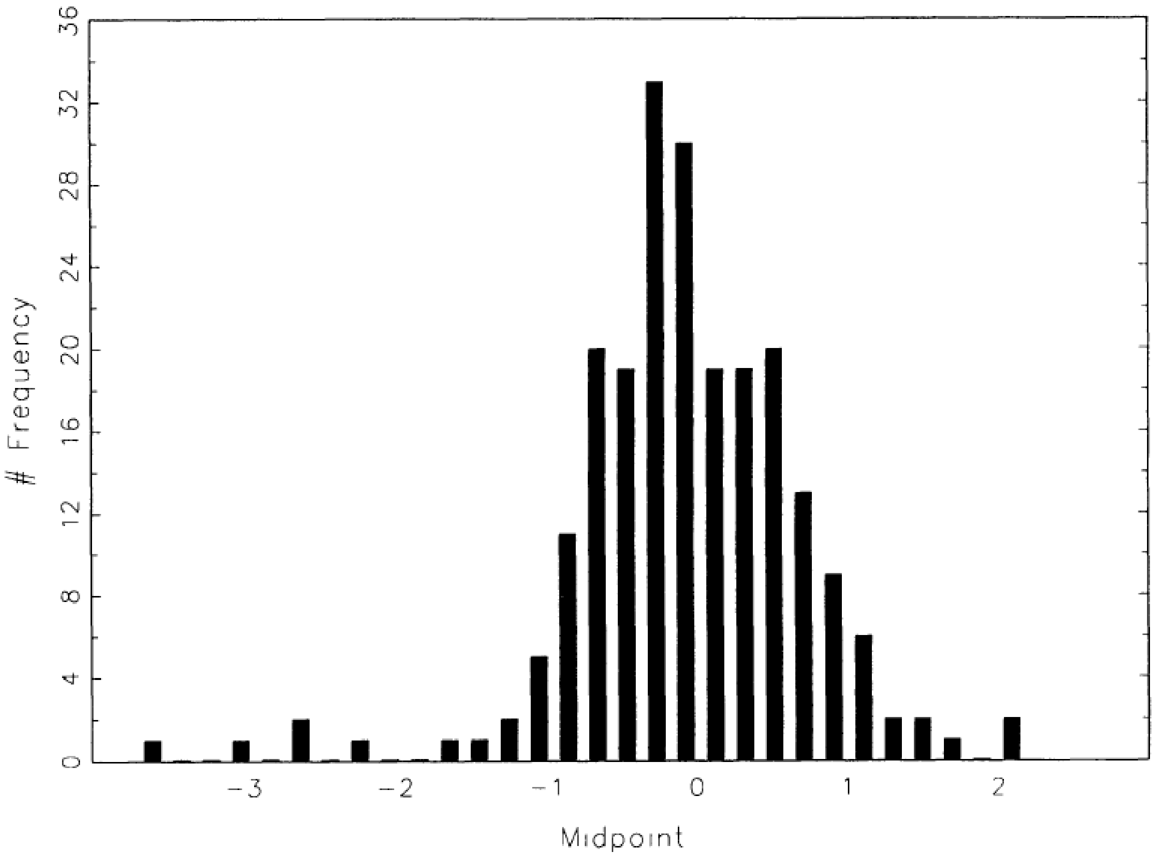


Figure 1. Estimates of Individual Mutual-Fund Alphas 1972 to 1991. The frequency distribution of estimated alphas for all equity mutual funds with 10-year continuous records.

Décomposition des returns des Mutual Fund

(Wermers , 2000)

- Echantillon: 1,758 fonds 1976-1994
- Benchmark 14.8%
- Rentabilité brute 15.8%

+1%

Fonds surperforment par rapport au benchmark

Stock picking +0.75%
Pas de « timing ability »
Déviation du benchmark +0.55%

- Expense ratio 0.8%
- Coûts de transaction 0.8%
- Non stock holdings 0.4%

Insuffisant pour couvrir les coûts

- Rentabilité nette 13.8%

A quoi les marchés réagissent-ils?

- Qui le sait vraiment?

- Enormément de bruit:
  - 1985-1990: 120 jours avec $|\Delta DJ| > 5\%$
    - 28 cas (1/4) attribuables à un événement spécifique

    (Siegel *Stocks for the Long Run* Irwin 1994 p 184)
  - Futures sur jus d'orange (Roll 1984)
    - 90% de la variabilité d'un jour à l'autre ne peut pas être expliquée par les fondamentaux

- Journalistes financiers?

