

## Chapitre 2

# Bases de la chromodynamique quantique

Avant d'entrer dans le détail de l'interaction entre quarks et gluons nous reprenons ici quelques rappels sur l'électrodynamique quantique. Le principe de construction de la théorie est le même dans les deux cas mais le cas abélien de QED est plus simple à écrire. Le comportement asymptotique (infrarouge et ultra-violet) des deux théories est cependant complètement différent.

Le principe de base qui guide la construction de modèles en physique des particules, dont le modèle standard en particulier, est celui de l'invariance de jauge locale, suivant lequel les propriétés physiques ne dépendent pas des phases des champs. Toute la physique est contenue dans la densité lagrangienne,  $\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x))$ , une fonctionnelle locale des champs  $\psi(x)$  et de leurs dérivées, à partir de laquelle on construit l'action :

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)).$$

L'évolution classique du champ  $\psi(x)$  est donnée par les équations d'Euler-Lagrange obtenues en imposant que l'action est stationnaire sous une variation du champ (principe d'Hamilton) :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi(x)} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \psi(x)} = 0 \quad (2.1)$$

C'est à partir de ces équations, qu'en formalisme de seconde quantification, on obtient les règles de Feynman qui permettent de calculer perturbativement n'importe quel processus en théorie des champs.

L'invariance de jauge locale implique que le Lagrangien reste invariant sous une transformation de symétrie locale des champs. Celle-ci généralise les symétries ayant pour degrés de liberté l'espace-temps, telles les rotations et translations spatiales. A la différence que seule l'interaction entre la particule et un champ externe permet d'obéir à ce principe. Le champ définissant l'interaction est celui dont les transformations de jauge compensent exactement celles encourues par le champ de matière  $\psi(x)$ . D'un point de vue physique, cela équivaut au remplacement de la dérivée partielle apparaissant dans la théorie libre par la dérivée covariante dont la connexion est définie par le champ décrivant l'interaction. D'une certaine façon, l'invariance de jauge peut être interprétée comme la traduction de l'impossibilité expérimentale de distinguer les effets résultant d'une transformation de symétrie locale appliquée au champ de matière de ceux introduits par une redéfinition du champ porteur de l'interaction.

La connaissance du groupe de symétrie auquel satisfait un champ de matière et sous lequel le Lagrangien décrivant son interaction doit demeurer invariant permet de déterminer les propriétés du champ porteur de l'interaction ainsi que la forme de son couplage à la matière à partir des générateurs et des constantes de structure définissant le groupe de Lie associé.

## 2.1 Petit rappel sur l'invariance de jauge en QED

Les équations du mouvement d'une particule chargée libre de spin 1/2 découlent du Lagrangien :

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x), \quad (2.2)$$

où  $\psi(x) = u(\mathbf{p})e^{-ix \cdot p}$  représente le quadri-spineur (particule ( $E > 0$ ) et l'antiparticule ( $E < 0$ ), deux états d'hélicité,  $\lambda = \pm 1/2$ ), ou spineur de Dirac, décrivant la particule et  $\bar{\psi}(x)$  le spineur adjoint,  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ , où  $\psi^\dagger$  est le conjugué hermitien de  $\psi$ . Les matrices (4X4) de Dirac,  $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$  sont liées aux matrices de Pauli  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et  $\beta$  (dans le choix habituel de représentation de SU(2)) anticommutatrices et de carré égal à l'identité.

Le champ de matière,  $\psi(x)$ , satisfait à la symétrie  $U(1)_Q$  attachée à la conservation de la charge électrique et correspondant à un changement de phase local du quadri-spineur  $\psi(x)$ , appelé transformation de jauge :

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-ie\alpha(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{ie\alpha(x)} \bar{\psi}(x), \quad (2.3)$$

où  $\alpha(x)$  est une fonction réelle. La transformation du champ ainsi définie ne modifiant en rien la mesure des observables qui en découle.

Le principe d'invariance de jauge locale sous ce groupe de symétrie impose le remplacement de la dérivée partielle présente dans la théorie libre par la dérivée covariante :

$$\partial^\mu \rightarrow D^\mu = \partial^\mu + ieA^\mu(x). \quad (2.4)$$

Celle-ci satisfait à la condition d'invariance sous le changement de phase locale :

$$D^\mu \psi'(x) = e^{-ie\alpha(x)} D^\mu \psi(x) \quad (2.5)$$

qui définit les lois de transformation du champ  $A^\mu(x)$  associées à celle du quadri-spineur  $\psi(x)$  :

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \alpha(x). \quad (2.6)$$

Cette dernière relation correspond à une transformation de jauge du champ électromagnétique auquel on identifie dès lors le champ  $A^\mu(x)$  présent dans la dérivée covariante. Le Lagrangien de la théorie en interaction s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(x) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) + e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{jauge}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le terme  $\mathcal{L}_0$  correspond au Lagrangien d'une particule libre de spin 1/2, le terme  $\mathcal{L}_{int}$  traduit l'interaction entre le champ de matière et le champ électromagnétique et le terme  $\mathcal{L}_{jauge}$  représente l'énergie cinétique contenue dans ce dernier, le tenseur du champ électromagnétique, dit tenseur de Maxwell, étant défini par la relation :

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x). \quad (2.8)$$

qui est fourni par l'application du commutateur des dérivées covariantes au champ électromagnétique :

$$[D^\mu, D^\nu] A_\nu = -ie F^{\mu\nu} A_\nu. \quad (2.9)$$

L'application des équations d'Euler-Lagrange mène à l'équation de Dirac :

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = -e \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x) ,$$

où le dernier terme est celui d'interaction, et aux équations de Maxwell inhomogènes :

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma_\nu \psi(x) .$$

Quant aux équations homogènes elles résultent de :

$$\partial^\mu \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} F^{\rho\lambda}(x) = 0 .$$

Ici l'invariance de jauge est dite locale car  $\alpha$  dépend de  $x$  et abélienne car  $\alpha(x)$ , étant une fonction, commute avec lui-même.

## 2.2 Invariance de jauge non abélienne et le Lagrangien QCD

Comme aucune structure fine liée à la présence de la charge de couleur n'est observée dans les niveaux d'énergie des hadrons, la couleur doit constituer une symétrie exacte de l'Hamiltonien gouvernant la dynamique des quarks. Autrement dit, les trois états de couleur  $\psi_q^r$ ,  $\psi_q^s$  et  $\psi_q^b$  associés à une saveur  $q$  donnée sont dégénérés d'un point de vue de l'interaction forte pour laquelle toute combinaison linéaire des 3 états de couleur  $\psi_q^r$ ,  $\psi_q^s$  et  $\psi_q^b$  est donc équivalente aux 3 états  $\psi_q^r$ ,  $\psi_q^s$  et  $\psi_q^b$  considérés individuellement. La loi de transformation :

$$\begin{pmatrix} \psi_q^r \\ \psi_q^s \\ \psi_q^b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi_q^{r'} \\ \psi_q^{s'} \\ \psi_q^{b'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{rr} & U_{rg} & U_{rb} \\ U_{gr} & U_{gg} & U_{gb} \\ U_{br} & U_{bg} & U_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_q^r \\ \psi_q^s \\ \psi_q^b \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Remarque 1 : l'invariance de jauge garantit que le photon est de masse nulle : en effet, un terme tel que  $m^2 A_\mu A^\mu$  ne serait pas invariant de jauge.

