ULB
Solvay Brussels School
of Economics and Management

Théorie Financière

8. Produits dérivés

Objectifs de la session

1. Définir les produits dérivés (forward, futures et options (calls et puts)
2. Analyser les flux financiers terminaux
3. Définir des stratégies de base
4. Modèle binomial d'évaluation des options
5. Formule de Black Scholes

ULB

Solvay Brussels School of Economics and Management

Produits dérivés

Produits dont la valeur dépend de celle d'un autre élément (le sous-jacent)

Deux catégories principales analysées ici:

1. Forwards et futures: opérations à terme. On entre dans un contrat aujourd'hui qui sera réalisé dans un date future (aux conditions fixées aujourd'hui).
2. Options qui donnent à leur détenteur le droit de réaliser une opération financière dans le futur à des conditions fixées aujourd'hui

UNE DISTINCTION IMPORTANTE:

Forwards et futures :	se réaliseront à maturité
Options:	peuvent se réaliser à maturité (en fonction du désir du détenteur de l'option qu'il en soit ainsi)

Forwards

Contrat par lequel vous achetez (position longue) ou vendez (position courte) un sous-jacent à l'échéance

Deux grands types de contrats à terme: forwards (les plus importants en volume) et futures

Forwards: OTC (de gré à gré) => créés sur mesure et dès lors plus difficiles à revendre. Pas de « marking to market » et pas d'appel de marge avant l'échéance.

Futures: Echangés sur les marchés financiers et donc standardisés, présence d'un « marking to market », et nécessité de respecter les marges etc…

ULB
Solvay Brussels School of Economics and Management

Futures

- Evolution: Forte croissance depuis les années 1980's
- En pratique: contrats doivent transiter par une chambre de compensation ("clearinghouse"), un intermédiaire entre acheteur et vendeur de futures (ceci vaut aussi pour les options échangées sur les marchés)
- Chambre de compensation: position ⇔ nulle (reçoit le sous-jacent en payant la somme requise et récupère cette somme de l'acheteur).
- Fonction: agir comme garant en cas de défaut de l'une des deux parties

Futures

- D’ordinaire liquidés avant l’échéance (par une opération inverse, “reverse trade”)
- L’échange de l’actif sous –jacent est extrêmement rare (1 à 3% des cas); la plupart du temps: compensation.
- Marges: obligation de faire un dépôt pour assurer la transaction (T-Bills ou cash par exemple) laissés en collatéral
- « Marking to market »: Ajustement journalier pour tenir compte des variations de prix du sous-jacent
- En cas de pertes successives, appel de marge

Forwards

Comment valoriser ces produits???

Il existe une alternative à un contrat forward :

Emprunter la valeur du sous-jacent aujourd'hui, acheter le sous-jacent et rembourser l'emprunt à l'échéance

Par le principe d'absence d'arbitrage => les deux méthodes doivent avoir le même coût

Forwards

	Cash-Flows
T = 0	
Emprunter (au taux continu sans risque r_f)	
la valeur du sous-jacent	+S
Acheter le sous-jacent	-S
	= 0
A l'échéance t (t ans)	
Remboursement	$-Se^{rt}$

Forwards

Le prix doit être égal à la valeur calculée précédemment, sinon il existerait des opportunités d'arbitrage

En d'autres mots, le prix du forward F (d'échéance t), doit valoir:

$F = S \times e^{rt}$

Que se passet-il si la détention de l'actif sous-jacent entraîne des coûts (de stockage par exemple) ou au contraire génère un revenu (dividendes par exemple)?

