Solvay Business School

Théorie financière
Travaux pratiques – Session 6

« Relation risk-return - CAPM»

Ex. : Aunt Agatha – CAPM

Titulaire : Professeur Kim Oosterlinck

ULB

Solvay Business School

« Aunt Agatha »

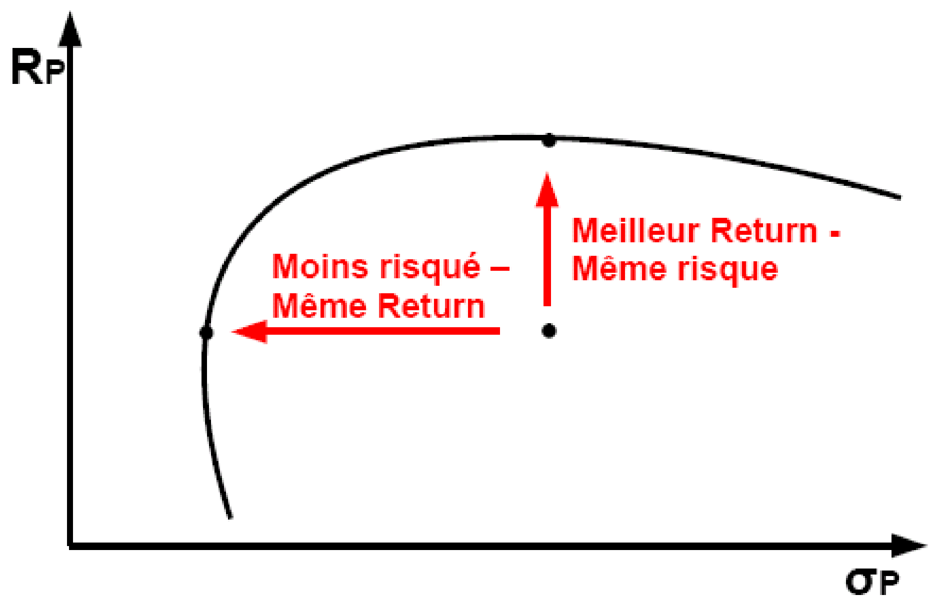
« CAPM »

ULB

Aunt Agatha

Rappel théorique 1 – Le risque

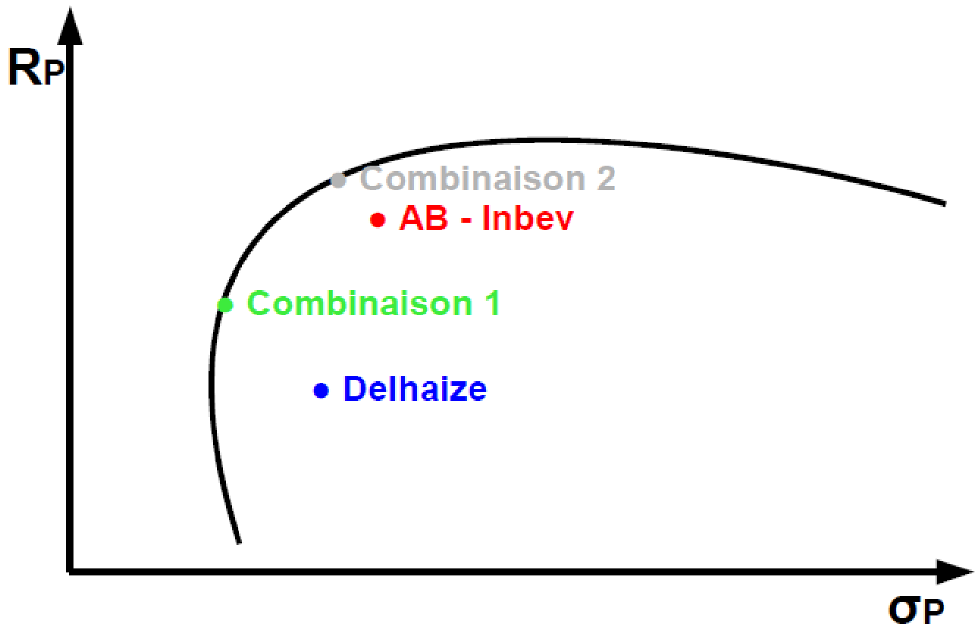
- Il n'y a pas uniquement l'espérance de rentabilité $E(R_T)$ qui importe lors de l'évaluation d'un actif, en effet, il faut également tenir compte de la variance $V(R_T)$ de la rentabilité.
- Préféreriez vous 50 avec certitude ou une loterie dont les résultats sont 10000 avec une probabilité de 0.5% et 0 avec une proba 99.5%?



Aunt Agatha

Rappel théorique 2 – La diversification

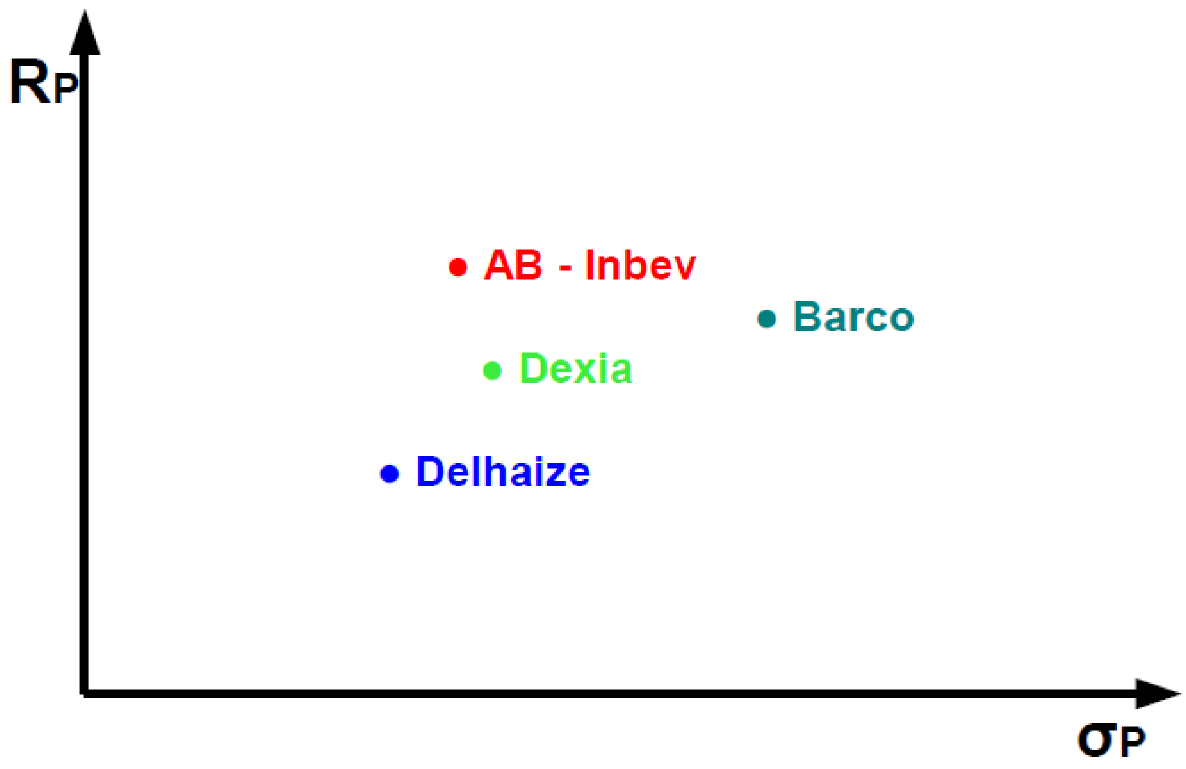
- Est-ce vraiment la volatilité des actions qui importe?



- Non. Car une partie de du risque d'une action peut-être diversifiée.
- Dans l'exemple, on parvient à obtenir des portefeuilles à la rentabilité plus élevée pour un risque moindre.