Trading Is Hazardous to Your Wealth
(Barber and Odean , 2000)

- Echantillon: activités de trading de 78,000 ménages 1991-1997

- Conclusions principales:

1. Ménage moyen sous-performe par rapport au benchmark de 1.1% par an
2. Le fait d'effectuer beaucoup d'achats/ventes diminue le return net moyen

   Traders peu actifs: 18.5%   Traders fréquents: 11.4%
3. Les ménages effectuent beaucoup de transactions (75% de turnover annuel)

4Coûts de transaction sont élevés: pour un aller-retour moyen 4%

(Commissions 3%, bid-ask spread 1%)

Choix de Portefeuille

Risque et rentabilité attendue pour des portefeuilles

- Considérons un portefeuille constitué de deux actifs (A,B)
- Caractéristiques:
  - Rentabilité attendue: $\bar{R}_A, \bar{R}_B$
  - Ecart-type: σ_A, σ_B
  - Covariance : $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$
- Portefeuille: défini par les fractions investies dans chacun des actifs X_A , X_B

  $X_A + X_B = 1$
- Rentabilité attendue du portefeuille:

$$\boxed{\bar{R}_P = X_A\bar{R}_A + X_B\bar{R}_B}$$

- Variance de la rentabilité du portefeuille:

$$\boxed{\sigma_P^2 = X_A^2\sigma_A^2 + 2X_AX_B\sigma_{AB} + X_B^2\sigma_B^2}$$

Exemple

- Investissons \$ 100 m dans deux actifs:
  - A   \$ 60 m $X_A = 0.6$
  - B   \$ 40 m $X_B = 0.4$
- Caractéristiques (% par année)   A   B
  - Rentabilité attendue   20%   15%
  - Ecart-Type   30%   20%
- Corrélation   0.5
- **Rentabilité attendue** = 0.6 × 20% + 0.4 × 15% = **18%**
- Variance = $(0.6)^2(.30)^2 + (0.4)^2(.20)^2+2(0.6)(0.4)(0.30)(0.20)(0.5)$

  $\sigma^2_p = 0.0532 \Rightarrow$ **Ecart-type = 23.07 %**
- Inférieur à la moyenne des écarts-types des titres pris individuellement:
  - 0.6 x0.30 + 0.4 x 0.20 = 26%