ULB Solvay Brussels School of Economics and Management

Forwards

Exemple: Contrat forward sur du riz (qui implique d'importants frais de stockage)

Il existe toujours deux options:

1. Emprunter pour acheter le sous-jacent et pour payer les frais de stockage (dont la valeur actuelle est connue et vaut C)
2. Rentrer dans un contrat long à terme

Dans ce cas on aura,

$F = (S + C)\, e^{rt}$

Forwards

Exemple: Contrat forward (échéance t_2) sur une action qui versera un dividende D en t_1 ($t_1 < t_2$)

Il existe toujours deux options :

1. Emprunter pour acheter le sous-jacent (et recevoir le dividende D en t_1)
2. Rentrer dans un contrat long à terme

Dans les deux cas nous aurons l'action en t_2. En revanche, dans le premier cas, on obtient le dividende D en t_1 … Donc on pourrait emprunter sa valeur actuelle en t_0. Et à partir de là…

Forwards, CF

	T_0	T_1	T_2
Emprunter	S		$-S \times e^{rt_2}$
Acheter l'action	-S	D	
Emprunter VA(D)	$PV(D) = D \times e^{-rt_1}$	-D	
Placer PV(D)	-PV(D)		$[PV(D)] \times e^{rt_2}$
TOTAL	0	0	$-[S-PV(D)] \times e^{rt_2}$

Dans ce cas,

$F = [S-PV(D)] \times e^{rt_2} = [S - D \times e^{-rt_1}] \times e^{rt_2}$

Options définitions

Un call (put) donne à son détenteur

- le ***droit*** :
  - d'acheter (de vendre)
  - un actif sous-jacent (actions, obligations, portefeuilles, ...)
  - à ou jusqu'à une certaine date (l'échéance)
    - à : option « européenne »
    - Jusqu'à: option « américaine »
- à un prix fixé à l'avance (le prix d'exercice ou encore striking price)

- L'acheteur paye une prime au vendeur

Payoff terminal: Call européen (détenteur)

- Exercer l'option si à l'échéance:

Prix du sous-jacent > Prix d'exercice

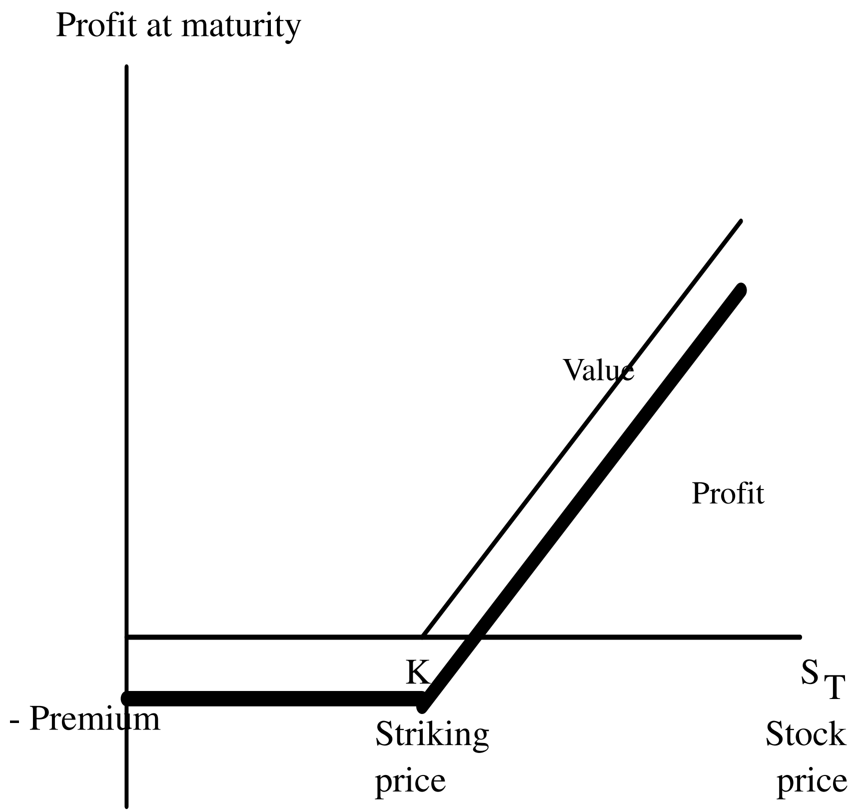
S_T > K

- Valeur du call à l'échéance

  $C_T = S_T - K$ si $S_T > K$

  sinon : $C_T = 0$

- $C_T = MAX(0, S_T - K)$



Payoff terminal: Put européen (détenteur)

- Exercer l'option si à l'échéance:

Prix du sous-jacent < Prix d'exercice

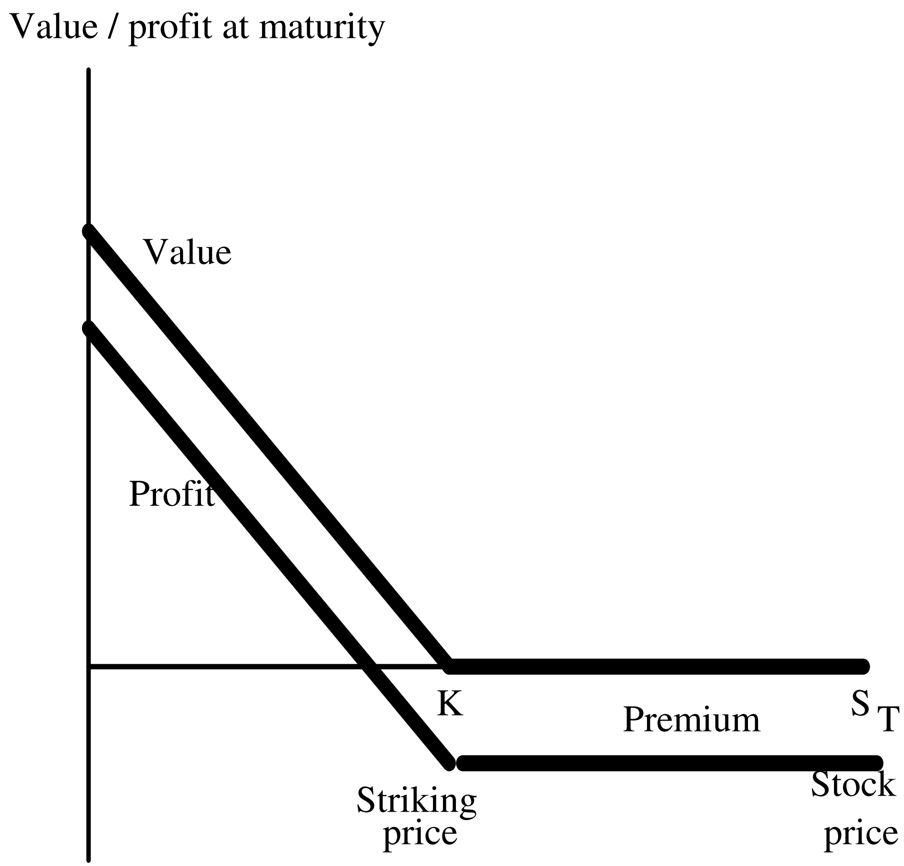
S_T < K

- Valeur du put à l'échéance

  $P_T = K - S_T$ si $S_T < K$

  sinon : $P_T = 0$

- $P_T = \text{MAX}(0, K - S_T)$



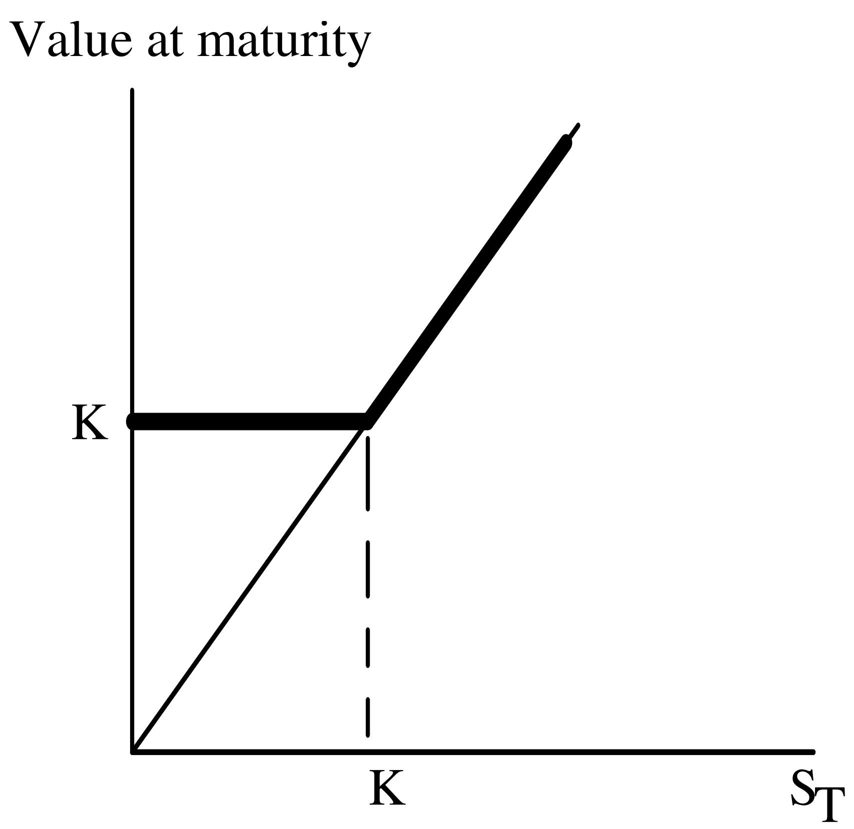
Relation de parité Put-Call (1/3)

