

Théorie financière
Travaux pratiques – Session 2
« Valeur actuelle »

Ex. : PV & Bond Math – Jongler avec les taux d'intérêts

Titulaire : Professeur Kim Oosterlinck

« PV and Bond Maths »

« Jongler avec les taux d'intérêt »

PVBM

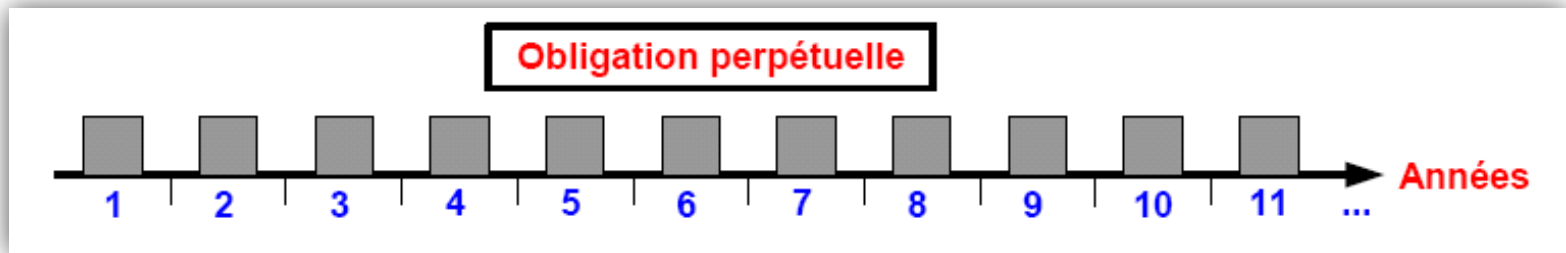
Fondements théoriques

- Comment calculer le prix d'un actif sur le marché?
 - ✓ Le prix est celui qui annule la VAN.

$$-P + \sum_{i=1}^T CF_i \times DF_i = 0$$

- Que représente le DF quand l'obligation est sans risque?
 - ✓ L'impatience
- Que représente le DF quand l'obligation est risquée?
 - ✓ *L'impatience*
 - ✓ L'aversion au risque

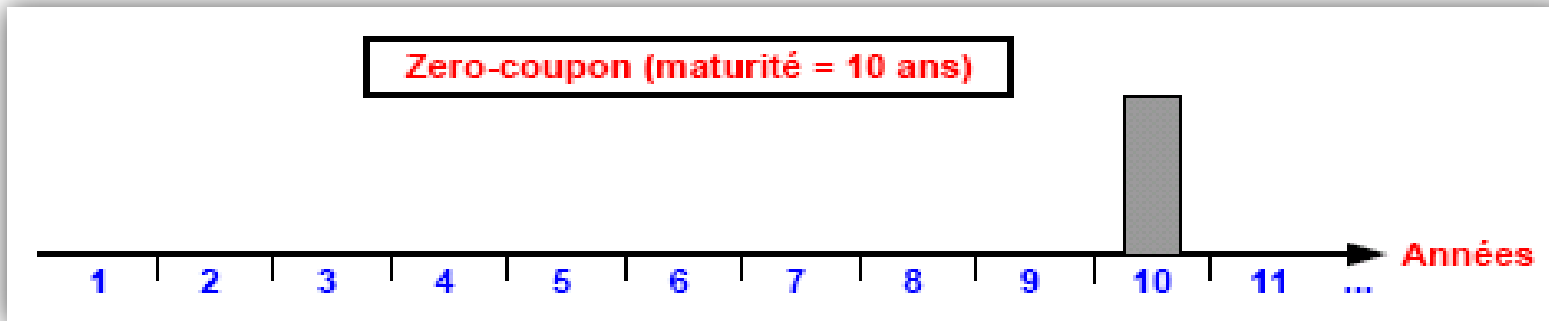
- Qu'est-ce qu'une perpétuité?