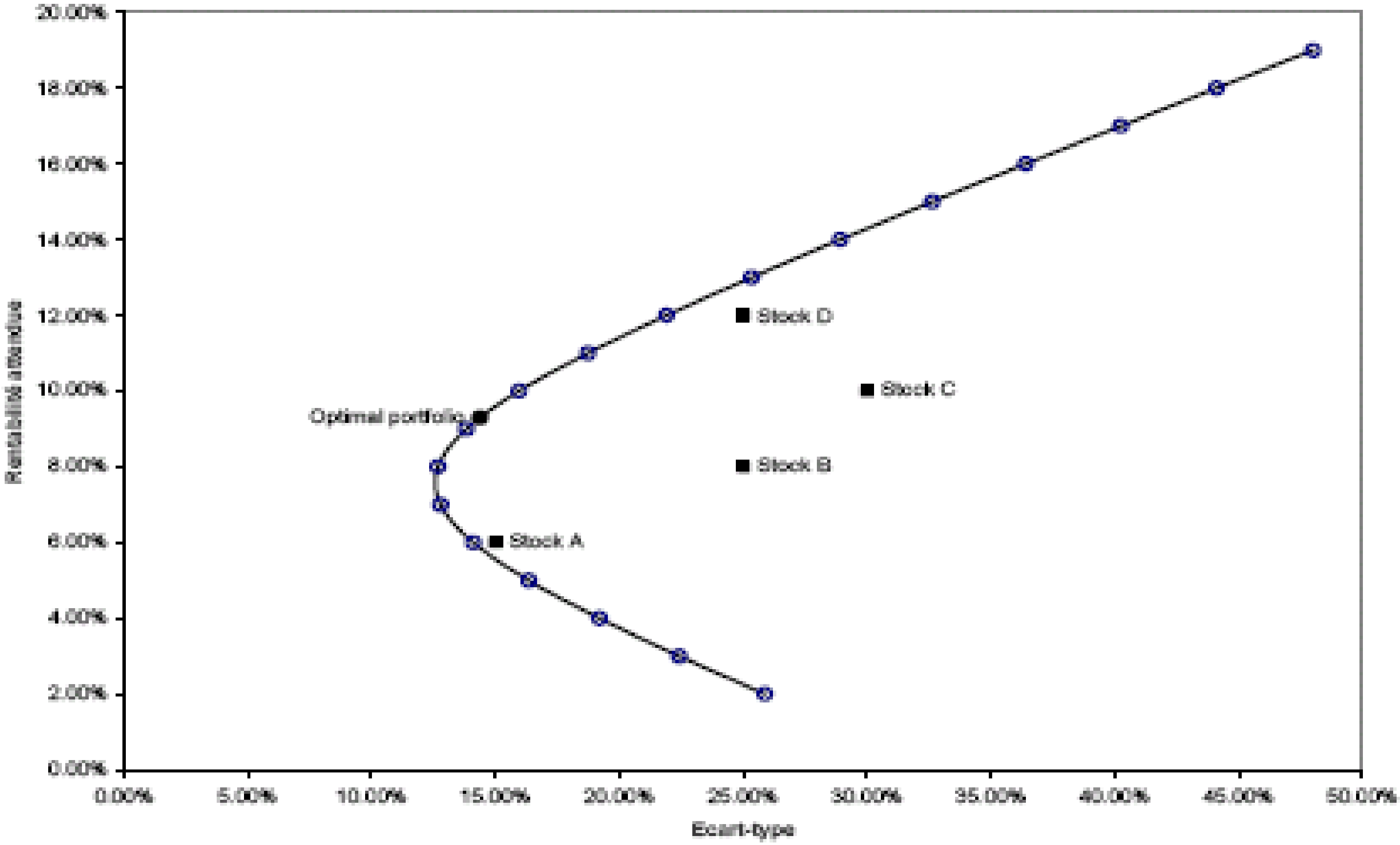
Aunt Agatha
Rappel théorique 3 – La diversification

- En combinant les actions, on obtient des portefeuilles qui présentent un risque minimum pour un return donné : frontière efficiente.

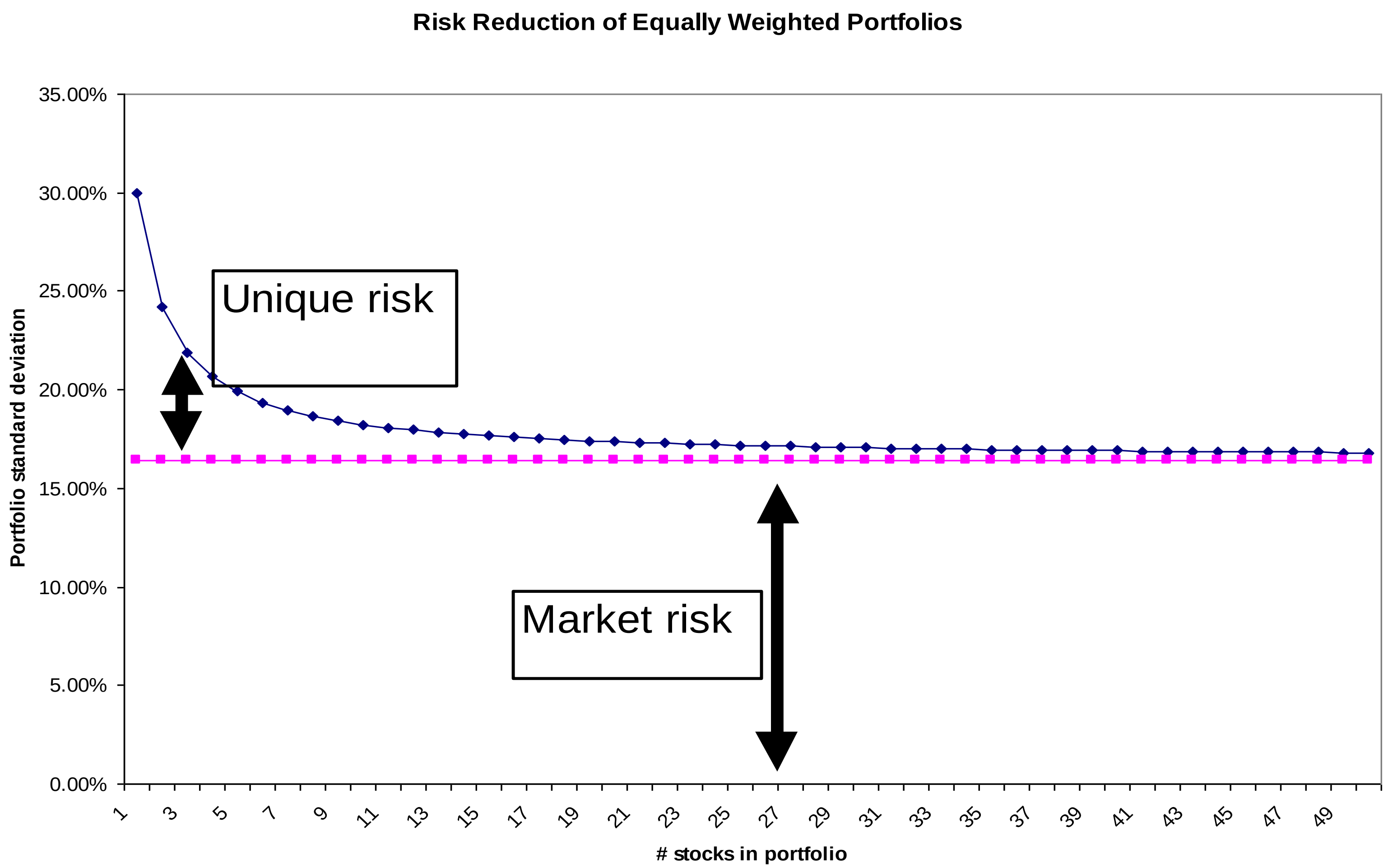


Aunt Agatha

Rappel théorique 4 – Diversification



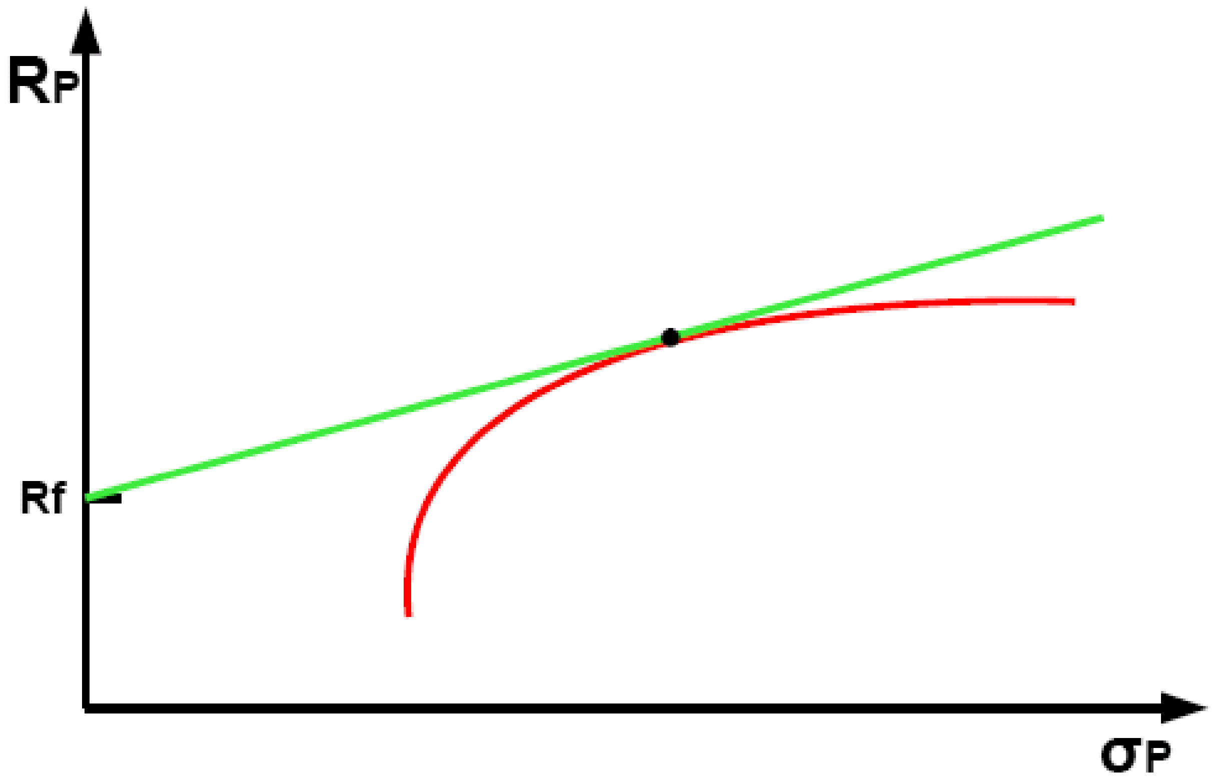
Aunt Agatha
Rappel théorique 5 – Diversification