- Une relation liant les valeurs de puts et de calls *Européens* sur un même sous-jacent
- Comparons 2 stratégies:

- Stratégie 1. Acheter1 action + 1 put

A échéance T:	$S_T<K$	$S_T>K$
Valeur de l'action:	S_T	S_T
Valeur du Put	$(K - S_T)$	0
Valeur totale:	K	S_T

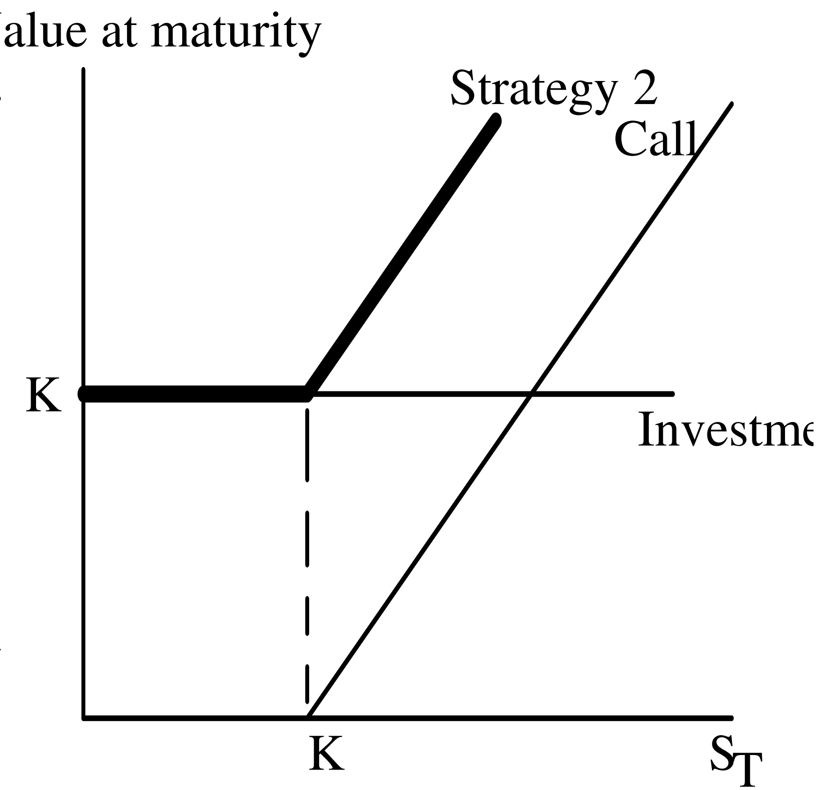
- Put = contrat d'assurance!