Remarque 2 : L'application du théorème de Noether indique que le courant électromagnétique  $j^\mu(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$  satisfait à l'équation de continuité :

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (2.10)$$

L'équation de Dirac s'écrit pour  $\psi(x)$  et  $\bar{\psi}(x)$  :

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \quad \text{et} \quad i \partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu - m \bar{\psi}(x) = 0$$

On a donc

$$\partial_\mu j^\mu(x) = e \{ \partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \} \quad (2.11)$$

$$= e \{ (\partial_\mu \bar{\psi}(x)) \gamma^\mu \psi(x) + \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \} \quad (2.12)$$

$$= e \{ i m \bar{\psi}(x) \psi(x) - i m \bar{\psi}(x) \psi(x) \} \quad (2.13)$$

$$= 0 \quad (2.14)$$

L'intégration sur l'ensemble de l'espace montre que la charge  $Q = \int j^0(x) d^3x$  est une constante du mouvement :

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (2.15)$$

L'invariance du Lagrangien de l'électrodynamique quantique sous la transformation de jauge  $U(1)_Q$  traduit donc la conservation du courant électrique.

doit dès lors constituer une opération de symétrie pour le Lagrangien dont découlent les équations du mouvement caractérisant la dynamique de l'interaction forte. Dans la relation 2.16, la fonction d'onde de couleur associée à un quark de saveur  $q$  :

$$\psi_q^c = \begin{pmatrix} \psi_q^r \\ \psi_q^g \\ \psi_q^b \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

constitue un triplet de la représentation du groupe de symétrie associé dont la loi de transformation s'écrit sous forme matricielle :

$$\psi_q^c \rightarrow \psi_q^{c'} = U \psi_q^c, \quad (2.18)$$

la matrice carrée  $U$  de dimension 3 étant unitaire par conservation de la probabilité et de déterminant égal à 1 afin d'assurer un mélange entre les différents états de couleur et ne pas se limiter à une transformation qui multiplierait chaque état par le même facteur de phase globale. Une matrice de déterminant unitaire est dite spéciale et la matrice  $U$  appartient dès lors au groupe de symétrie  $SU(n)_c$  pour lequel la dimension  $n$  reste à déterminer, l'indice  $c$  rappelant qu'il s'agit d'une symétrie associée à la conservation de la charge de couleur. La fonction d'onde de couleur associée à un anti-quark est donnée par l'adjoint de la fonction d'onde de couleur associée au quark de saveur correspondante :

$$\psi_{\bar{q}}^c = \psi_q^{c+}. \quad (2.19)$$

La loi de transformation de la fonction d'onde de couleur attachée à un anti-quark s'écrit donc :

$$\psi_{\bar{q}}^c \rightarrow \psi_{\bar{q}}^{c'} = \psi_q^{c+} U^+. \quad (2.20)$$

On peut à présent remarquer que la fonction d'onde de couleur associée à un méson demeure invariante sous les transformations de symétrie 2.18 et 2.20 :

$$\begin{aligned} \psi_{\bar{q}_1 q_2}^{couleur} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1}^c \psi_{q_2}^c \rightarrow \psi_{\bar{q}_1 q_2}^{couleur'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1}^{c'} \psi_{q_2}^{c'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1}^{c+} U^+ U \psi_{q_2}^c \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1}^{c+} \psi_{q_2}^c = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1}^c \psi_{q_2}^c \\ &= \psi_{\bar{q}_1 q_2}^{couleur} \end{aligned} \quad (2.21)$$

et constitue donc bien un singulet de couleur de la représentation du groupe de symétrie considéré.

Remarque : Si l'on envisage pour ce dernier le groupe de symétrie  $SU(2)_c$ , on peut montrer qu'une représentation tridimensionnelle de ce groupe possède la propriété que la matrice  $U$  décrivant les transformations 2.18 et 2.20 peut être choisie réelle. En choisissant réelle également la fonction d'onde de couleur associée à un quark, toute distinction entre les fonctions d'onde de couleur attachées à un quark et un anti-quark ainsi qu'entre leurs lois de transformation respectives disparaît alors :

$$\begin{aligned} (\psi_q^c)^\alpha &= (\psi_{\bar{q}}^c)^\alpha, \\ (\psi_q^{c'})^\alpha &= (\psi_{\bar{q}}^{c'})^\alpha. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dans ces conditions, les combinaisons  $qq$  et  $\bar{q}\bar{q}$  constituent également des singulets de couleur pour la représentation tridimensionnelle du groupe de symétrie  $SU(2)_c$ . Elles devraient donc pouvoir être observées dans la nature, ce qui n'est pas le cas.

On est ainsi naturellement amené à considérer le groupe  $SU(3)_c$  comme celui décrivant la symétrie du Lagrangien de la chromodynamique quantique ou QCD (Quantum Chromo Dynamics). On peut en effet

montrer que pour ce groupe, il est impossible de trouver une matrice  $U$  purement réelle et seule la combinaison  $q\bar{q}$  décrivant les mésons constitue pour ce groupe un singulet de couleur parmi l'ensemble des combinaisons à deux corps. On démontre de même que l'expression associée au baryon est bien la seule à définir un singulet de couleur sous le groupe  $SU(3)_c$  parmi l'ensemble de toutes les combinaisons possibles à 3 corps.

Si l'on considère à présent une transformation infinitésimale sous le groupe  $SU(3)_c$ , l'expression 2.18 peut se réécrire sous la forme :

$$\psi_q^c \rightarrow \psi_q^{c'} = (\mathbb{1} + i\xi)\psi_q^c \quad (2.23)$$

dans laquelle la matrice carrée  $\xi$  de dimension 3 est caractérisée par des éléments négligeables au second ordre. L'unitarité de la matrice  $U$  implique que la matrice  $\xi$  est hermitienne :

$$\xi = \xi^\dagger \quad (2.24)$$

et la condition imposant le déterminant de  $U$  égal à 1 entraîne que la matrice  $\xi$  est de trace nulle :

$$\text{tr}(\xi) = 0. \quad (2.25)$$

Les deux contraintes 2.24 et 2.25 réduisent à huit le nombre de paramètres distincts nécessaires pour définir la matrice  $\xi$  et l'on choisit conventionnellement de l'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\xi_8}{\sqrt{3}} + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 & \xi_4 - i\xi_5 \\ \xi_1 + i\xi_2 & \frac{\xi_8}{\sqrt{3}} - \xi_3 & \xi_6 - i\xi_7 \\ \xi_4 + i\xi_5 & \xi_6 + i\xi_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\xi_8 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 \xi_a \lambda_a \\ &= \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\xi}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

le vecteur  $\vec{\xi}$  ayant pour composante  $a$  le coefficient  $\xi_a$  et le vecteur  $\vec{\lambda}$  la matrice carrée  $\lambda_a$  de dimension 3, hermitienne et de trace nulle. Les matrices  $\lambda_a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ) ainsi définies constituent une représentation à trois dimensions des générateurs du groupe de symétrie  $SU(3)_c$ , la relation de fermeture de l'algèbre de Lie qui leur est associée définissant les constantes de structure  $f_{abc}$  du groupe :

$$\left[ \frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = if_{abc} \frac{\lambda_c}{2}. \quad (2.27)$$