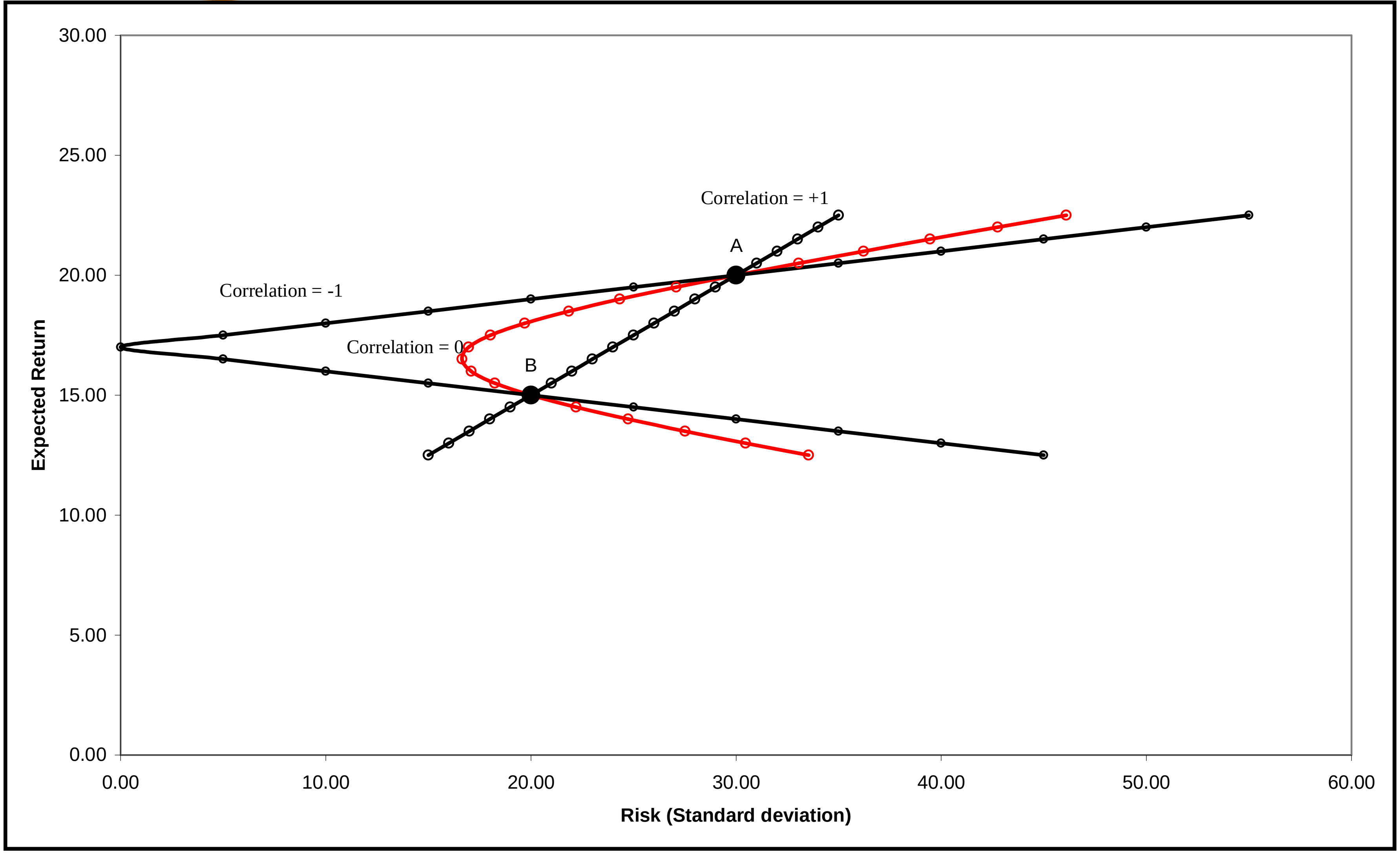
Effet de Diversification

- Varions le coefficient de corrélation

Coefficient de corrélation	Rentabilité attendue	Ecart-type
-1	18	10.00
-0.5	18	15.62
0	18	19.7
0.5	18	23.07
1	18	26.00

- Conclusion:
  - Tant que le coefficient de corrélation est inférieur à un, l'écart-type d'un portefeuille composé de deux titres risqués est inférieur à la moyenne des écarts-types des titres pris individuellement

Portefeuilles efficients pour deux actifs



Combiner l'actif sans risque et un actif risqué

- Considérons le portefeuille P:

	Actif sans risque	Actif risqué
Rentabilité attendue	6%	12%
Ecart-type	0%	20%

- Fraction investie
  - Dans l'actif sans risque 1-*x* (40%)
  - Dans l'actif risqué *x* (60%)

- Rentabilité attendue du portefeuille P : $\boxed{\bar{R}_P = (1-x)R_F + x\bar{R}_S}$

$$\bar{R}_P = 0.40 \times 0.06 + 0.60 \times 0.12 = 9.60\%$$

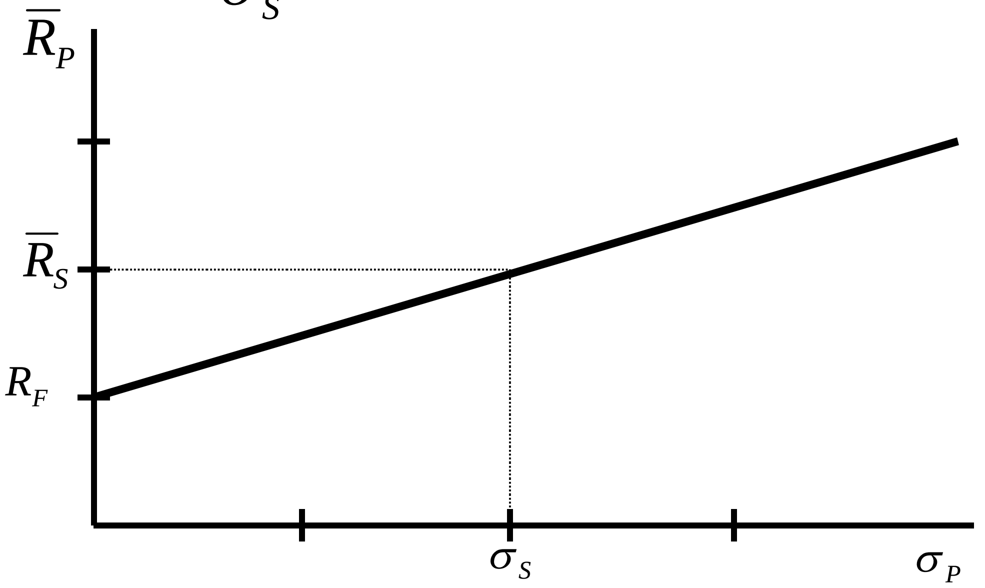
- Ecart-type du portefeuille P : $\boxed{\sigma_P = x\sigma_S}$