Aunt Agatha

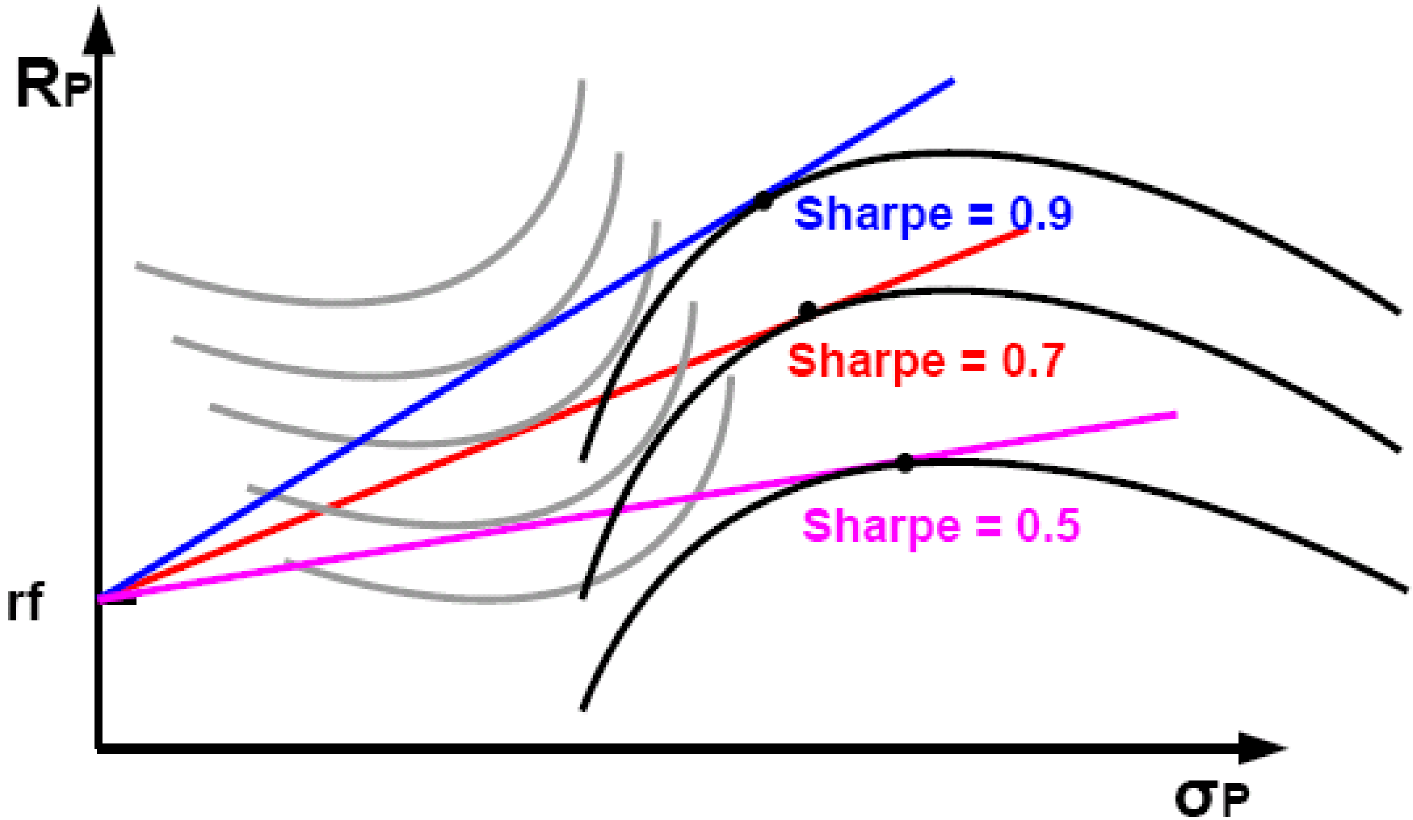
Rappel théorique 6 – Tobin

- En ajoutant un titre sans risque cela donne :