On a par exemple  $f_{123} = 1$  et un tel groupe dont les générateurs ne commutent pas entre eux est dit non-abélien (un champ de jauge non-abélien est aussi appelé un champ de Yang-Mills). Une définition de ces matrices souvent utilisée est celle de Gell-Mann :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.28)$$

En utilisant la décomposition 2.26 de la matrice  $\xi$  sur la base  $\{\lambda_a\}$  des générateurs de  $SU(3)_c$ , la transformation infinitésimale considérée s'écrit à présent :

$$U(\vec{\xi}) = \mathbb{1} + i \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\xi}. \quad (2.29)$$

L'existence d'une algèbre de Lie associée aux transformations de symétrie du Lagrangien de l'interaction forte permet de considérer une rotation de valeur finie dans l'espace du degré de liberté de couleur comme résultant de la succession d'un nombre arbitrairement élevé de transformations proches de l'identité. En désignant par  $\vec{\alpha}$  le vecteur des paramètres caractérisant une transformation de valeur finie, on a dès lors :

$$\begin{aligned} U(\vec{\alpha}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ U\left(\frac{\vec{\alpha}}{n}\right) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathbb{1} + i \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{n} \right)^n \\ &= e^{i \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

De manière à faire apparaître explicitement la constante de couplage  $g$  de l'interaction forte, on réécrit cette dernière relation sous la forme :

$$U(\vec{\alpha}) = e^{i g \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}}. \quad (2.31)$$

Le principe d'invariance de jauge locale sous une transformation de symétrie du groupe  $SU(3)_c$  impose maintenant que le Lagrangien de la chromodynamique quantique soit invariant sous la loi de transformation de la fonction d'onde de couleur :

$$\psi_q^c(x) \rightarrow \psi_q^{c'}(x) = e^{i g \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x)} \psi_q^c(x). \quad (2.32)$$

Cette requête est satisfaite en remplaçant la dérivée partielle apparaissant dans l'expression du Lagrangien de la théorie libre :

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{q=1}^{nf} \bar{\psi}_q^c(x) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_q^c(x) \quad (2.33)$$

par la dérivée covariante dont la connexion définit le champ porteur de l'interaction :

$$\begin{aligned} \partial_\mu \rightarrow D_\mu &= \partial_\mu + i g \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{A}_\mu(x) \\ &= \partial_\mu + i g \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a(x). \end{aligned} \quad (2.34)$$

On identifie alors les 8 potentiels-vecteurs  $A_\mu^a(x)$  aux 8 gluons vecteurs de l'interaction forte. Chacun d'eux est associé à l'un des 8 générateurs  $\lambda^a$  du groupe de symétrie  $SU(3)_c$  et les champs de gluons déterminent par conséquent l'amplitude de chacune des 8 rotations indépendantes qu'il est possible de réaliser dans l'espace du degré de liberté de couleur. La dérivée covariante introduite en 2.34 satisfait à la condition d'invariance de jauge locale :

$$D'_\mu \psi_q^{c'}(x) = e^{i g \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x)} D_\mu \psi_q^c(x) \quad (2.35)$$

qui impose la loi de transformation pour les champs de gluons :  $A_\mu^a(x)$  sous un changement de jauge infinitésimal  $\vec{\xi}(x)$  :

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^{a'}(x) = A_\mu^a(x) - \partial_\mu \alpha^a(x) - g f_{abc} \alpha^b(x) A_\mu^c(x). \quad (2.36)$$

Cette relation indique que les champs de jauge se transforment selon la représentation régulière du groupe de symétrie  $SU(3)_c$ , ce qui signifie que les coefficients de leurs lois de transformation sont précisément donnés par les constantes de structure du groupe.

Afin de déterminer à présent l'énergie cinétique contenue dans le champ de gluons, on considère l'application du commutateur des dérivées covariantes au champ  $\vec{A}^v(x)$  :

$$[D_\mu, D_\nu] \vec{A}^v(x) = i g \frac{\lambda^a}{2} [\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x)] \vec{A}^v(x). \quad (2.37)$$

Cette expression peut être généralisée au groupe de symétrie  $SU(3)_c$  et fournit l'expression du tenseur de force associé à l'interaction de couleur :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x). \quad (2.38)$$

Cette relation fait apparaître la propriété essentielle que possède le champ de jauge d'interagir avec lui-même, les gluons vecteurs de l'interaction forte étant dès lors porteurs d'une charge de couleur. La conservation de cette dernière implique que chacun des 8 gluons corresponde à une combinaison linéaire de deux états colorés respectivement attachés à une couleur et une anti-couleur. On dispose à présent de l'ensemble des contributions du Lagrangien de la chromodynamique quantique et celui-ci s'écrit en sous-entendant les sommations sur les différents saveurs de quark présentes et sur les indices de couleur répétés :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}_q^c(x) \left[ i \gamma^\mu \partial_\mu - g \gamma^\mu A_\mu^a(x) \frac{\lambda^a}{2} - m \right] \psi_q^c(x) - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{jauge}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

les contributions  $\mathcal{L}_0$ ,  $\mathcal{L}_{jauge}$  et  $\mathcal{L}_{int}$  étant respectivement données par :

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_q^c(x) [i \gamma^\mu \partial_\mu - m] \psi_q^c(x) \quad (2.40)$$

$$\mathcal{L}_{jauge} = -\frac{1}{4} [\partial^\mu A_\nu^a(x) - \partial^\nu A_\mu^a(x)] [\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)], \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= -g \bar{\psi}_q^c(x) \gamma^\mu A_\mu^a(x) \frac{\lambda^a}{2} \psi_q^c(x) + \frac{g}{2} f_{abc} [\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)] A_b^\mu(x) A_c^\nu(x) \\ &\quad - \frac{g^2}{4} f_{eab} f_{ecd} A_a^\mu(x) A_b^\nu(x) A_\mu^c(x) A_\nu^d(x). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Le premier terme de la contribution  $\mathcal{L}_{int}$  constitue le couplage entre le champ de matière et le champ de gluons. Les deux derniers termes représentent respectivement l'interaction entre 3 gluons et 4 gluons, la première étant proportionnelle à  $g$  et la seconde d'ordre  $g^2$ . Ce couplage du champ de couleur avec lui-même engendre le fait qu'il est impossible d'envisager le gluon comme une particule libre et le vide de la chromodynamique quantique est en lui-même le siège d'interactions.