$$\sigma_P = 0.60 \times 0.20 = 12\%$$

Relation entre risque et rentabilité attendue

- Combinons les expressions obtenues pour:
  - La rentabilité attendue $\overline{R}_P = (1-x)R_F + x\overline{R}_S$
  - L'écart-type $\sigma_P = x\sigma_S$

- amène $\overline{R}_P = R_F + \dfrac{\overline{R}_S - R_F}{\sigma_S}\sigma_P$ $\overline{R}_P = 0.06 + \dfrac{0.12-0.06}{0.20}\sigma_P = 0.06 + 0.30\sigma_P$



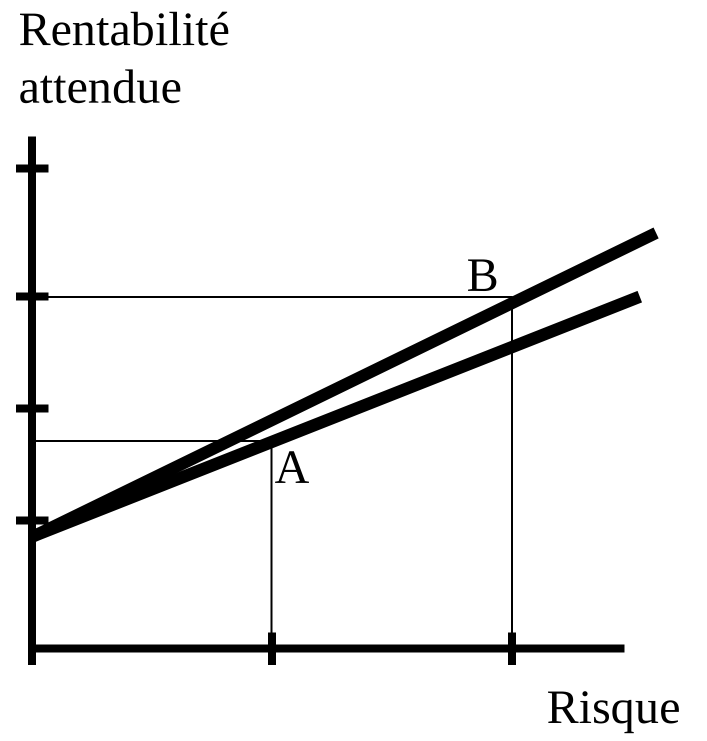
Choisir entre 2 actifs risqués: le ratio de Sharpe

- Choisir l'actif avec le plus grand ratio de rentabilité excédentaire attendue par unité de risque:

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{\overline{R}_i - R_F}{\sigma_i}$$