Aunt Agatha

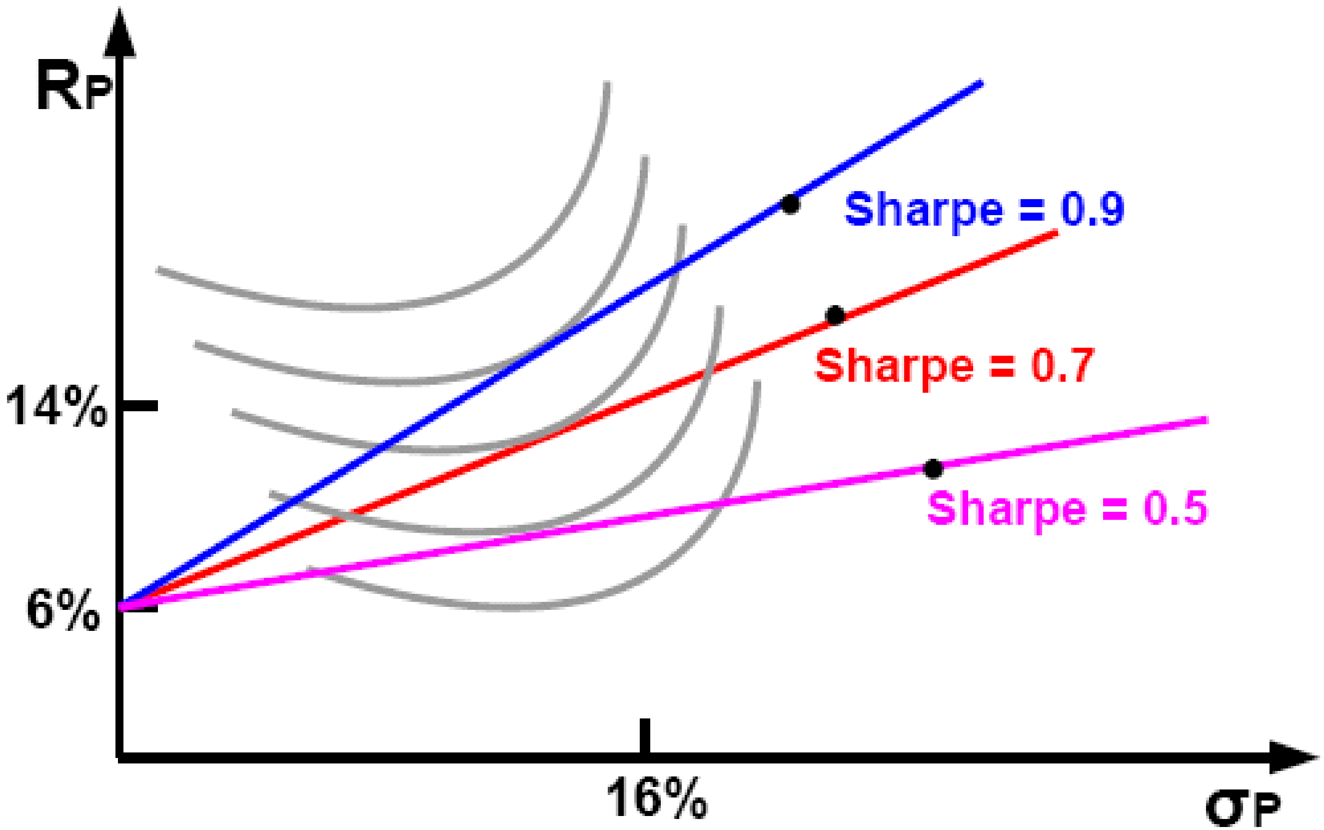
Rappel théorique 7 – Sharpe & Lintner



Solvay Business School

Aunt Agatha

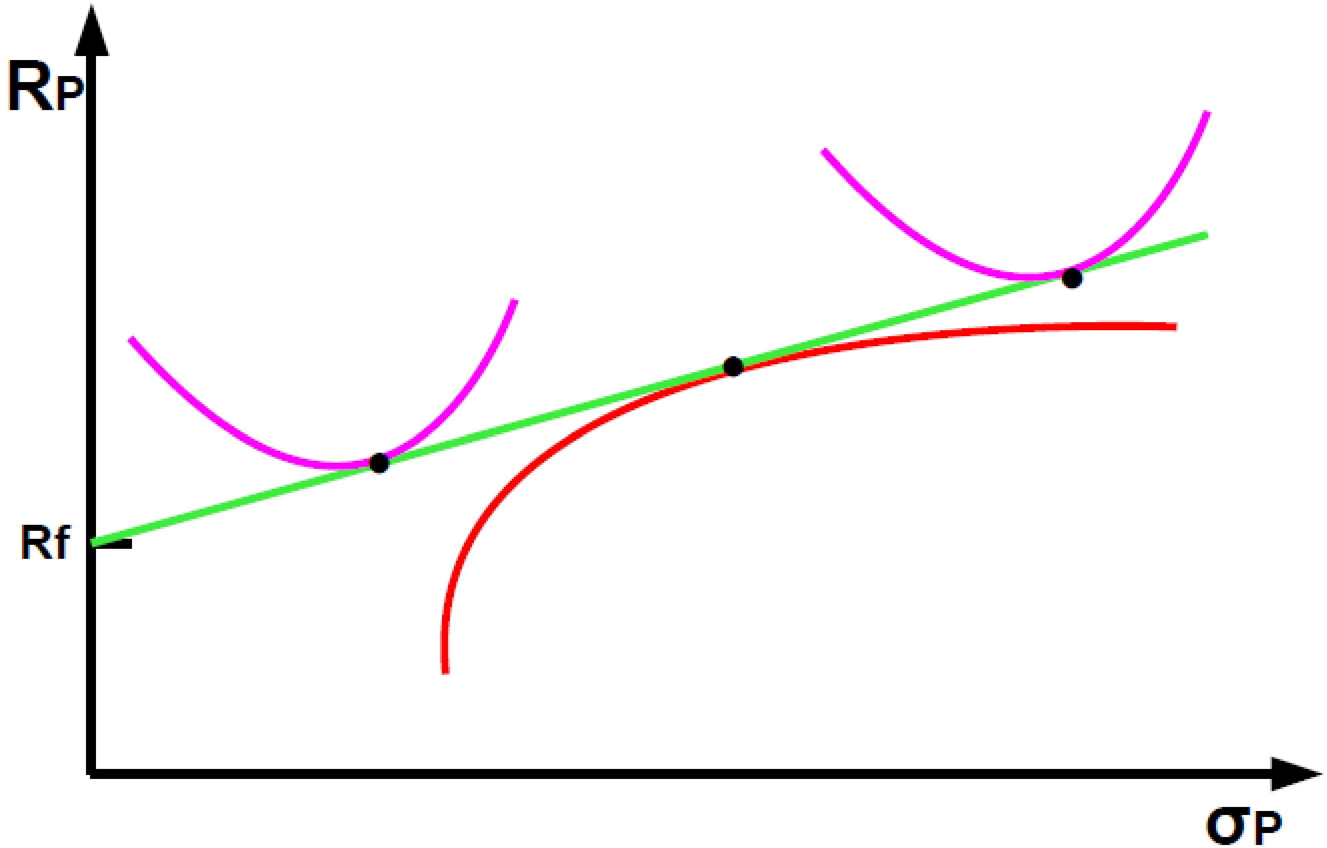
Rappel théorique 8 – Sharpe & Lintner



Aunt Agatha

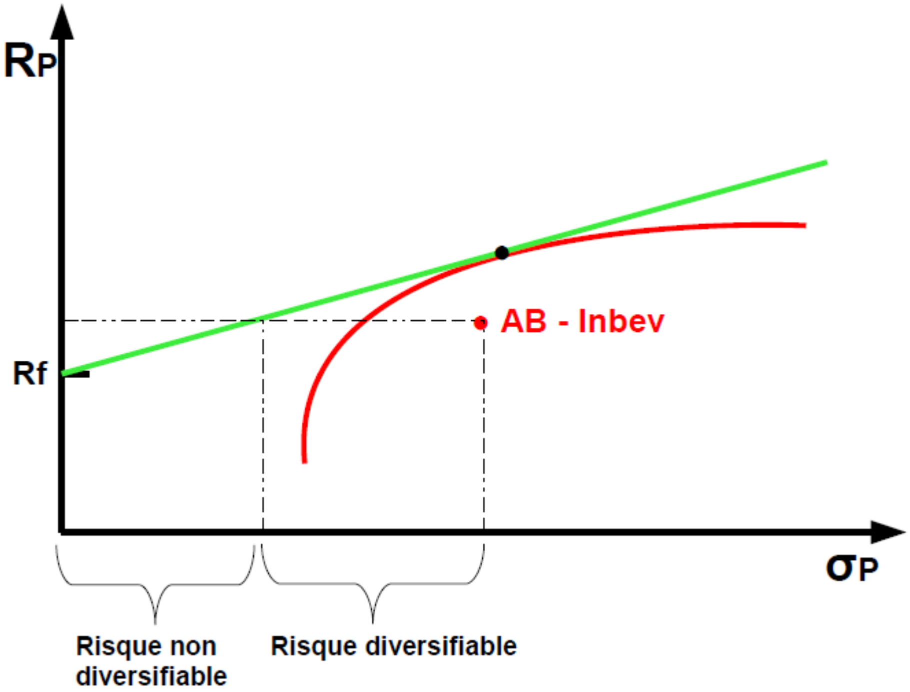
Rappel théorique 9 – CML

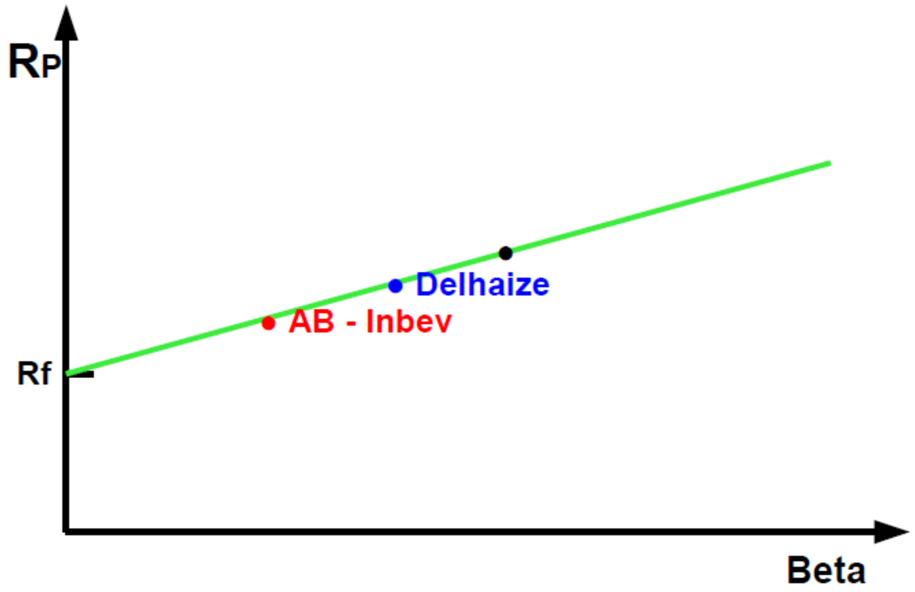
- Lorsque l'on a la CML, il suffit de choisir la combinaison qui maximise l'utilité :



Solvay Business School

Aunt Agatha
Rappel théorique 10 – Le beta





Aunt Agatha
Rappel théorique 11 – Le beta (A. Farber)

- Sachant que tout le monde détient le portefeuille de marché, quelle rentabilité allez vous exiger pour un titre?
- Sachant que la variance du portefeuille de marché est :

$$\sigma_M^2 = X_1\sigma_{1M} + X_2\sigma_{2M} + \ldots + X_i\sigma_{iM} + \ldots + X_n\sigma_{nM}$$

- La volatilité étant égale à:

$$\sigma_M = X_1\frac{\sigma_{1M}}{\sigma_M} + X_2\frac{\sigma_{2M}}{\sigma_M} + \ldots + X_i\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M} + \ldots + X_n\frac{\sigma_{nM}}{\sigma_M}$$

$$\sigma_M = X_1\rho_{1M}\sigma_1 + X_2\rho_{2M}\sigma_2 + \ldots + X_i\rho_{iM}\sigma_i + \ldots + X_n\rho_{nM}\sigma_n$$

- On continue à investir dans i tant que:

$$\frac{E(R_i) - R_F}{\rho_{iM}\sigma_i} > \frac{E(R_M) - R_F}{\sigma_M}$$

- A l'équilibre:

$$E(R_i) = R_F + \underbrace{\frac{\rho_{iM}\sigma_i}{\sigma_M}}_{\beta_i}\left(E(R_M) - R_F\right)$$

Aunt Agatha
Questions 1 & 2

- **1)**
  - ✓ **A)** Rentabilité du portefeuille :

$$\begin{aligned}\overline{R_P} &= X_S\overline{R_S} + X_T\overline{R_T}\\ &= 0.2\times 0.14 + 0.8\times 0.06\\ &= 7.6\%\end{aligned}$$

  - ✓ **B)** Volatilité du portefeuille :

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= X_A^2\sigma_A^2 + X_B^2\sigma_B^2 + 2X_AX_B\sigma_{AB}\\ \sigma_P &= 0.2\times 0.16\\ &= 3.2\%\end{aligned}$$

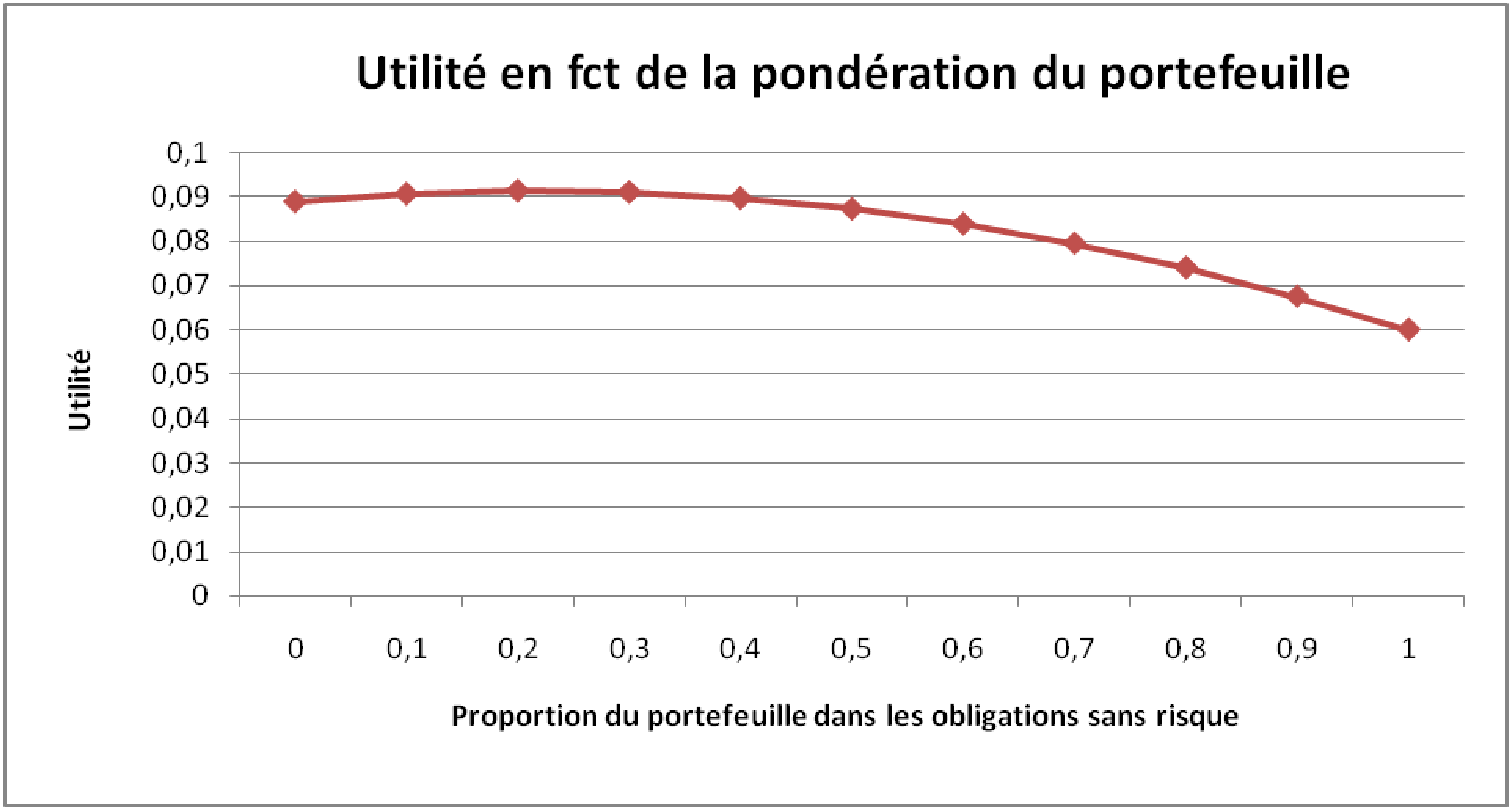
- **2)** Quel est le meilleur portefeuille?