Relation de parité Put-Call (2/3)

- Considérons la stratégie alternative:
- Stratégie 2: Acheter 1 call, investir PV(K)

A échéance T:	$S_T<K$	$S_T>K$
Valeur du call	0	S_T - K
Placement	K	K
Valeur totale	K	S_T



- A échéance les deux stratégies mènent à la même valeur totale

- Action + Put = Call + Prix d'exercice

ULB SolvayBrusselsSchool of Economics and Management

Relation de parité Put-Call (3/3)

- Deux stratégies équivalentes ont le même coût

$$S + P = C + PV(K)$$

Avec S cours de l'action aujourd'hui

P valeur du put aujourd'hui

C valeur du call aujourd'hui

PV(K) valeur actuelle du prix d'exercice

- Cette expression est celle de la relation de parité put-call
- Une autre présentation de cette relation:

$$\boxed{\mathbf{C = S + P - PV(K)}}$$

- Fait apparaître qu'un call est équivalent à l'achat d'un titre et d'un put financé par l'emprunt de PV(K)

Evaluation d'options

- L'intuition derrière la formule du pricing d'option peut être introduite par un modèle à deux états (*binomial model*).
- Soit S le prix actuel d'un titre ne payant pas de dividende.
- Supposons que, sur une période de temps (par exemple 6 mois), le cours de l'action peut soit augmenter (jusque uS, u>1) ou diminuer (à dS, d<1).
- Supposons un call avec un prix d'exercice K = 100 à 1 période d'échéance.

$$S = 100 \begin{array}{l} \nearrow \; uS = 125 \\ \searrow \; dS = 80 \end{array} \qquad\qquad C \begin{array}{l} \nearrow \; C_u = 25 \\ \searrow \; C_d = 0 \end{array}$$

Idée clef sous-jacente au modèle de pricing d'option

- Il est possible de créer un *call synthétique* qui réplique la valeur future cu call comme suit:
  - Acheter Delta actions
  - Emprunter B au taux sans risque r (5% par an– taux d'intérêt simple sur une période de 6 mois)
- Choisir Delta et B de manière telle que la valeur future de ce portefeuille soit égale à celle du call.
  - Delta uS - $(1+r\,\Delta t)\,B = C_u$ *Delta 125 – 1.025 B = 25*
  - Delta dS - $(1+r\,\Delta t)\,B = C_d$ *Delta 80 – 1.025 B = 0*

- (Δt est la longueur d'une période (en années) e.g. : 6 mois équivaut à $\Delta t=0.5$)

ULB
SolvayBrusselsSchool
of Economics and Management

Condition d'absence d'arbitrage

- *Dans un marché parfait des capitaux, la valeur du call devrait être égale à la valeur de sa reproduction synthétique sinon il y aurait des opportunités d'arbitrage:*

$$\boxed{\mathbf{C = Delta \times S - B}}$$

- Ceci correspond à la formule de Black Scholes
- Nous avons un système de 2 équations à 2 inconnues à résoudre.
- [Eq1]-[Eq2] $\Rightarrow$ Delta $\times$ (125 - 80) = 25 $\Rightarrow$ **Delta = 0.556**
- Remplaçons Delta par sa valeur dans [Eq2] $\Rightarrow$ **B = 43.36**
- Valeur du call:
- C = Delta S - B = 0.556 $\times$ 100 - 43.36 $\Rightarrow$ **C = 12.20**

Valorisation dans un monde neutre au risque

- L'absence d'arbitrage implique que nous pouvons utiliser le call synthétique pour valoriser l'option
- Mais est-il possible de constituer un portefeuille dont le return soit certain (en d'autres termes dont le return soit le même en cas de hausse ou de baisse)? Imaginons que nous constituons un portefeuille constitué d'une action et de la vente de m calls. Dans ce cas la valeur du portefeuille sera:

$$S - mC \begin{matrix} \nearrow & uS - mC_u \\ \searrow & dS - m\,C_d \end{matrix}$$

(Cf Cobbaut, Gillet et Hübner, 2015)

- Si en plus on impose une absence de risque il faut que les deux membres de l'équation soient égaux ou encore que $uS - mC_u = dS - m\,C_d$