Dans le lagrangien ci-dessus, le paramètre  $g$  gouverne à lui seul l'invariance de jauge. Cette constante universelle est appelée la constante du couplage de jauge. Ce lagrangien n'est pas unique, on peut ajouter des termes de puissance plus élevées de  $F_{\mu\nu}^a$  et  $\psi$  qui respecte les invariances de jauge locale, de Lorentz ainsi que sous les inversions de temps et d'espace. Ces termes supplémentaires peuvent être éliminés par les exigences de renormalisabilité tout comme en QED.

---

Remarque sur la terminologie des groupe de Lie : Le groupe de Lie est un groupe continu, c'est-à-dire pour lequel chaque

## 2.3 Les règles de Feynman pour QCD

Dans le formalisme de la quantification canonique (rappel : on utilise le principe de correspondance et, dans l'espace des impulsions, on identifie  $\partial^\mu \rightarrow -ip^\mu$ ), le Lagrangien nous permet obtenir les règles de Feynman (en fait l'action  $S = \int d^4x \mathcal{L}$ ).

Le Lagrangien libre  $\mathcal{L}_0$  (équation 2.41) donne l'expression des propagateurs. Partant de l'équation du mouvement dérivée du Lagrangien, le propagateur est donné par l'opérateur inverse. Pour le champ de jauge de QED, l'équation du mouvement est donnée par  $iJ'_e = \partial_\mu F^{\mu\nu}$  où des termes de jauge resteront bien que les quantités physique n'en dépendent pas.

Les règles régissant les interactions sont traitées comme des perturbations et donc données directement par le Lagrangien d'interaction  $\mathcal{L}_{int}$  (équation 2.42). Il nous donne les expressions des couplages quark-gluon et aux termes de couplage à 3 et 4 gluons.

La jauge (covariante) est représentée par le facteur  $\xi$  qui vaut  $\xi = 1$  pour la jauge de Feynman et  $\xi = 0$  pour la jauge de Landau. Notons enfin que nous utilisons la notation  $\gamma^\mu p_\mu = \not{p}$ .

---

élément du groupe est labellé par des paramètres continus. Un élément  $g$  peut être écrit comme :

$$g = e^{-i\lambda^a \alpha^a}$$

où  $a$  va de 1 à  $n$ , la dimension du groupe (e.g.  $SU(N)$  avec  $n = N^2 - 1$ ). Pour des transformations infinitésimales on peut montrer qu'un ensemble de  $\lambda^a$  forme une algèbre :

$$[\lambda^a, \lambda^b] = if^{abc} \lambda^c.$$

où les  $f^{abc}$  sont appelées les constantes de structure du groupe.

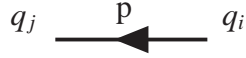
L'application des équations d'Euler-Lagrange 2.1 du champ du fermion permet d'obtenir l'équation de Dirac pour un fermion coloré :

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = -g \lambda_a A_\mu^a(x) \gamma^\mu \psi(x),$$

où  $\psi(x) = \psi_i(x)$  est l'indice de couleur du fermion. Le terme de droite représente donc l'interaction d'un fermion de couleur  $i$  avec un gluon d'indice de couleurs adjointes  $a$  et sommé sur tous les  $a$  possibles. Tandis que pour les bosons de jauge on trouve :

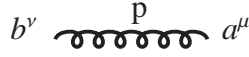
$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a = -g f^{abc} A_b^\mu(x) F_{\mu\nu}^c - g \bar{\psi}(x) \gamma_\nu \xi^a \psi(x).$$





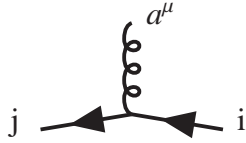
le propagateur du quark :

$$G_j^i(p) = \frac{i}{\not{p} - m} \delta_j^i = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \delta_j^i$$



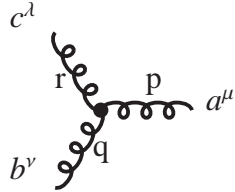
le propagateur du gluon (de polarisation  $\xi^\mu$ ) :

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p) = \frac{-i\delta^{ab}}{p^2} \left[ g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right]$$



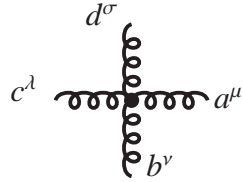
le vertex quark - gluon :

$$(\Gamma^{a\mu})_i^j = ig\gamma^\mu (\lambda^a)_i^j$$



le vertex à 3-gluons :

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(p, q, r) = -gf^{abc} [(p - q)_\lambda g_{\mu\nu} + (q - r)_\mu g_{\nu\lambda} + (r - p)_\nu g_{\mu\lambda}]$$



le vertex à 4-gluons :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu\lambda\sigma}^{abcd} = & -ig^2 f^{abe} f^{cde} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}) \\ & -ig^2 f^{ace} f^{bde} (g_{\mu\nu} g_{\sigma\lambda} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}) \\ & -ig^2 f^{ade} f^{bce} (g_{\mu\nu} g_{\sigma\lambda} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma}) \end{aligned}$$

(2.43)

Tous les vertex dépendent des indices de couleur des lignes croisées. Les indices de couleur adjointes pour les gluons :  $a, b, c, d$ , les indices  $i, j$  pour les quarks et antiquarks. Par convention quand on a les impulsions  $p, q$  et  $r$ , on les choisit telles que  $p + q + r = 0$ . Les lignes de quarks et antiquarks sont représentées par les bispineurs  $u_i$  et  $\bar{u}^j$ .

Le propagateur du quark est identique à celui d'un autre fermion, avec simplement des indices de couleur et de saveur qui doivent bien évidemment être conservés.

Les lignes de gluon portent un vecteur de polarisation  $\xi^\mu$  identique à celui du photon hormis l'indice supplémentaire de couleur adjointe.

Notons que dans toutes les interactions le couplage  $g$  apparaît. On remarque aussi qu'à l'ordre le plus bas en  $g$ , le processus dominant est l'émission d'un boson de jauge (i.e. gluon).

Enfin remarquons que, afin de quantifier proprement le Lagrangien de QCD, des termes dits fantôme de Faddeev-Popov sont ajoutés pour préserver l'invariance de jauge. Ces termes techniques (qui disparaissent pour certains choix de jauge), sans véritable contenu physique, ne seront pas discutés ici.