$$\begin{aligned}U(R_P,\sigma_P) &= \overline{R_P} - a\sigma_P^2\\ U(Port.) &= 7.6\% - 2\times(3.2\%)^2\\ &= 7.395\%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U(100\% TB) &= 6\% - 0\\ U(100\% Stock) &= 14\% - 2\times(16\%)^2\\ &= 8.88\%\end{aligned}$$

Aunt Agatha

Question 2



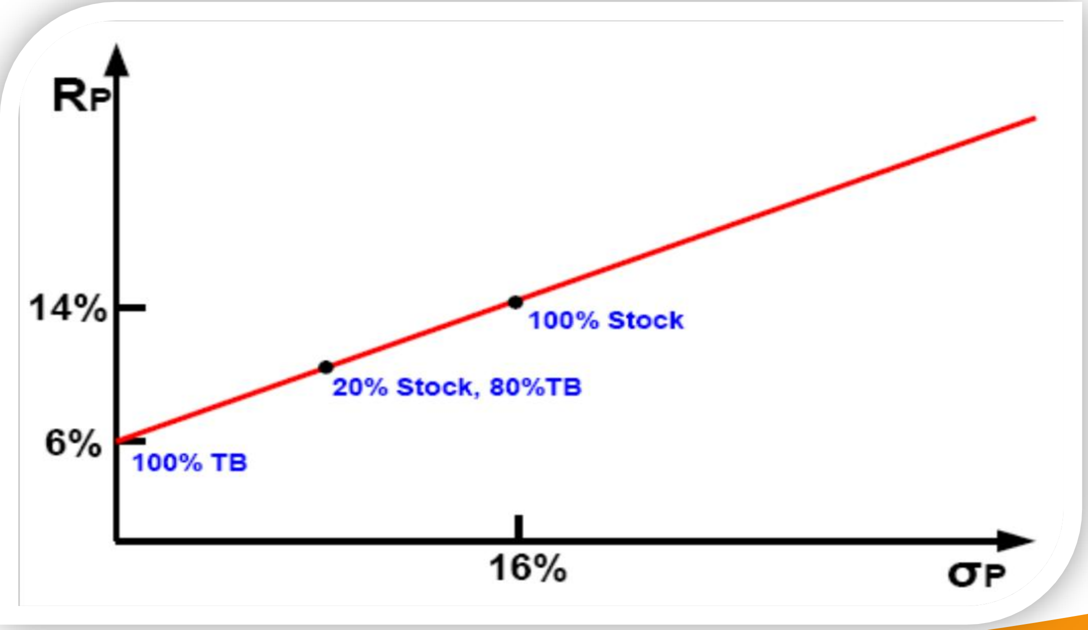
Aunt Agatha
Question 3

En présence d'un titre sans risque et d'un actif risqué, la rentabilité et la volatilité du portefeuille sont :

$$\overline{R_P} = X_S \overline{R_S} + (1 - X_S)\overline{R_T}$$
$$\sigma_P = X_S \sigma_S$$

$$\overline{R_P} = \overline{R_T} + \frac{\overline{R_S} - \overline{R_T}}{\sigma_S}\sigma_P$$

Ratio de Sharpe : Rentabilité supplémentaire par unité de risque



Aunt Agatha
Question 4

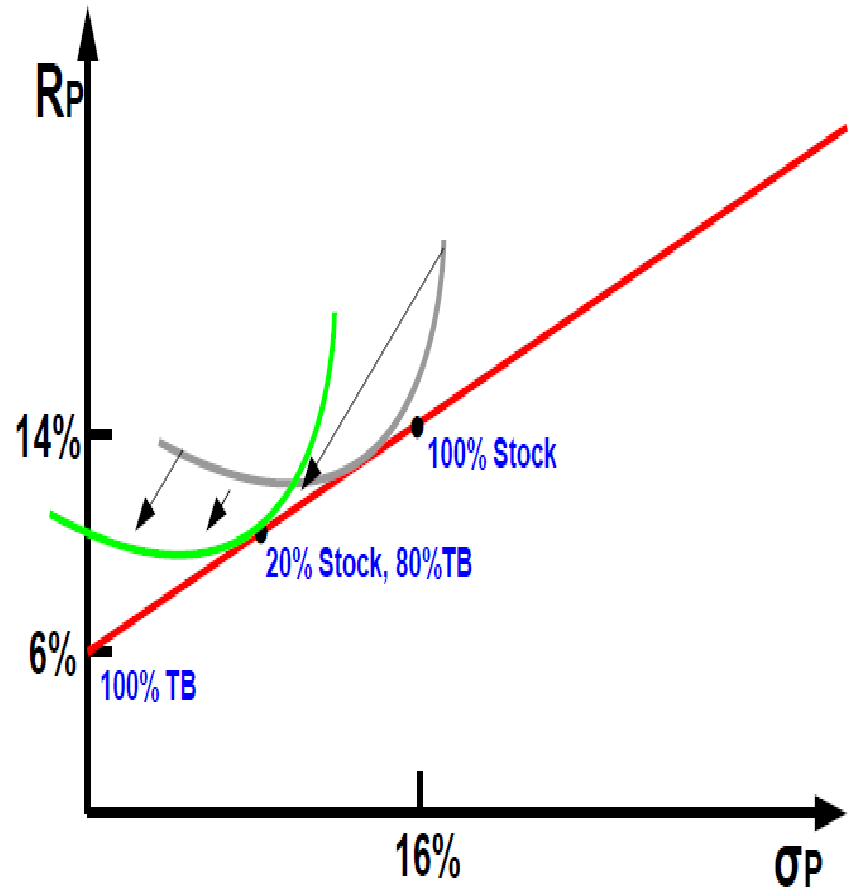
Quelle est l'aversion au risque que devrait avoir Agathe pour que le portefeuille 20% Stock – 80% TB soit celui qui maximise son utilité?

Première étape : plaçons la contrainte dans la fonction d'utilité:

$$U\left(R_P,\sigma_P\right)=\overline{R_P}-a\sigma_P^2$$
$$=\underbrace{X_S\overline{R_S}+\left(1-X_S\right)\overline{R_T}}_{\text{Rentabilité du port.}}-a\underbrace{X_S^2\sigma_S^2}_{\text{Variance du port.}}$$

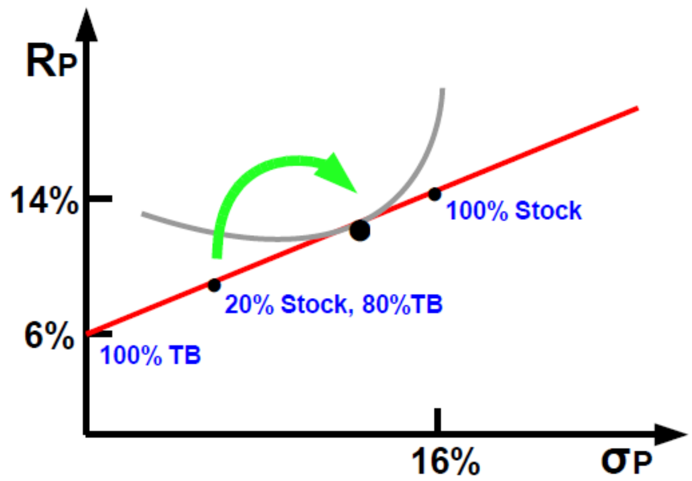
Deuxième étape : maximisons:

$$\frac{dU\left(R_P,\sigma_P\right)}{dX_S}=\overline{R_S}-\overline{R_T}-2aX_S\sigma_S^2$$
$$a=\frac{\overline{R_S}-\overline{R_T}}{2X_S\sigma_S^2}$$
$$a=\frac{14\%-6\%}{2\times0.2\times0.16^2}$$
$$a=7.81$$