Valorisation dans un monde neutre au risque

- On en déduit que $m = \frac{S(u-d)}{C_u - C_d}$
- Mais comme le return est certain il doit, par absence d'arbitrage être égal à celui obtenu en investissant dans l'actif sans risque (soit r_f)
- D'où $uS - mC_u = dS - m\,C_d = (S - mC)\,(1+r_f)$
- Qui donne $C = \frac{(r_f - u)S + mC_u}{mr_f}$
- En remplaçant m par sa valeur et en posant $p = \frac{1+r_f-d}{u-d}$
- On obtient
- $C = [p \times C_u + (1-p) \times C_d\,]/(1+r_f)$

Une solution pour le modèle binomial à une période

- p est la probabilité d'une augmentation du cours dans un monde « neutre au risque » ou la rentabilité attendue est égale au taux sans risque.
- Elle est donc indépendante des probabilités subjectives de hausse et de baisse!
- Dans un monde neutre au risque:

$$p \times uS + (1\text{-}p) \times dS = (1+r\Delta t) \times S$$

- $p \times C_u + (1\text{-}p) \times C_d$ est la valeur anticipée du call dans une période en supposant la neutralité au risque
- La valeur actuelle est obtenue en actualisant cette valeur attendue (dans un monde neutre au risque) au taux sans risque.

Illustration de la valorisation dans un monde "risque-neutre"

- Dans notre exemple, les rentabilités possibles sont:

  + 25% si le cours monte

  - 20% si le cours baisse

- Dans un monde neutre au risque, la rentabilité attendue pour 6 mois vaut

  $5\% \times 0.5 = 2.5\%$

- La probabilité risque-neutre devrait donc satisfaire l'équation:

  $p \times (+25\%) + (1-p) \times (-20\%) = 2.5\%$

- $\Rightarrow p = 0.50$
- La valeur du call est alors: $C = 0.50 \times 25 / 1.025 = 12.20$

Modèle multi-période: option européenne

- Pour des options européennes, suivre la même procédure

- (1) Calculer, à l'échéance,
  - Les différents cours possibles de l'action;
  - Les valeurs correspondantes du call
  - Les probabilités risque-neutre

- (2) Calculer la valeur anticipée du call dans un monde neutre au risque

- (3) Actualiser au taux sans risque

Un exemple: évaluer un call à un an

- Même données que précédemment: S=100, K=100, r=5%, u =1.25, d=0.80
- Echéance du Call = 1 an (2 périodes)
- Evolution du cours de l'action Probas risque-neutre Valeur du Call

t=0	t=1	t=2	Probas risque-neutre	Valeur du Call
		156.25	$p^2 = 0.25$	56.25
	125			
100		100	$2p(1-p) = 0.50$	0
	80			
		64	$(1-p)^2 = 0.25$	0

- Valeur du call aujourd'hui: $C = 0.25 \times 56.25 / (1.025)^2 = 13.38$

Volatilité

- La valeur du call, est une fonction des variables suivantes:
  1. Le cours actuel de l'action S
  2. Le prix d'exercice K
  3. La durée avant l'échéance T
  4. Le taux d'intérêt sans risque r
  5. La volatilité du sous-jacent σ

- Note: Dans un modèle binomial, u et d capturent la volatilité (l'écart-type des returns) du sous-jacent.
- De manière plus technique, u et d sont donnés par les formules suivantes:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad d = \frac{1}{u}$$

ULB
Solvay Brussels School
of Economics and Management

La valeur des options croît avec la volatilité

- La valeur d'un call ou d'un put est une fonction croissante de la volatilité (toutes autres choses étant égales par ailleurs)
- Intuition: une volatilité importante accroît les gains potentiels sans affecter les pertes (puisque la valeur d'une option n'est jamais négative)
- Check: Exemple précédent avec modèle binomial d'une période, valeur pour différentes volatilités
- Volatilité