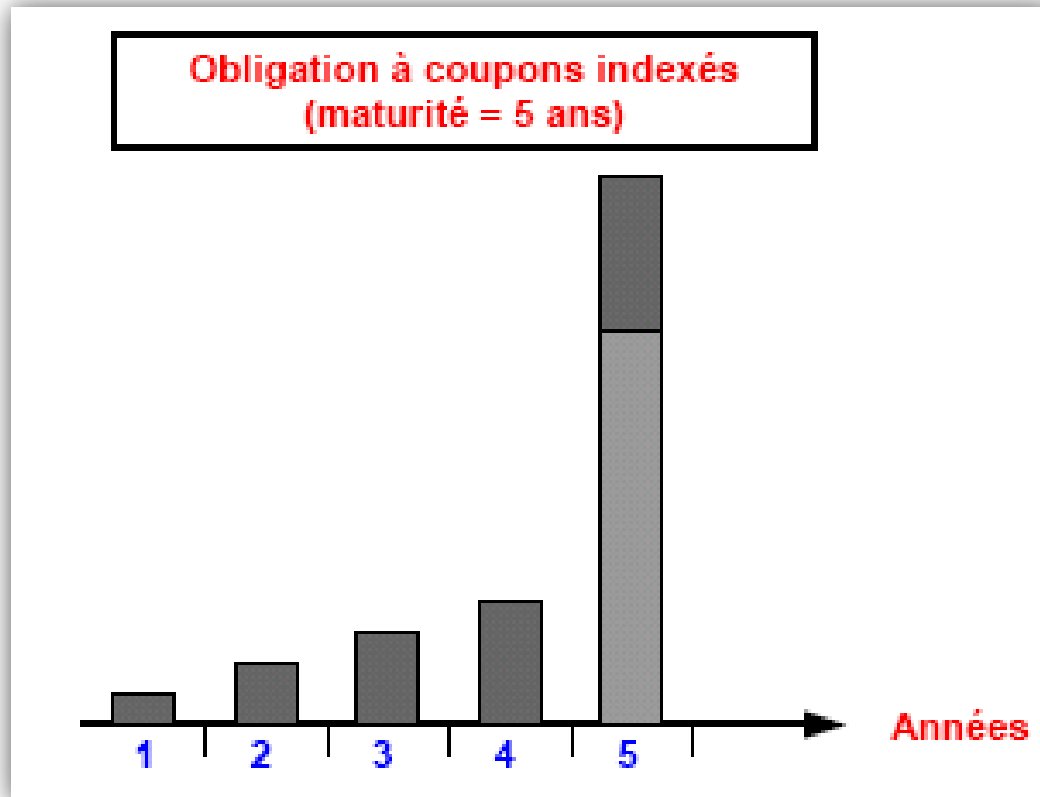
- Comment calculer son prix?

$$\text{Perpetuité} = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} \dots = \frac{C}{r}$$

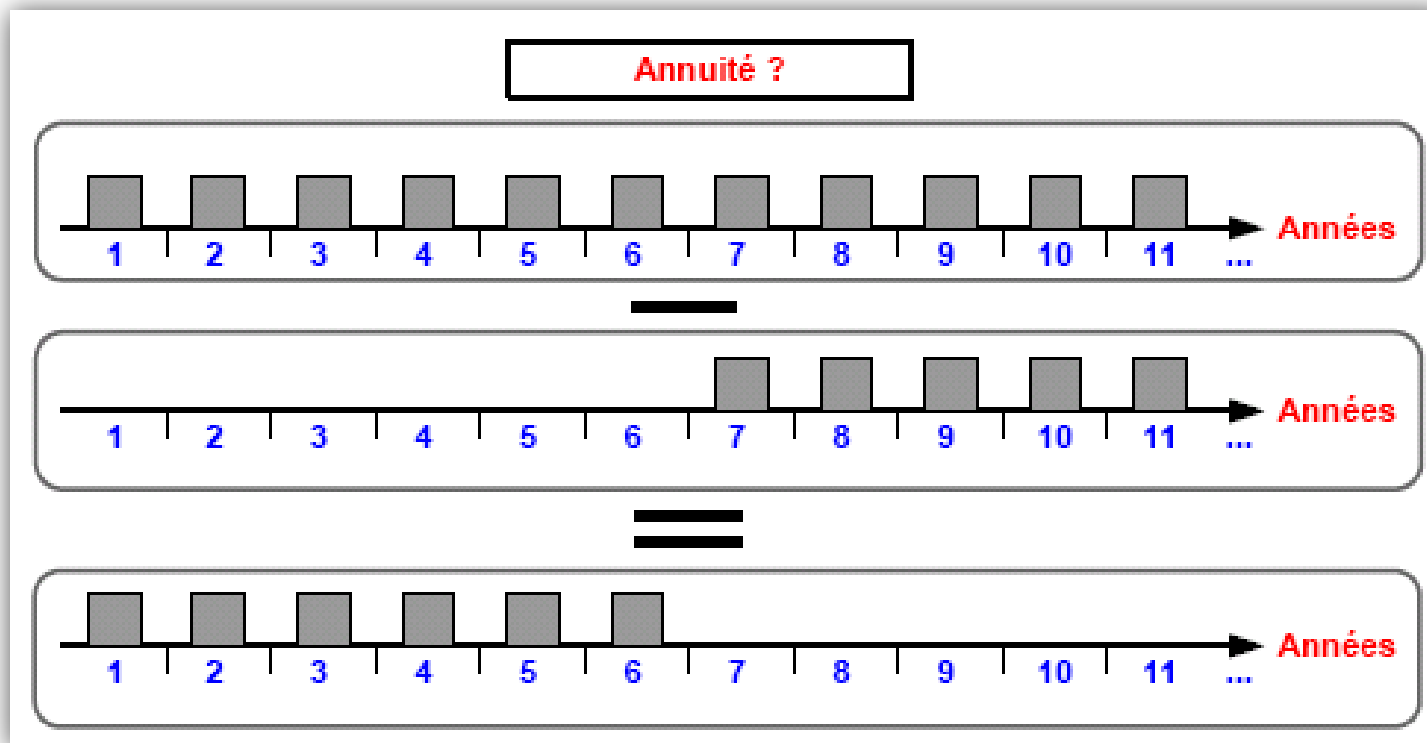
- Qu'est-ce qu'un zéro-coupon?