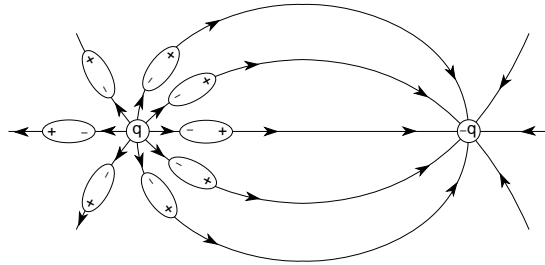
L'existence d'auto-interaction des champs de jauge est responsable des propriétés de liberté asymptotique et de confinement de l'interaction forte.

## 2.4 La liberté asymptotique

Nous pouvons à présent entamer la discussion des aspects dynamiques de QCD. Pour comprendre la dynamique d'une théorie des champs il est nécessaire de comprendre comment la constante de couplage se comporte en fonction de la distance. Ce comportement est déterminé par la réponse du vide à la présence d'une charge, le principe d'incertitude permettant des fluctuations du vide en paire de particule-antiparticule pendant un temps inversement proportionnel à leur énergie.

### 2.4.1 Effet d'écrantage en QED

La théorie quantique des champs nous dit que le vide contient des paires de particules-antiparticules virtuelles se formant et s'annihilant en permanence. En présence d'une charge électrique ces paires se polarisent et influence la charge effective observée. Quand on parle de charge, il faut donc spécifier la distance à laquelle on s'y intéresse. Cette distance est donnée par la longueur d'onde de de Broglie de la particule diffusée par la présence de cette charge :  $r \sim 1/p$ .



En QED l'effet d'écrantage de la charge électrique peut être calculé en resommant les corrections de boucle électron-positon au propagateur du photon :  $\gamma^* \rightarrow (e^+e^-)^* \rightarrow \gamma^*$ . Ce qui nous intéresse est le couplage qui apparaît à chaque vertex. A l'ordre le plus bas, on a :

$$(-i)e_0\gamma^\mu \cdot (-i)\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \cdot (-i)e_0\gamma^\nu = ie_0^2\gamma^\mu\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\gamma^\nu \quad (2.44)$$

Au premier ordre de boucle :

$$(-i)e_0\gamma^\mu \cdot (-i)\frac{g_{\mu\rho}}{q^2} \cdot (-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ (-i)e_0\gamma^\rho \frac{i(\mathbf{k}+m)}{k^2-m^2} (-i)e_0\gamma^\lambda \frac{i(\mathbf{k}-\mathbf{q}+m)}{(k-q)^2-m^2} \right] \cdot (-i)e_0\frac{g_{\lambda\nu}}{q^2} (-i)e_0\gamma^\nu \quad (2.45)$$

Le facteur explicite  $(-1)$  est dû à la boucle de fermions. La trace vient du fait que l'on somme sur les états de spin des fermions de la boucle (tout comme on intègre sur toutes les impulsions possibles) :

$$\sum_{\alpha,\beta,\xi,\zeta} \gamma_{\alpha\beta}^\rho(\mathbf{k}+m)_{\beta\xi} \gamma_{\xi\zeta}^\lambda(\mathbf{k}-\mathbf{q}+m)_{\zeta\alpha} = Tr \left[ \gamma^\rho(\mathbf{k}+m)\gamma^\lambda(\mathbf{k}-\mathbf{q}+m) \right] \quad (2.46)$$

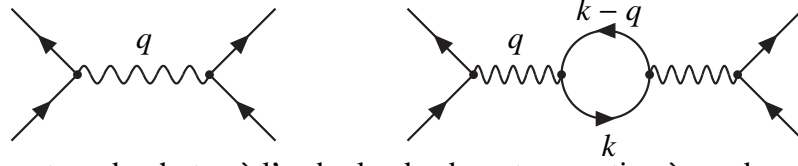


FIGURE 2.1 – Propagateur du photon à l'ordre le plus bas et correction à une boucle de fermions.

Le calcul de la boucle fait apparaître des *divergences ultraviolettes* correspondant aux cas où les particules de la boucle portent une impulsion infiniment grande avec des termes du type :

$$\int \frac{d^4 q}{(q^2 - M^2)^2} = \int \frac{q^3}{(q^2 - M^2)^2} dq d\Omega,$$

où  $q$  est l'impulsion dans la boucle dont  $\Omega$  l'élément d'angle solide ( $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ ). Une analyse dimensionnelle montre que quand  $q \rightarrow \infty$  l'intégrand se comporte comme  $\int dp/p$  qui diverge logarithmiquement. Pour donner un sens au calcul, on régularise l'intégrale en introduisant un *cut-off* ultraviolet  $\mu_{UV}$ .

$$\int \frac{dq}{q} \rightarrow \int^{\mu_{UV}} \frac{dq}{q} \quad (2.47)$$

La dépendance en  $q$  disparaît dans l'intégrale et laisse une divergence en  $q^2/\mu_{UV}^2$ . On obtient alors :

$$ie_0^2 \gamma^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \gamma^\nu \left[ 1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left( \frac{m^2 - q^2}{\mu_{UV}^2} \right) + \frac{e_0^2}{12\pi^2} F(q^2) \right] \quad (2.48)$$

où  $F(q^2)$  est une fonction finie qui disparaît pour  $q^2 \rightarrow 0$ .

On introduit alors la charge renormalisée (pour laquelle on n'a gardé que le terme de correction logarithmique) :

$$e_{eff}^2(1 - \text{boucle}) = e_0^2 \left[ 1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left( \frac{m^2 - q^2}{\mu_{UV}^2} \right) \right] \quad (2.49)$$

Si l'on rajoute des diagrammes à un nombre supérieur de boucles, les divergences montent en puissance et en définissant

$$\alpha_0 = \alpha_{em}(\mu = \mu_{UV}) = \frac{e_0^2}{(4\pi)}, \quad (2.50)$$

on obtient :

$$\alpha_{em}^{eff}(\mu_{UV}^2) = \alpha_0 \left[ 1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left( \frac{m^2 - q^2}{\mu_{UV}^2} \right) + \left( \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left( \frac{m^2 - q^2}{\mu_{UV}^2} \right) \right)^2 + \dots \right] \quad (2.51)$$

soit en posant  $Q^2 = -q^2$  et négligeant la masse, la somme de la série arithmétique donne :

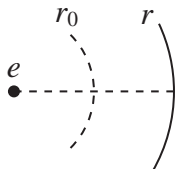
$$\alpha_{em}(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu_{UV}^2}}, \quad (2.52)$$

Le calcul a été fait ici dans le cas d'une boucle  $e^+e^-$  pour fixer les idées, les autres boucles doivent bien sûr aussi être calculées ( $\mu^+\mu^-$ ,  $q\bar{q}$  pour chaque saveur et chaque couleur,  $W^+$ ,  $W^-$ , ...).