- Exemple: $R_F = 6\%$

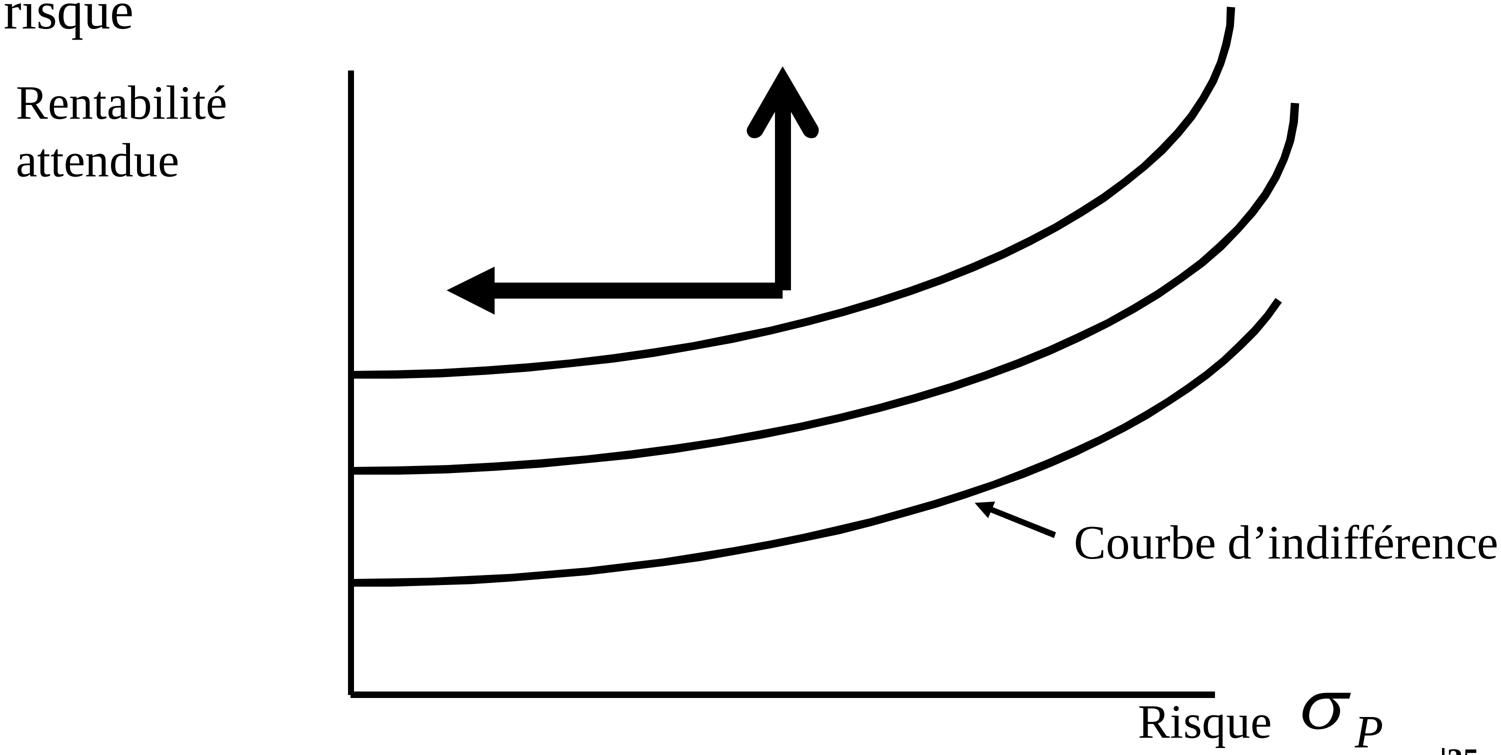
	Renta attendue	Risque
A	9%	10%
B	15%	20%



- Sharpe ratio pour chaque actif
  - A (9-6)/10 = 0.30
  - B (15-6)/20 = 0.45 **

Aversion au risque

- Aversion au risque:
  - Pour un niveau de risque donné, l'investisseur préfère une rentabilité attendue plus élevée
  - Pour un niveau de rentabilité attendue, l'investisseur préfère moins de risque



Fonction d'utilité

- Une représentation mathématique des préférences

$$U(\overline{R}_P, \sigma_P) = \overline{R}_P - a\sigma_P^2$$

- a: coefficient d'aversion au risque

- Exemple: $a = 2$

	$\overline{R}_P$	σ_P	Utilité
A	6%	0	0.06
B	10%	10%	$0.08 = 0.10 - 2\times(0.10)^2$
C	15%	20%	$0.07 = 0.15 - 2\times(0.20)^2$

- B est préféré

Choix optimal avec un seul actif risqué

- Actif sans risque: R_F Proportion = 1-x
- Portefeuille risqué S: $\overline{R}_S, \sigma_S$ Proportion = x

- Utilité: $$u = \overline{R}_P - a\sigma_P^2 = [(1-x)R_F + x\overline{R}_S] - ax^2\sigma_S^2$$

- Optimum: $$\frac{du}{dx} = (\overline{R}_S - R_F) - 2ax\sigma_S^2 = 0$$

- Solution: $$\boxed{x = \frac{1}{2a} \times \frac{\overline{R}_S - R_F}{\sigma_S^2}}$$

- Exemple: a = 2 $$x = \frac{1}{2a} \times \frac{\overline{R}_S - R_F}{\sigma_S^2} = \frac{1}{2 \times 2} \times \frac{0.12 - 0.06}{(0.20)^2} = 0.375$$

Portefeuilles efficients pour deux actifs