- Qu'est-ce qu'une obligation à coupons indexés?



- Qu'est-ce qu'une annuité (et comment calculer son prix)?



$$\longrightarrow \text{Annuité} = \frac{C}{r} - \frac{1}{(1+r)^T} \left(\frac{C}{r} \right)$$

- Quelques formules supplémentaires :

$$\text{Perpetuité croissante} = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{C(1+g)^2}{(1+r)^3} \dots = \frac{C}{r-g}$$

$$\text{Annuité croissante} = \frac{C}{r-g} - \left(\frac{(1+g)}{(1+r)} \right)^T \left(\frac{C}{r-g} \right)$$

PVBM

Question 1 (A – B - C)

	Present Value	Expected Value (T=1)	Expected Return
A			
B			
C			

PVBM
Question 1 (D)

	Present Value	Expected Value (T=1)	Expected Return
D			

PVBM

Question 2

- **Première solution :**
 - ✓ Calculer la valeur de l'annuité

- ✓ Calculer la valeur future de l'annuité

PVBM
Question 2

- *Deuxième solution :*
 - ✓ Calculer théoriquement la valeur future de l'annuité

- ✓ Appliquer la formule

- 1 étape : extraire les discount factors des prix du marché:

- 2 étape : multiplications des DF par les CF:

$$P_0 = 3 \times \frac{1}{(1+r_1)} + 3 \times \frac{1}{(1+r_2)^2} + \dots$$

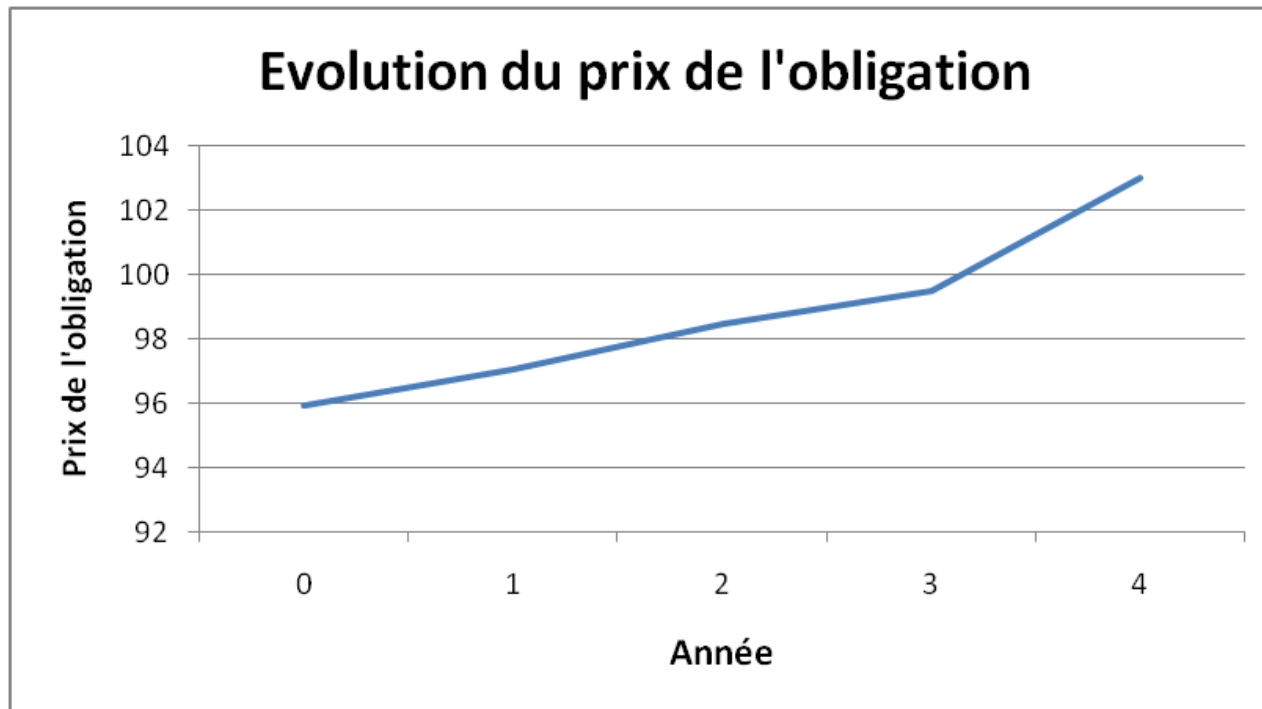
✓ Prix en 0 :

✓ Prix en 1 :

PVBM

Question 3 – (B – C)

- **B)** Taux d'intérêt spot :
- **C)**



PVBM

Question 4 (1)

- A) Prix de l'obligation: $P_0 = 8 \times 0.945 + 108 \times 0.88 = 102.6$
- B) Arbitrage:

Période	0	1	2
Position C	-9000	800	10800
Position A	0	-800 (8*A)	0
Position B	0	0	-10800 (108*B)
Position nette	-9000	0	0
Période	0	1	2
Position C	-9000	800	10800
Position A	$8 \times 94.5 = 756$	-800 (8*A)	0
Position B	$108 \times 88 = 9504$	0	-10800 (108*B)
Position nette	1260	0	0

- Le prix qu'on nous propose est moins élevé que le prix de marché:
 - ✓ On voudrait en profiter en achetant cette obligation et en la revendant immédiatement.
- **Problème :**
 - ✓ Pas de richesse initiale
- **Solution :**
 - ✓ Sachant que si j'achète 100 de ces obligations, je vais recevoir :
 - 800 dans 1 an.
 - 10800 dans 2 ans.
- Sur base de ce que je vais recevoir, j'essaie d'emprunter un maximum sur le marché obligataire.
- Combien va-t-on pouvoir emprunter sur le marché obligataire?
 - ✓ 8 obligations A et 108 obligations B
 - ✓ Je reçois donc 10 260 aujourd'hui
- C'est plus que le que le montant nécessaire pour payer la première obligation : ***profit d'arbitrage.***

- Comment emprunter sur le marché obligataire si je ne peux pas émettre des obligations?
- On utilise **le short-selling** :
 - ✓ on demande à notre banquier de nous prêter une obligation
 - ✓ on vend cette obligation immédiatement
 - ✓ on rembourse le banquier plus tard.
- Ce sont les mêmes CF qu'un emprunt...

PVBM Question 5

- Discount factors?