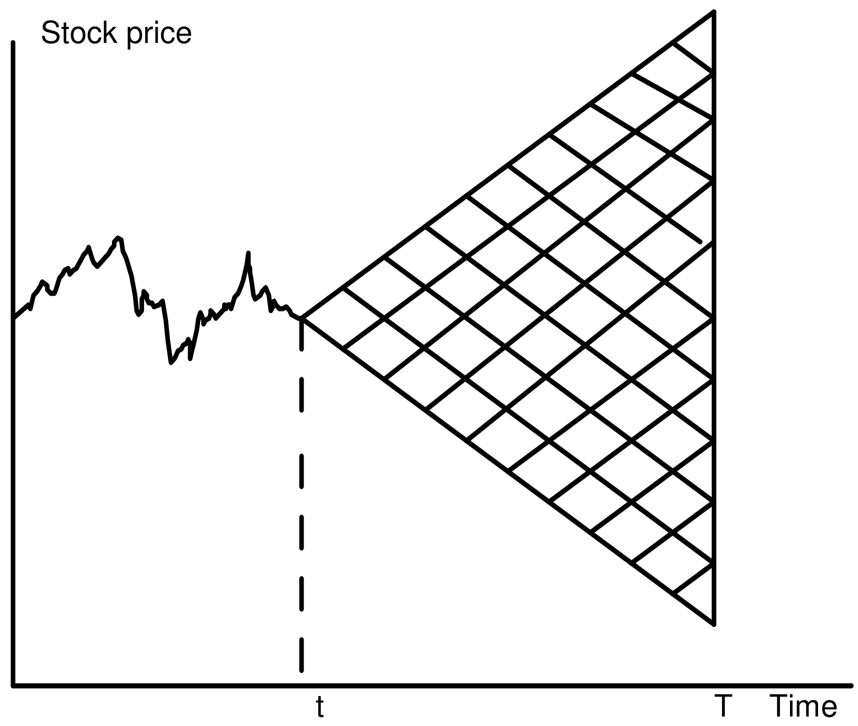
Volatilité	u	d	C	P
0.20	1.152	0.868	8.19	5.75
0.30	1.236	0.809	11.66	9.22
0.40	1.327	0.754	15.10	12.66
0.50	1.424	0.702	18.50	16.06

(S=100, K=100, r=5%, Δt=0.5)