Aunt Agatha
Question 5

- 5) **Quel est son portefeuille optimal connaissant son aversion au risque?**



$$X_S = \frac{\overline{R_S} - \overline{R_T}}{2a\sigma_S^2} = \frac{8\%}{2\times 2\times(16\%)^2} = 0.78125$$

$$X_{TB} = 1 - X_S = 0,21875$$

- ✓ **Vérification:**

$$\overline{R_P} = 0.781\times 14\% + 0.219\times 6\% = 12.25\%$$

$$\sigma_P = 0.781\times 16\% = 12.5\%$$

$$U\left(\overline{R_P},\sigma_P\right) = 12.25\% - 2\times(12.5\%)^2 = 9.13\%$$

Aunt Agatha
Question 6

- **Remarque :** jusqu'ici, nous considérions que Tante Agathe détenait le portefeuille de marché, il suffisait donc de déterminer où allait-elle se trouver sur la CML. Dans la suite de l'exercice, nous allons essayer de déterminer le nouveau portefeuille de marché.
- **6)**

A) Rentabilité du portefeuille :

$$\begin{aligned}\overline{R_P} &= X_S\overline{R_S} + X_B\overline{R_B}\\ &= 0.25\times 0.08 + 0.75\times 0.14\\ &= 12.5\%\end{aligned}$$

B) Volatilité du portefeuille :

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= X_S^2\sigma_S^2 + X_B^2\sigma_B^2 + 2X_SX_B\sigma_B\sigma_S\rho_{BS}\\ \sigma_P &= \sqrt{X_S^2\sigma_S^2 + X_B^2\sigma_B^2 + 2X_SX_B\sigma_B\sigma_S\rho_{BS}}\\ &= 12.39\%\end{aligned}$$

Solvay Business School

Aunt Agatha

Question 7

7)

A) 50% bonds et 50% actions

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{R_P} &= 11\% \\ \sigma_P &= 9.09\% \end{aligned}}$$

B) 75% bonds et 25% actions

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{R_P} &= 9.5\% \\ \sigma_P &= 6.59\% \end{aligned}}$$

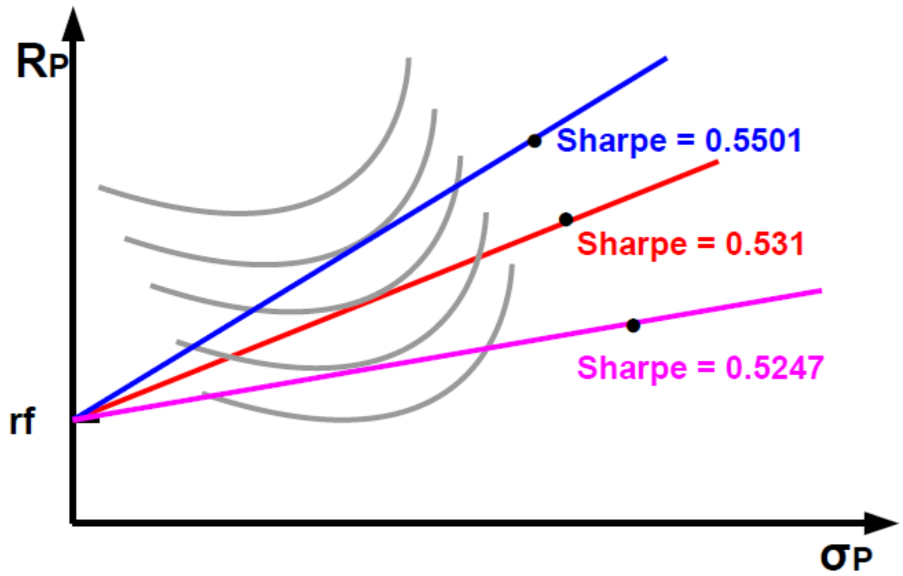
Aunt Agatha
Question 8

- **8)** Comment déterminer le portefeuille qui doit être sélectionné?
  - ✓ On utilise le ratio de Sharpe
  - ✓ Le portefeuille ayant le ratio de Sharpe le plus élevé sera le portefeuille qui permettra d'obtenir la plus haute rentabilité pour un risque donné

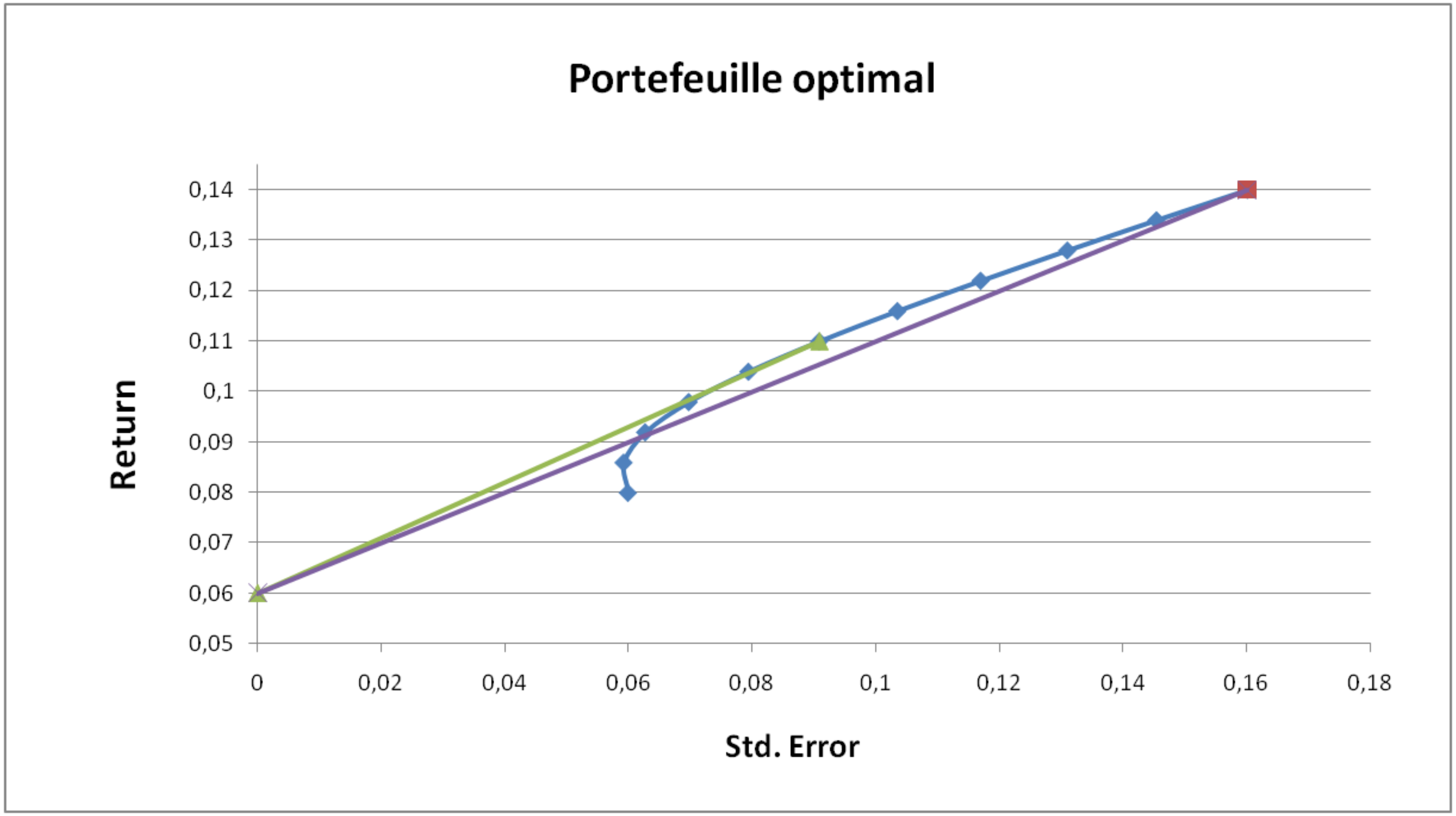
$$\lambda_1 = \frac{12.5\% - 6\%}{12.39\%} = 0.5247$$
$$\lambda_2 = 0.5501$$
$$\lambda_3 = 0.531$$

$$\boxed{\frac{\overline{R_i} - \overline{R_T}}{\sigma_i}}$$

$$\boxed{\overline{R_P} = \overline{R_T} + \lambda \sigma_P}$$



Aunt Agatha
Question 8

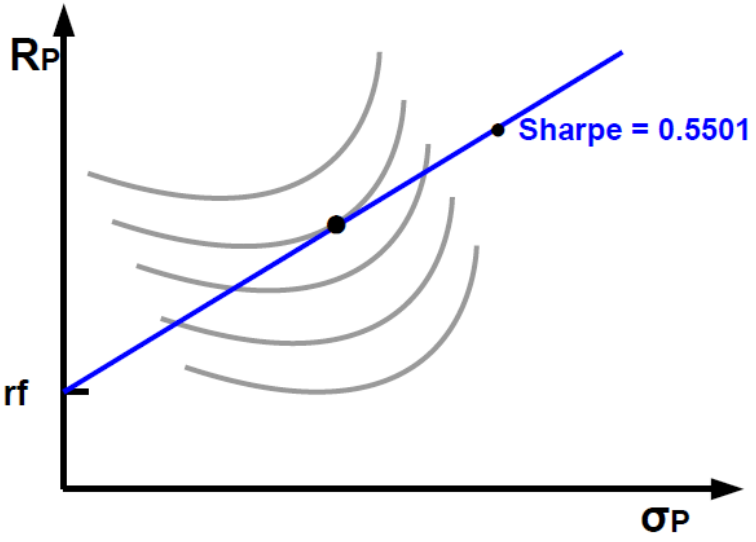


Aunt Agatha
Question 9

- **9)**
  - ✓ On connait maintenant le portefeuille optimal, on peut donc déterminer la frontière des possibilités d'investissement.
  - ✓ Mais quel portefeuille va-t-elle choisir sur sa frontière?