- ✓ 1^{er} discount factor : $(1+r_1) = \frac{CF_1}{P_A}$

- ✓ 2^{ème} discount factor :

- ✓ 3^{ème} discount factor :

PVBM

Exemple : Yield to maturity

- Une obligation a une maturité de 3 ans et un taux coupon de 6%.
- Taux spots :
 - ✓ 1 an = 10%
 - ✓ 2 ans = 11%
 - ✓ 3 ans = 12%
- Le prix de l'obligation est :

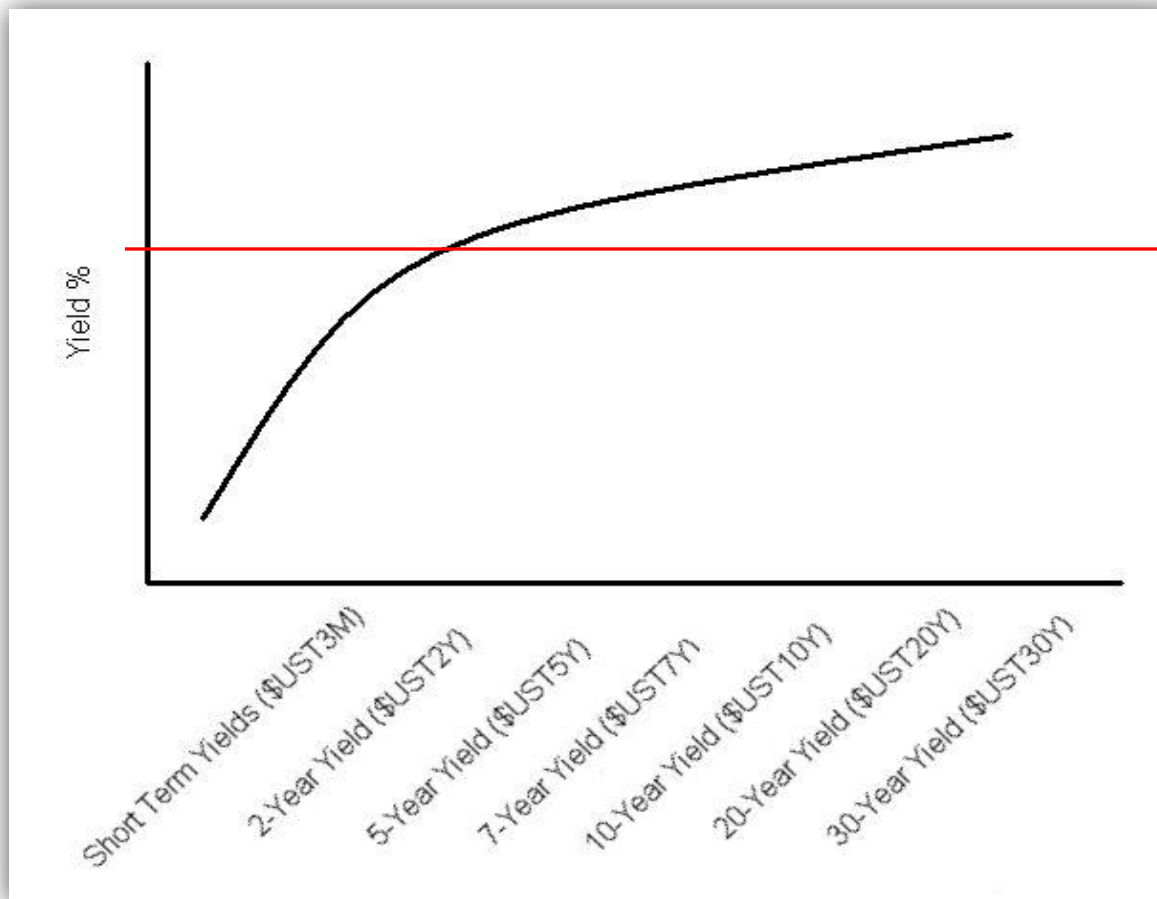
$$P = \frac{6}{(1+r_1)} + \frac{6}{(1+r_2)^2} + \frac{106}{(1+r_3)^3} \quad P = \frac{6}{(1+10\%)} + \frac{6}{(1+11\%)^2} + \frac{106}{(1+12\%)^3} = 85.77$$

- Son YTM est :

$$\frac{6}{(1+r)} + \frac{6}{(1+r)^2} + \frac{106}{(1+r)^3} = 85.77 \Rightarrow r = 11.941\%$$

PVBM

Yield to maturity?