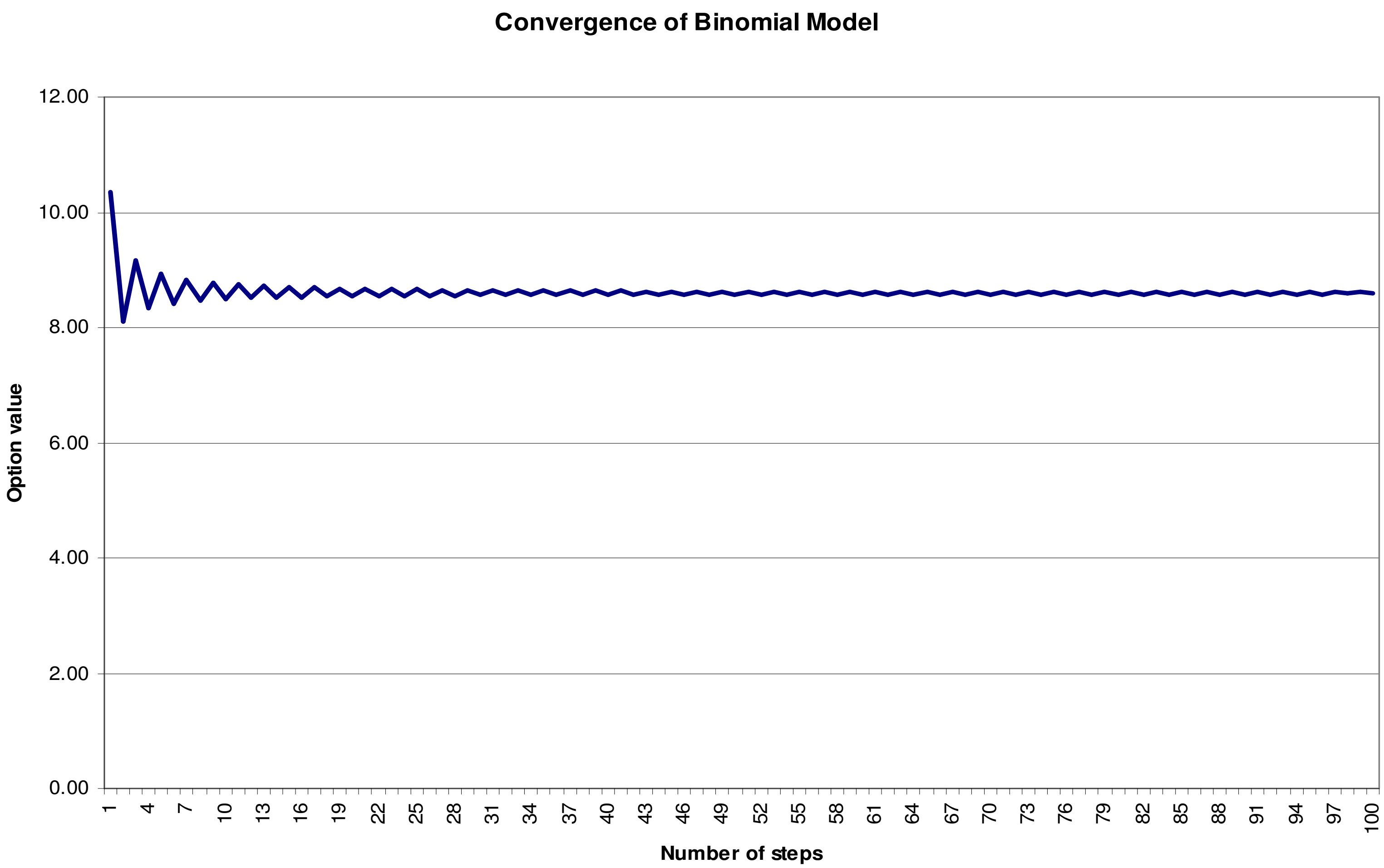
Du modèle binomial à Black Scholes

- Supposons:
  - Une option européenne
  - Sur une action ne payant pas de dividende
  - Une volatilité constante
  - Un taux d'intérêt constant

- Cas limite du modèle binomial quand $\Delta t \rightarrow 0$



Convergence du modèle binomial



Formule de Black-Scholes

- Pour un call européen sur un titre ne payant pas de dividende
- Le cas limite du modèle binomial pour Δt très petit

$$\boxed{C = S\, N(d_1) - PV(K)\, N(d_2)}$$

↑ Delta ↑ B

- Dans BS: PV(*K*) représente la valeur de *K* (actualisé au taux sans risque)
- Delta = $N(d_1)$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{PV(K)}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + 0.5\sigma\sqrt{T}$$

- *N*(): Fonction de répartition d'une loi normale standard
- B = PV(*K*) $N(d_2)$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

ULB
Solvay Brussels School
of Economics and Management

Black-Scholes: Exemple numérique

- 2 déterminants de la valeur du call:
  "Moneyness" : S/PV(K)   "Volatilité cumulée": $\sigma\sqrt{T}$
- Exemple:
  $S = 100$, $K = 100$, Échéance $T = 4$, Volatilité $\sigma = 30\%$ $r = 6\%$
  "Moneyness"= $100/(100/1.06^4) = 100/79.2= 1.2625$
  Volatilité cumulée = $30\% \times \sqrt{4} = 60\%$

- $d_1 = \ln(1.2625)/0.6 + (0.5)(0.60) = 0.688$ $\Rightarrow$ $N(d_1) = 0.754$
- $d_2 = \ln(1.2625)/0.6 - (0.5)(0.60) = 0.089$ $\Rightarrow$ $N(d_2) = 0.535$

- $C = (100)\ (0.754) – (79.20)\ (0.535) = 33.05$

Fonction de répartition d'une loi normale standard

Ce tableau donne les valeurs de $N(x)$ pour $x \geq 0$.

Pour $x<0$, $N(x) = 1 - N(-x)$

Exemples:
$N(1.22) = 0.889$,
$N(-0.60) = 1 - N(0.60) = 1 - 0.726 = 0.274$

Dans Excell, utiliser Normsdist()
Pour obtenir $N(x)$

	0.00	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999
3.0	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999

Black-Scholes illustré