Pour ne pas dépendre du cut-off, on choisit une échelle de renormalisation  $\mu$ . La procédure de renormalisation consiste alors à soustraire  $\alpha(\mu)$  à  $\alpha(Q^2 = -q^2)$ . On obtient alors la relation physique du lien entre deux échelles  $Q^2$  et  $\mu$  :

$$\alpha_{em}(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}}, \tag{2.53}$$

La constante de couplage dépend donc de la charge électrique dont la dépendance en la distance ( $r \sim 1/\mu$ ) peut être écrite comme (pour le comportement asymptotique qui nous intéresse, on peut négliger  $m^2$  devant  $q^2$ ) :



$$e^2(r) = \frac{e^2(r_0)}{1 + \frac{2e^2(r_0)}{3\pi} \ln \frac{r}{r_0}}, \tag{2.54}$$

Cette dépendance a des propriétés étonnantes. A grande distance d'une charge localisée en  $r_0$ ,  $r \gg r_0$ , on peut négliger l'unité présente au dénominateur, ce qui mène à une charge  $e(r)$  indépendante de la charge "nue"  $e(r_0)$ . En revanche, quand  $r_0 \rightarrow 0$ ,  $\ln r/r_0 \rightarrow \infty$ , si  $e(r_0)$  est fini,  $e(r) \rightarrow 0$  pour tout  $r$  à distance finie de  $r_0$ . Ce qui signifie que les interactions dans la limite locale ( $r_0 \rightarrow 0$ ) tendent vers zéro ce qui pose un problème fondamental. Le paradoxe est levé par le fait que quand  $r_0 \rightarrow 0$ ,  $e(r_0) \rightarrow \infty$ , le problème ne peut donc pas être traité de façon perturbative comme il a été fait pour obtenir la relation 2.54. Ce problème fut résolu par Gribov [5] par la procédure dite de renormalisation. La valeur de la constante de couplage est telle que ce problème ne se pose qu'à des distances extrêmement petites qui resteront probablement à jamais hors d'atteinte expérimentale. On retrouve la limite de l'électromagnétisme classique pour  $r \gg r_0$  :  $\alpha = 1/137$ .

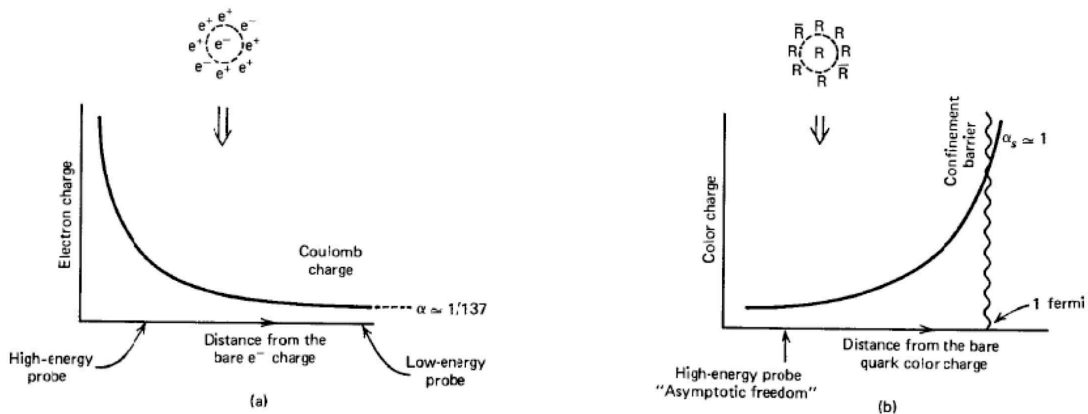


FIGURE 2.2 – a) Evolution de la constante de couplage électromagnétique en fonction de la distance à la charge électrique nue. b) Evolution de la constante de couplage forte en fonction de la distance à la charge de couleur nue.

### 2.4.2 La constante de couplage de QCD

En QCD, la situation est qualitativement différente et correspond à un effet d'*anti-écranage* : le couplage est petit à faible distance et augmente à grande distance. Cette propriété découverte par Gross, Wilczek et Politzer [6] appelée *liberté asymptotique* leur valu le prix Nobel en 2006.

L'expression de dépendance en la distance de la constante de couplage forte se calcule également à partir des corrections de boucles au propagateur du boson responsable de l'interaction, ici le gluon.

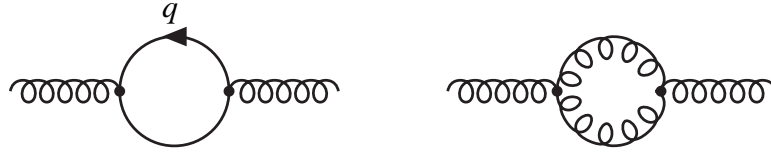


FIGURE 2.3 – Corrections de boucle de quarks et gluons au propagateur du gluon.

La boucle de quarks est similaire à celle de  $e^+e^-$  du cas de QED mis à part un facteur de somme sur les saveurs. La boucle de gluons a une expression proche mis à part :

- somme sur les couleurs (ici aussi il faut prendre la trace  $Tr(\lambda^a \lambda^a) = 1/2$ ).
- il s'agit de boson (pas de signe  $(-1)$ )
- un facteur numérique différent issu de l'intégrale :  $11/4$

Le caractère vectoriel du courant au vertex de fermion n'apparaîtra pas non plus, mais cela n'a pas d'importance ici car l'effet est dominé par les bornes de l'intégrale dont la divergence est du même type  $\int d^4k/k^4$ . En posant

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}, \quad (2.55)$$

nous obtiendrons donc :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu_{UV}^2)}{1 - \frac{2N_f - 11N_c}{6\pi} \alpha_s(\mu_{UV}^2) \ln \frac{Q^2}{\mu_{UV}^2}}. \quad (2.56)$$

Le terme  $11N_c$  provient de la contribution des gluons et le terme  $2N_f$  provient de la contribution des quarks. En comparant les relations 2.54 et 2.56 on peut voir que les quarks induisent un effet similaire sur  $\alpha_s(\mu = Q)$  à celui des charges électrique sur  $\alpha_{em}$  tandis que les gluons induisent un effet de signe opposé. L'effet de compétition entre quarks et gluons s'annulerait pour  $N_f = 11N_c/2$ .

L'origine des divergences ultraviolettes est liée au fait que l'on suppose la théorie valable quelque soit l'échelle d'énergie considérée, en particulier quand  $Q^2 \rightarrow \infty$ . Par les relations d'incertitude de Heisenberg cela correspond à des distances infiniment petites. Ceci est à contraster avec la situation habituelle en physique où les lois ont un domaine de validité limité. Par exemple, la physique atomique est caractérisée par une longueur  $l \simeq \text{Å} = 10^{-10}\text{m}$  alors que la physique nucléaire est caractérisée par  $l \simeq 1\text{fm} = 10^{-15}\text{m}$ . Cela correspond respectivement à des énergies de l'ordre de 1 eV et 100 MeV tandis que le domaine de la physique des particules est de 1 GeV et au delà.