PVBM

Question 6

- Le YTM d'une obligation correspond à l'IRR de cette obligation; il suffit de solutionner l'équation suivante:
- Posons:
- Cela donne:
- C'est une équation du second degré, calculons le delta:

PVBM
Question 6

- Les solutions sont données par:

- **A)**

- ✓ Obligation A : 86.38
- ✓ Obligation B : 48.1

- **B)** Duration ? (slide de M. Farber)

- ✓ Consider now a bond with cash flows: C_1, \dots, C_T
- ✓ View as a portfolio of T zero-coupons.
- ✓ The value of the bond is: $P = PV(C_1) + PV(C_2) + \dots + PV(C_T)$
- ✓ Fraction invested in zero-coupon t : $w_t = PV(C_t) / P$
- ✓ *Duration* : weighted average maturity of zero-coupons

$$D = w_1 \times 1 + w_2 \times 2 + w_3 \times 3 + \dots + w_t \times t + \dots + w_T \times T$$

PVBM

Fondements théoriques – Duration (2)

- D'où vient la relation ?

$$\frac{\Delta P}{P} = - \frac{Duration}{1+r} \Delta r$$

- Premièrement :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= \frac{dPV(C_1)}{dr} + \frac{dPV(C_2)}{dr} + \dots + \frac{dPV(C_T)}{dr} \\ &= -\frac{1}{1+r} PV(C_1) - \frac{2}{1+r} PV(C_2) - \dots - \frac{T}{1+r} PV(C_T) \end{aligned}$$

- Car :

$$\frac{dPV(C_2)}{dr} = \frac{d\left(\frac{C_2}{(1+r)^2}\right)}{dr} = -\frac{2C_2}{(1+r)^3}$$

- Cela nous donne :

$$\frac{dP}{dr} \frac{1}{P} = -\frac{1}{1+r} \left(1 \times \frac{PV(C_1)}{P} + 2 \times \frac{PV(C_2)}{P} + \dots + T \times \frac{PV(C_T)}{P} \right)$$

- Par définition la duration est égale à :

$$Duration = 1 \times \frac{PV(C_1)}{P} + 2 \times \frac{PV(C_2)}{P} + \dots + T \times \frac{PV(C_T)}{P}$$

- Et pour finir :

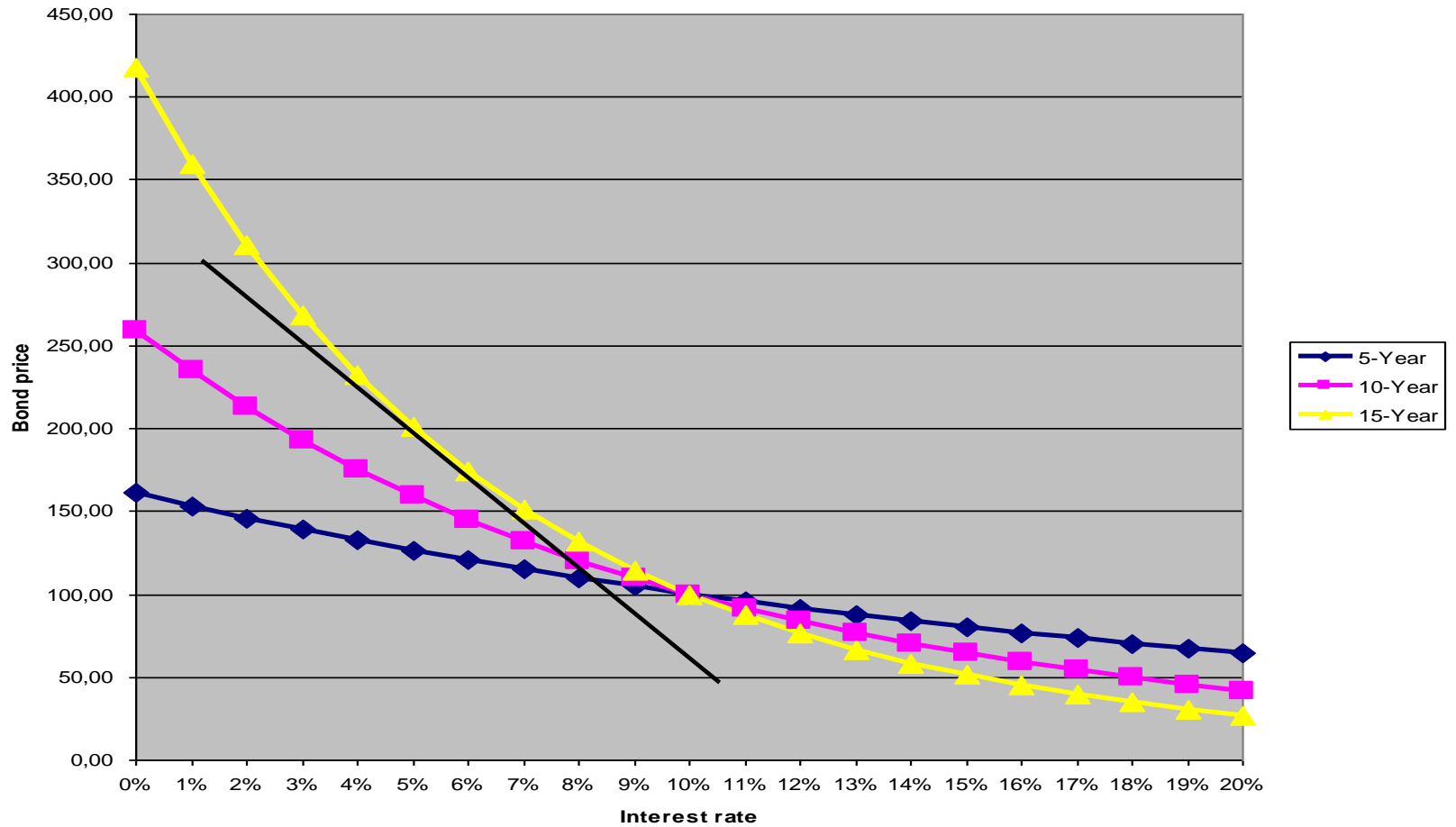
$$\frac{dP}{dr} \frac{1}{P} = -\frac{Duration}{1+r}$$