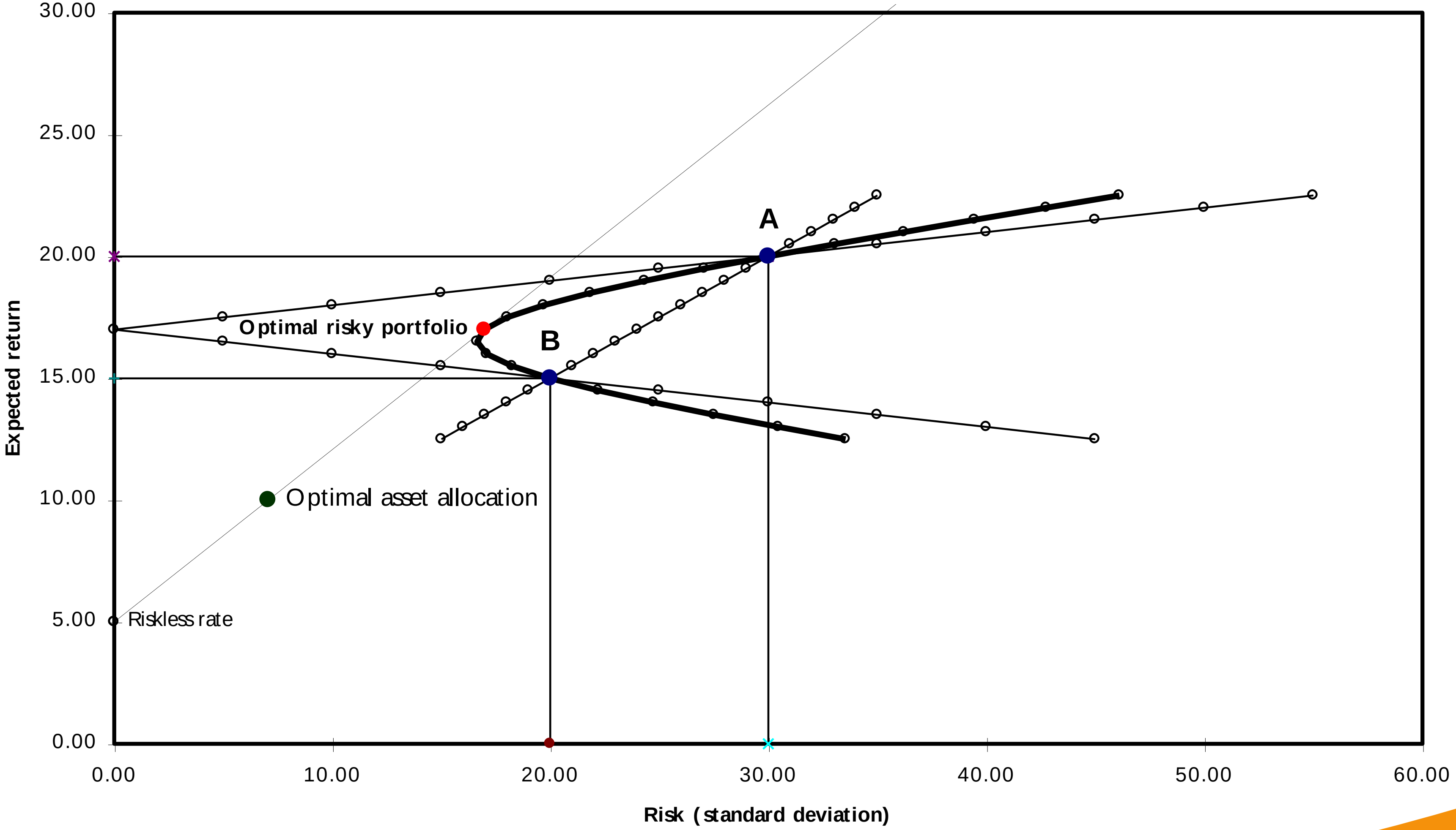
$$\boxed{X_P = \frac{\overline{R_P} - \overline{R_T}}{2a\sigma_P^2} = 1.51}$$

$$\boxed{X_T = -0.51}$$



Aunt Agatha

Question 9



Solvay Business School

« Aunt Agatha »

« CAPM »

ULB

CAPM
Questions 1 & 2

1) Rentabilité du portefeuille :

$$\overline{R_M} = 0.2512\times 6\% + 0.2325\times 8\% + 0.1334\times 10\% + 0.3829\times 12\%$$
$$= 9.3\%$$

2) Variance des rentabilités du portefeuille :

$$\sigma_P^2 = X_A^2\sigma_A^2 + X_B^2\sigma_B^2 + 2X_BX_A\overbrace{\sigma_B\sigma_A\rho_{AB}}^{\sigma_{AB}}$$
$$= \left(X_A^2\sigma_A^2 + X_BX_A\sigma_{AB}\right) + \left(X_B^2\sigma_B^2 + X_BX_A\sigma_{AB}\right)$$
$$= X_A\left(X_A\sigma_A^2 + X_B\sigma_{AB}\right) + X_B\left(X_B\sigma_B^2 + X_A\sigma_{AB}\right)$$

$$\left(X_A\sigma_A^2 + X_B\sigma_{AB}\right) = X_A\times\operatorname{cov}(A,A) + X_B\times\operatorname{cov}(A,B)$$
$$= \operatorname{cov}(A, X_AA) + \operatorname{cov}(A, X_BB)$$
$$= \operatorname{cov}(A, X_AA + X_BB)$$
$$= \operatorname{cov}(A,P) = \sigma_{AP}$$

$$\boxed{\sigma_P^2 = X_A\sigma_{AP} + X_B\sigma_{BP}}$$

CAPM
Question 2

Ce qui donne :

$$\sigma_P^2 = 0.2512 \times 0.01131 + 0.2325 \times 0.01697 + 0.1334 \times 0.02263$$
$$0.3829 \times 0.02829$$
$$= 0.02064$$

$$\boxed{\sigma_P = 14.37\%}$$

CAPM

Questions 3 & 4 : Rappels (A. Farber)

- The measure of risk of an individual asset in a portfolio has to incorporate the impact of diversification.
- The standard deviation is not an correct measure for the risk of an individual security in a portfolio.
- The risk of an individual is its systematic risk or market risk, the risk that can not be eliminated through diversification.
- Remember: the optimal portfolio is the market portfolio.
- The risk of an individual asset is measured by beta.
- The definition of beta is:

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma^2_M}$$

CAPM
Questions 3 & 4 : Rappels (A. Farber)

- Several interpretations of beta are possible:
- (1) Beta is the responsiveness coefficient of R_i to the market
- (2) Beta is the relative contribution of stock *i* to the variance of the market portfolio
- (3) Beta indicates whether the risk of the portfolio will increase or decrease if the weight of *i* in the portfolio is slightly modified

CAPM
Questions 3 & 4

3) Calcul des bêtas :

$$\boxed{\beta_i = \frac{\sigma_{iP}}{\sigma_P^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{0.01131}{0.02064} = 0.55\\ \beta_2 &= 0.82\\ \beta_3 &= 1.1\\ \beta_4 &= 1.37\end{aligned}}$$

Le bêta du portefeuille est égal à :

$$\begin{aligned}\beta_P &= 0.2512\times 0.55 + 0.2325\times 0.82 + 0.1334\times 1.1 + 0.3829\times 1.37\\ &= 1\end{aligned}$$

4) Vérifier le CAPM cela signifie:

$$\overline{R_i} = rf + \left(\overline{R_M} - rf\right)\beta_i \qquad \frac{\left(\overline{R_i} - rf\right)}{\beta_i} = \overline{R_M} - rf$$

CAPM
Question 4

- Pour le premier titre cela signifie :

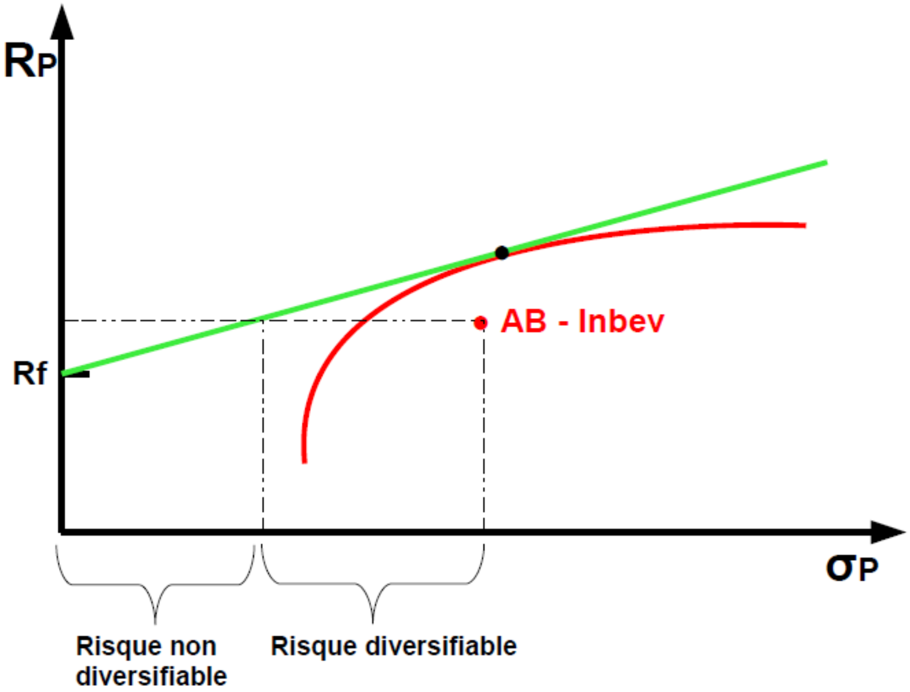
$$\overline{R_A} = rf + \left(\overline{R_M} - rf\right)\beta_A$$
$$= 2\% + (9,3\% - 2\%) \times 0,55$$
$$= 6\%$$