### 2.4.3 Petite discussion

Oublions pour un instant les aspects quantiques et considérons le vide comme un milieu continu avec une constante diélectrique  $\epsilon$ . La constante diélectrique est liée à la perméabilité magnétique  $\mu$  et la vitesse de la lumière,  $c$  par :

$$\epsilon \mu = \frac{1}{c^2} = 1.$$

Un milieu avec effet d'écrantage correspond à  $\epsilon > 1$  sera donc diamagnétique ( $\mu < 1$ ) et inversement un milieu paramagnétique ( $\mu > 1$ ) correspond à un anti-écrantage menant à la liberté asymptotique.

Quand un électron se déplace dans un champ magnétique externe, deux effets entrent en compétition pour déterminer la perméabilité magnétique :

- le courant induit par le mouvement de la charge dans le champ magnétique produit un champ magnétique de direction opposée au champ extérieur (effet diamagnétique),  
 - le spin de la particule s'aligne sur la direction du champ magnétique extérieur (effet paramagnétique). En QED, l'effet diamagnétique l'emporte induisant l'effet d'écrantage de la charge électrique.  
 En QCD, les gluons portent une charge de couleur et ils ont un spin plus élevé (spin 1) que les quarks ou les électrons (spin 1/2) et l'effet paramagnétique l'emporte induisant l'anti-écrantage. La liberté asymptotique signifie que la charge (ici de couleur) mesurée approche zéro à une distance infinitésimale. Remarquons enfin qu'il n'y a pas d'effet de saturation à grande distance, ce qui correspond à la notion de confinement : les quarks ne peuvent échapper aux hadrons.

#### 2.4.4 Equation du groupe de renormalisation

Revenons au cut-off que nous avons du introduire. Comme  $\mu_{UV}$  est un paramètre arbitraire, la correction sans dimension,  $R$ , au couplage  $\alpha_s$  ne peut pas dépendre de  $\mu_{UV}^2$ . Donc :

$$\mu_{UV}^2 \frac{d}{d\mu_{UV}^2} R \left( \frac{Q^2}{\mu_{UV}^2}, \alpha_s(\mu_{UV}) \right) = \left[ \mu_{UV}^2 \frac{\partial}{\partial \mu_{UV}^2} + \mu_{UV}^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu_{UV}^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right] R = 0 \quad (2.57)$$

qui est appelée l'équation du groupe de renormalisation. En introduisant  $\tau = \ln(Q^2/\mu_{UV}^2)$  et la fonction  $\beta$  :

$$\beta(\alpha_s) = \mu_{UV}^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu_{UV}^2}, \quad (2.58)$$

l'équation du groupe de renormalisation devient :

$$\left[ \frac{-\partial}{\partial \tau} + \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right] R = 0 \quad (2.59)$$

qui est résolue en définissant une nouvelle fonction : la constante de couplage courante  $\alpha_s(Q)$  via :

$$\tau = \int_{\alpha_s}^{\alpha_s(Q)} \frac{dx}{\beta(x)} \quad (2.60)$$

où  $\alpha_s(\mu_{UV}) = \alpha_s$ . Toute dépendance d'échelle dans  $R$  vient donc de  $\alpha_s(Q)$ . Un changement dans l'échelle de renormalisation  $\mu_{UV}$  est compensée par un changement de la constante de couplage courante laissant  $R$  inchangé. Mais ceci n'est vrai que si tous les ordres sont calculés car  $\mu_{UV}$  apparaît toujours à l'ordre supérieur à celui auquel la variable (ici  $R$ ) est calculée.

#### 2.4.5 La fonction bêta

La dépendance en  $Q$  de la constante de couplage est calculée par la fonction  $\beta$  de QCD qui a l'expansion :

$$\begin{aligned} \frac{\beta(\alpha_s)}{4\pi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^{n+2} \\ &= \beta_0 \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 + \beta_1 \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^3 + \beta_2 \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.61)$$

Les calculs à une boucle donnent le résultat que nous avons obtenu :

$$\begin{aligned}\beta_0 &= -\left(\frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}N_f\right) \\ &= -11 + \frac{2}{3}N_f = -7.67 \quad (\text{pour } N_f = 5)\end{aligned}\quad (2.62)$$

où  $N_c = 3$ , est le nombre de couleurs et  $N_f$  le nombre de saveurs “actives” à l’échelle  $\mu_{UV}$ .

Le terme suivant peut-être calculé et vaut :

$$\beta_1 = 102 - \frac{38}{3}N_f \quad (2.63)$$

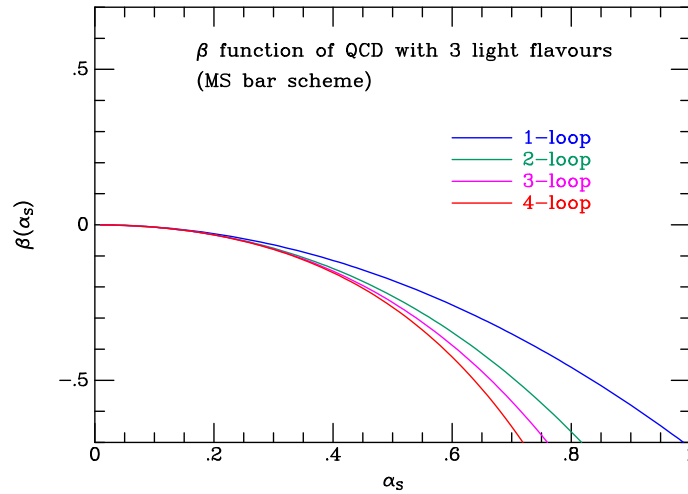


FIGURE 2.4 – La fonction  $\beta$  en fonction de  $\alpha_s$  pour un modèle à trois saveurs. On constate bien que plus  $\alpha_s$  est petit, moins les ordres supérieurs sont importants.

### 2.4.6 Le paramètre Lambda

La QCD perturbative nous dit donc comment la constante de couplage forte  $\alpha_s(Q)$  dépend de l’échelle (distance à laquelle se passe l’interaction). En revanche sa valeur n’est pas prédite et doit donc être mesurée. Par convention les valeurs mesurées sont comparées à la valeur  $Q = M_Z$  de la masse du boson  $Z$ , c’est-à-dire bien dans le régime perturbatif.