- Calcul de la variation du prix en utilisant la méthode de la duration :
 - ✓ Obligation A
 - ✓ Obligation B
- Les nouveaux prix sont donc :
 - ✓ Obligation A
 - ✓ Obligation B

- **C)**
 - ✓ Calcul du prix des obligations en utilisant la méthode classique:

PVBM

Question 5 – Suite



- **A)**
 - ✓ Prix de l'obligation en t-0:

 - ✓ Prix de l'obligation en t-1:

- **B)**
 - ✓ Rendement :

PVBM
Question 8

Période	0	1	2	3	4	5
Obligation		70	70	70	70	1070
Zero coupon A		70				
Zero coupon B			70			
Zero coupon C				70		
DF		0.9524	0.907	0.8638	0.8227	0.7835
PV zero coupons		66.67	63.49	60.47	57.59	838.37
Prix de l'obligation	1086.59					
Poids des ZC		6.14%	5.84%	5.56%	5.30%	77.16%
Duration	4.41					

« PV and Bond Maths »

« Jongler avec les taux d'intérêt »

Jongler avec les taux d'intérêt

Question 1

- Que vaut, au bout d'un an, un montant de 100 € placé à un taux d'intérêt annuel nominal de 5% si la capitalisation se fait une fois par an?
- Si la capitalisation est faite 2 fois par an (capitalisation semestrielle)?
- Si elle se fait 4 fois par an (capitalisation trimestrielle) ?

Jongler avec les taux d'intérêt

Question 2

- TAEG d'un placement au taux annuel nominal de 6% placé en capitalisation semestrielle?

- TAEG d'un emprunt dont le taux semestriel est de 6%?

Jongler avec les taux d'intérêt

Question 3

- Données:

TAEG	5%				
Taux annuel nominal avec capitalisation semestrielle		5,25%			
Taux trimestriel			2%		
Taux annuel nominal avec capitalisation mensuelle				5%	5,25%

Jongler avec les taux d'intérêt

Question 3

- Complétons la première colonne...

- La deuxième colonne...

Jongler avec les taux d'intérêt

Question 3

- Réponse:

TAEG	5%	5,32%	8,24%	5,12%	5,38%
Taux annuel nominal avec capitalisation semestrielle	4,94%	5,25%	8,08%	5,05%	5,31%
Taux trimestriel	1,23%	1,30%	2%	1,26%	1,32%
Taux annuel nominal avec capitalisation mensuelle	4,89%	5,19%	7,95%	5%	5,25%

Jongler avec les taux d'intérêt

Question 4 – (A – B)

- **A)** Quel est le taux d'intérêt journalier correspondant à un TAEG de 5,4% (par an) ?
- **B)** Primes par match à la fin de 2006 ?
- Montant total des primes fin 2006?
- Valeur fin 2016 du total des primes?