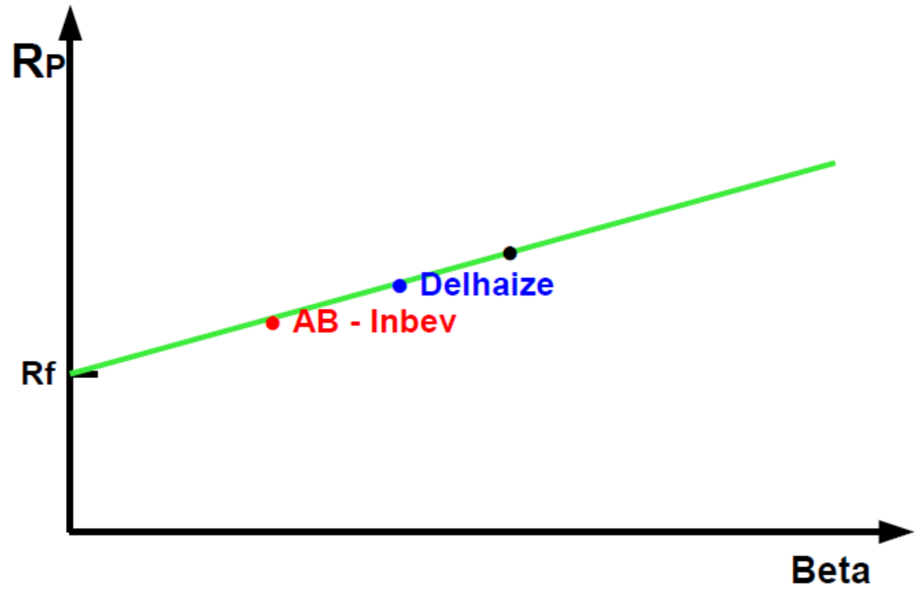
- Pour le deuxième titre cela signifie :

$$\overline{R_B} = rf + \left(\overline{R_M} - rf\right)\beta_B$$
$$= 2\% + (9,3\% - 2\%) \times 0,82$$
$$= 8\%$$

CAPM

Question 4





Solvay Business School

CAPM
Question 5

5) Le ratio de Sharpe est égal à :

$$\boxed{\lambda = \frac{\left(\overline{R}_i - rf\right)}{\sigma_i}}$$

Ce qui donne pour chacun des titres:

$$\lambda_1 = 0.267$$
$$\lambda_2 = 0.24$$
$$\lambda_3 = 0.267$$
$$\lambda_4 = 0.4$$

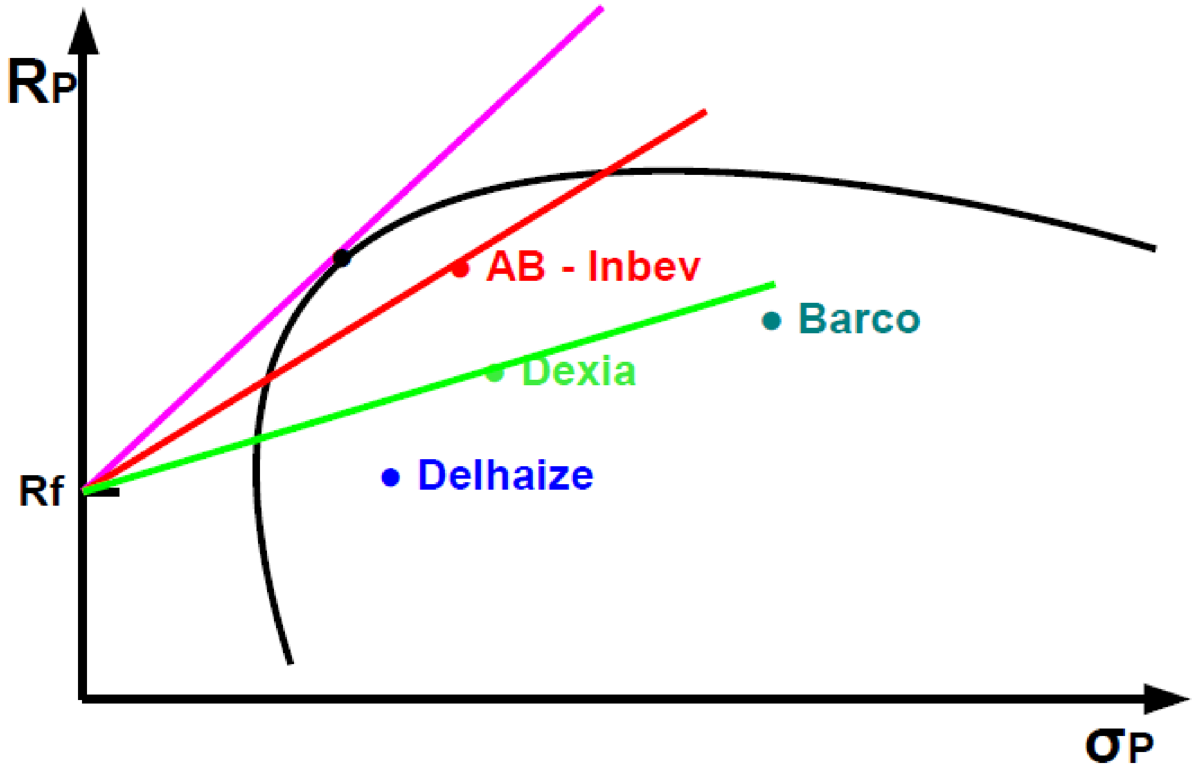
Alors que le ratio de Sharpe du portefeuille est égal à

$$\lambda_P = 0.508$$

Solvay Business School

CAPM
Question 5

- Pourquoi les ratios de Sharpe ne sont pas égaux?



CAPM
Question 6

6) Changement de return et de risque suite à l'ajout d'1% d'une action :

$$dR = \left(R_j - R_M\right) dX_j \qquad d\sigma = \frac{\sigma_{jM} - \sigma_M^2}{\sigma_M} dX_j$$

Si l'on ajoute 1 % de A :

$$dR = (6\% - 9.3\%) \times 1\% = -0.00033$$

$$d\sigma = \frac{0.01131 - 0.02064}{0.1437} \times 1\% = -0.000649$$

$$\frac{-0.00033}{-0.000649} = 0.508$$

Si l'on ajoute 1 % de D :

$$dR = (12\% - 9.3\%) \times 1\% = 0.00027$$

$$d\sigma = \frac{0.02829 - 0.02064}{0.1437} \times 1\% = 0.000533$$

Rappels (Slides de A. Farber) : Marginal contribution to risk: some math

- Consider portfolio *M*. What happens if the fraction invested in stock *I* changes?
- Consider a fraction *X* invested in stock *i*

$$\sigma_P^2 = (1-X)^2\sigma_M^2 + 2X(1-X)\sigma_{iM} + X^2\sigma_i^2$$

- Take first derivative with respect to *X* for *X* = 0

$$\left.\frac{d\sigma_P^2}{dX}\right|_{X=0} = 2(\sigma_{iM} - \sigma_M^2)$$

- Risk of portfolio increase if and only if:

$$\sigma_{iM} > \sigma_M^2$$

- The marginal contribution of stock *i* to the risk is σ_{iM}

CAPM

Question 7 – 1

Peu importe la rentabilité que souhaite Tante Agathe, il faut sélectionner le portefeuille optimal. Une fois que l'on connait le portefeuille optimal, on connait les possibilités d'investissements, il suffit ensuite de choisir le portefeuille qui donnera un return de 7%.

On détermine donc le portefeuille de marché :

Expected Return	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	9.30%
Standard Deviation	14.10%	12.78%	12.68%	13.82%	15.95%	18.72%	21.90%	14.37%
Sharpe	0.28368794	0.39123631	0.47318612	0.5065123	0.5015674	0.48076923	0.456621	0.50800278

Solvay Business School

CAPM
Question 7

- Pour obtenir un return de 7%, il faut combiner le portefeuille de marché et l'actif sans risque pour obtenir une rentabilité de 7%:

$$7\% = X_M \overline{R_M} + (1 - X_M) rf$$

$$X_M = 0.685$$

$$X_{rf} = 0.315$$

  - ✓ La standard deviation de ce portefeuille est :

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_P &= 0.685 \times 0.1437 \\ &= 9.84\%\end{aligned}}$$

  - ✓ Ce qui est moins élevé que le portefeuille efficient qui nous était proposé (E(R)=7%, Std. Dev. = 12,78%).

- Pour obtenir du 12 %:

$$X_M = 1.3698$$

$$X_{rf} = -0.3698$$

CAPM
Question 8

- **8)**

$$\overline{R_M} = 2.017\times 6\% + 0.088\times 8\% - 0.227\times 10\% - 0.878\times 12\%$$
$$= 0$$
$$\beta = 2.017\times 0.55 + 0.088\times 0.82 - 0.227\times 1.1 - 0.878\times 1.3$$
$$= -0.27$$

CAPM
Question 7