Le paramètre  $\mu$  reste dans l’expression (2.56) comme une relique du cut-off. Il est utile de définir  $\alpha_s(Q)$  en fonction du paramètre dit  $\Lambda_{QCD}$ , l’échelle à laquelle la correction à une boucle fait diverger le développement perturbatif (voir éq (2.51) dans le cas QED) :

$$\Lambda_{QCD}^2 = \mu^2 e^{4\pi/(\beta_0\alpha_s(\mu^2))} \quad (2.64)$$

qui correspond à la valeur de  $Q^2$  pour laquelle le dénominateur de 2.56 s’annule, soit le terme

$$\Lambda_{QCD}^2 = Q^2 \text{ tel que } \frac{2N_f - 11N_c}{6\pi} \alpha_s(\mu^2) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} = 1. \quad (2.65)$$

Et correspond à :

$$\ln Q^2/\Lambda_{QCD}^2 = - \int_{\alpha_s(Q)}^{\infty} \frac{dx}{\beta_0(x)}. \quad (2.66)$$

Cette grandeur offre l'avantage d'être un choix d'échelle qui représente le pivot entre le perturbatif et non-perturbatif et par conséquent l'énergie à laquelle les équations du groupe de renormalisation cessent d'être valables. Nous avons en effet  $\alpha_s(Q) \rightarrow \infty$  quand  $Q \rightarrow \Lambda_{QCD}$ .

Remarquons que  $\Lambda_{QCD}$  dépend du nombre de saveurs. Suivant notre définition, nous avons :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{-\beta_0/(4\pi) \log(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)}. \quad (2.67)$$

La valeur de  $\Lambda_{QCD}$  n'est pas donnée par la théorie, il faut la mesurer expérimentalement. On s'attend à ce qu'elle soit de l'ordre des masses hadroniques. Elle est mesurée à  $\Lambda_{QCD} = 210_{-30}^{+34}$  MeV et  $\alpha_s(M_Z) = 0.1184 \pm 0.0007$ .

## 2.4.7 Running des masses des quarks

Jusqu'ici nous avons traité les quarks comme étant sans masse. Le terme de masse (différent pour chaque saveur) introduit dans le Lagrangien est également sujet à renormalisation, au même titre que la constante de couplage. A nouveau on demande une indépendance par rapport à l'échelle de renormalisation :

$$\mu^2 \left( \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial m}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial m} \right) R = 0 \quad (2.68)$$

avec

$$\mu^2 \frac{\partial m}{\partial \mu^2} = -\gamma_m(\mu^2)m(\mu^2) \quad (2.69)$$

où  $\gamma_m(\mu^2)$  est appelée la dimension anormale de la masse qui est calculée comme une série de puissance en la constante de couplage forte :

$$\gamma_m(\alpha_s) = \gamma_0 \alpha_s + \gamma_1 \alpha_s^2 + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \quad (2.70)$$

avec les coefficients

$$\gamma_0 = 1/\pi \quad \text{et} \quad \gamma_1 = (303 - 10N_f)/(72\pi^2) \quad (2.71)$$

(pour le schéma de renormalisation dit de soustraction minimale  $\overline{\text{MS}}$ ).

## 2.5 Le confinement

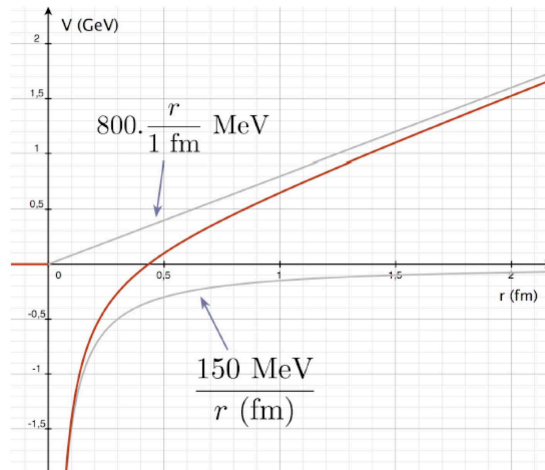
Des quarks isolés n'ont jamais été observés (par exemple en mettant en évidence l'existence de particules aux charges fractionnaires). Nous supposons au contraire qu'ils sont confinés au sein des hadrons. Comme nous venons de la voir, la force de liaison entre deux quarks augmente avec la distance qui les sépare, au moins, tant qu'une approche perturbative est applicable.

Le potentiel qui, pense-t-on, représente l'interaction QCD entre un quark et un anti-quark dans un état de couleur singulet est dit de 'funnel' et donné par :

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + kr \quad (2.72)$$



où  $k \simeq 0.8 \text{ GeV fm}^{-1}$  est une constante, appelée la tension de la corde (string). Ce potentiel a été intensément utilisé avec succès dans des modèles non relativistes d'états liés  $c\bar{c}$  et  $b\bar{b}$  et est compatible avec les résultats des calculs (non perturbatifs) de QCD sur réseau (lattice QCD). A petite distance  $r \ll 1/k$  le potentiel est coulombien et à grande distance linéaire.



La partie coulombienne est donnée par le propagateur des gluons. En effet une règle bien utile nous dit que, dans l'approximation non-relativiste (c'est-à-dire de masse importante,  $q^2 \ll M^2$ , où  $q$  est relatif au boson échangé et  $M$  aux particules cible et projectile), le potentiel est la transformée de Fourier du propagateur du champ de jauge en considérant uniquement sa 3-impulsion, multipliée par les constantes de couplage et  $(-i)$  à chacun des deux vertex.

Calculons le pour le couplage électromagnétique en considérant deux particules lourdes de charge  $e$  :

$$V(r) = -e^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{-\mathbf{k}^2} \quad (2.73)$$

après intégration sur les angles :

$$V(r) = e^2 \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{\sin(k|r|)}{k|r|}, \quad (2.74)$$

sachant que

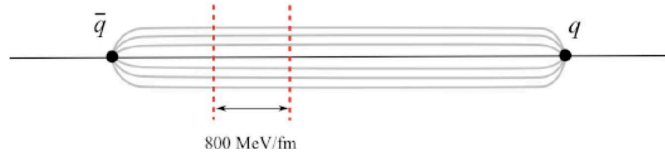
$$\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \quad (2.75)$$

et posant  $x = k|r|$  on retrouve la forme classique du potentiel Coulombien

$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{|r|} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q_1 Q_2}{|r|} \quad (2.76)$$

Une démarche similaire peut être menée dans le cas de QCD, la forme en  $1/k^2$  du propagateur étant la même pour le photon et les gluons. Le terme linéaire est mis à la main, il correspond au régime non perturbatif et ne peut donc pas être calculé à l'aide des diagrammes de Feynman.

L'explication intuitive est la suivante : quand la distance qui sépare une paire quark-antiquark est petite par rapport à la taille typique du confinement, le champ de gluons à la même forme dipolaire qu'un champ électrodynamique classique (potentiel Coulombien). Quand la distance de séparation devient de l'ordre de la taille du confinement (typiquement 1 fm), les lignes de champs des gluons s'attirent réciproquement, résultant en un tube le long de la ligne quark-antiquark. Un accroissement supplémentaire de la distance de séparation ne change pas la forme du champ de gluon (tube) mais l'allonge en conservant l'énergie par unité de longueur (terme linéaire).



Si la distance augmente au-delà du seuil de production de particules ( $m_\pi \simeq 135$  MeV) il y a *fragmentation*.