Jongler avec les taux d'intérêt

Question 5 – (A)

- Quel est le taux à terme f_1 de non arbitrage?

Jongler avec les taux d'intérêt

Question 5 – (B)

- On vous propose un taux à terme plus bas que celui du marché. Si vous voulez emprunter à deux ans, vous allez le faire en utilisant un emprunt de 1 an et en concluant un emprunt à terme de 1 an dans 1 an plutôt que d'emprunter aujourd'hui pour 2 ans au taux spot à 2 ans.
- Comme vous pouvez investir à un taux élevé en empruntant à un taux bas, vous allez profiter de l'opportunité d'arbitrage comme ceci:
 - ✓ Vous empruntez 100 pour deux ans au taux spot, dans 2 ans vous devrez rembourser :
 - ✓ Comme vous n'avez pas d'argent pour rembourser le premier emprunt vous allez dès aujourd'hui conclure un emprunt à terme 1 an pour une durée de 1 an, vous allez donc emprunter 105.2 à terme. Dans 2 ans, vous allez donc devoir rembourser:

Jongler avec les taux d'intérêt

Question 5 – (B)

- Avec l'emprunt que vous avez conclu, vous pouvez placer une somme de 100 pendant 1 an au taux spot:
- Et vous concluez un contrat à terme qui vous autorise à placer ce montant dans 1 an pour 1 an au taux 5,46%:
- Ou vous placez le montant de 100 durant 2 ans au taux spot à 2 ans :
- Vous gagnez donc $110.94 - 110.46 = 0.48$ dans 2 ans.

Jongler avec les taux d'intérêt

Question 5 – (B)

- Résumé

		0	1	2
Emprunt	Taux			
Emprunt de 100 aujourd'hui pour 1 an	5,20%	100	-105,2	
Emprunt à terme de 105,2 dans 1 an pour 1 an	5%		105,2	-110,46
Investissement	Taux			
Placement de 100 aujourd'hui pour 1 an	5,20%	-100	105,2	
Placement à terme de 105,2 dans 1 an pour 1 an	5,46%		-105,2	110,94
Total		0	0	0,48

Jongler avec les taux d'intérêt

Question 5 – (B)

- Résumé

		0	1	2
Emprunt	Taux			
Emprunt de 100 aujourd'hui pour 1 an	5,20%	100	-105,2	
Emprunt à terme de 105,2 dans 1 an pour 1 an	5%		105,2	-110,46
Investissement	Taux			
Placement de 100 aujourd'hui pour 2 ans	5,33%	-100		110,94
Total		0	0	0,48

Jongler avec les taux d'intérêt

Question 5 – (C)

- On vous propose un taux à terme plus haut que celui du marché. Si vous voulez emprunter à deux ans, vous allez le faire en utilisant un emprunt de 2 ans plutôt que d'emprunter aujourd'hui pour 1 an et emprunter à terme dans 1 an pour 1 an.
- Comme vous pouvez investir à un taux élevé en empruntant à un taux bas, vous allez profiter de l'opportunité d'arbitrage comme ceci:
 - ✓ Vous allez emprunter 100 pour 2 ans au taux spot. Dans 2 ans, vous allez donc devoir rembourser:

Jongler avec les taux d'intérêt

Question 5 – (C)

- Grace à l'emprunt que vous avez conclu, vous pouvez placer une somme de 100. Vous allez placer le montant de 100 pour 1 an et ensuite le replacer à terme dans 1 an pour 1 an en profitant du taux forward trop élevé.
 - ✓ Dans un an vous pourrez donc placer:
 - ✓ Et vous concluez un contrat a terme qui vous autorise à placer ce montant dans 1 an pour 1an au taux 5,46%
 - ✓ Vous gagnez donc $111.51 - 110.94 = 0.57$ dans 2 ans.

Jongler avec les taux d'intérêt

Question 5 – (C)

- Résumé

		0	1	2
Emprunt	Taux			
Emprunt de 100 aujourd'hui pour 2 ans	5,33%	100		-110,94
Investissement	Taux			
Placement de 100 aujourd'hui pour 1 an	5,20%	-100	105,2	
Placement à terme de 105,2 dans 1 an pour 1 an	6,00%		-105,2	111,512
Total		0	0	0,57