

Chapitre 3

Annihilation électron-positon

Considérons le cas le plus simple et accessible expérimentalement, soit les collisions $e^+ + e^-$. Il nous permettra d'étayer les notions de confinement et de fragmentation mais également de définir celles de *jets* ainsi que de discuter les corrections radiatives QCD.

L'annihilation électron-positon est un processus étudié avec grande attention en physique des particules. Il permet l'étude des aspects électro-faibles et de plus permet toute une série d'études sur différents aspects de QCD ainsi que la recherche de nouvelles particules.

Ce processus possède de nombreux avantages. En particulier, la réaction $e^+ + e^- \rightarrow \text{hadrons}$ présente un état initial clair et non sujet à des interférences entre l'état initial et l'état final ce qui simplifie grandement l'interprétation de l'état final hadronique en termes de QCD. La quadri-impulsion est intégralement transmise à l'état final, en l'absence de radiation QED. Enfin les conditions expérimentales sont en général "propres" dans le sens où il n'y a pas plusieurs événements superposés dans le détecteur ; la section efficace totale faisant intervenir la constante de couplage électro-faible, la probabilité de superposition de deux événements (couplage élevé au carré) reste faible.

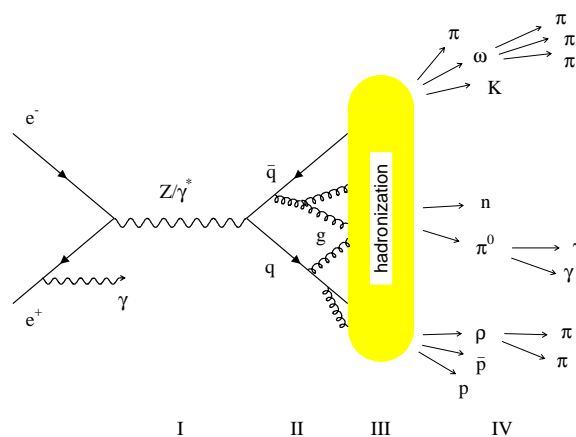
A titre informatif, le tableau 3.1 reprend les collisionneurs $e^+ + e^-$ et les expériences qui y furent liées jusqu'au LEP.

3.1 Section efficace totale $e^+ + e^- \rightarrow \text{hadrons}$

La production de hadrons se fait via la production d'une paire $q\bar{q}$ avec une probabilité de 1, par conséquent, nous avons :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) = \sum_{i=1}^{N_f} \sigma(e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i) \quad (3.1)$$

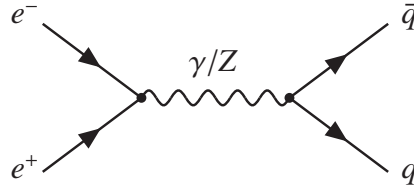
Accélérateur	Lieu	dates	\sqrt{s} [GeV]	Expériences
ACO	LAL Orsay	1973-1988	0.5	M3N
ADONE	INFN Frascati		1 – 3	Boson, $\mu\pi$, $\gamma\gamma$, $\gamma\gamma 2$, MEA
VEPP	Novosibirsk	1994-	1 – 12	VEPP-2
SPEAR	SLAC Stanford	1966-	2 – 8	SLAC-LBL, MARK I, MARK II
PEP	SLAC Stanford		29	MARK II, HRS, TPC/2 γ , MAC
DORIS	DESY Hambourg	1974-1993	3 – 11	PLUTO, DASP, LENA, DH(HM)
CESR	Cornell, U.S.A.	1979-	3 – 12	CLEO, CUSB
PETRA	DESY Hambourg	1978-1986	12 – 47	CELLO, JADE, MARK J, PLUTO, TASSO
TRISTAN	KEK Tsukuba	1986-1995	50 – 64	TOPAZ, VENUS, AMY
SLC	SLAC Stanford	1989-1998	\approx 91	MARK II, SLD
LEP	CERN Genève	1989-2000	88 – 209	ALEPH, DELPHI, L3, OPAL
PEP-II	SLAC	1998-2008	11	BaBar
KEKB	KEK, Japon	1999-2008	11	Belle
BEPC	IHEP, Chine	1989-	2.2	BES
DAΦNE	Frascati, Italie	1999-	1.4	KLOE

TABLE 3.1 – Principaux collisionneurs e^+e^- et expériences liées.

La production d'une paire de quarks (de spin 1/2) suite à l'annihilation d'un électron et d'un positon en un photon :

$$e^+(p_{e^+}) + e^-(p_{e^-}) \rightarrow \gamma^*(q) \rightarrow q(p_q) + \bar{q}(p_{\bar{q}}). \quad (3.2)$$

est identique à toute autre production d'une paire de fermion-antifermion :



en adaptant simplement les charges électriques (charge fractionnaire Q_i pour les quarks de saveur i) et en rajoutant le facteur de couleur, N_c . La section efficace, en négligeant pour l'instant l'échange de Z , est donnée par l'expression :

$$d\sigma = \frac{1}{2s} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Gamma \quad (3.3)$$

$$d\Gamma = \frac{d^3 p_q}{(2\pi)^3 2p_q^0} \frac{d^3 p_{\bar{q}}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{q}}^0} (2\pi)^4 \delta(p_{e^+} + p_{e^-} - p_q - p_{\bar{q}}) \quad (3.4)$$

où s est le carré de l'énergie dans le centre de masse $s = q^2 = (p_{e^+} + p_{e^-})^2 = (p_q + p_{\bar{q}})^2$. Le carré de l'amplitude invariante moyenné sur les spins des 2 particules entrantes et des deux particules sortantes :

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}|^2 \quad (3.5)$$

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 8 \frac{(4\pi)^2 \alpha^2}{s^2} N_c Q_i^2 \{ (p_{e^+} \cdot p_q)(p_{e^-} \cdot p_{\bar{q}}) + (p_{e^+} \cdot p_{\bar{q}})(p_{e^-} \cdot p_q) + m_q^2 (p_{e^+} \cdot p_{e^-}) \} \quad (3.6)$$

En négligeant toutes les masses devant les impulsions (impliquant $p_{e^+}^2 = p_{e^-}^2 = p_q^2 = p_{\bar{q}}^2 = 0$ et $(p_{e^-} + p_q)^2 = 2 p_{e^-} \cdot p_q$ et en faisant comme choix de référentiel le système du centre de masse et en choisissant l'axe z suivant l'axe des faisceaux d'énergie, E_{beam} (collision frontale), on peut réécrire la section efficace sous la forme :

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{2s} N_c Q_i^2 (1 + \cos^2\theta) \quad (3.7)$$

A très haute énergie les interactions entre quarks de l'état final peuvent être négligées et la section efficace est donnée par :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} N_c \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 = N_c \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \frac{86.8\text{nb}}{s(\text{GeV}^2)^2} \quad (3.8)$$

où la somme porte sur les N_f saveurs qui contribuent à la section efficace, c'est-à-dire tels que : $2m_f < \sqrt{s}$, m_f étant la masse du quark de saveur f . Ici nous avons négligé tous les autres effets dus aux masses des quarks, supposées petites par rapport à \sqrt{s} . Remarquons au passage que le terme en $1/s$ fournit les dimensions attendues pour une section efficace, à savoir $[\text{energie}]^{-2} \sim [\text{distance}]^{-2}$.

Par commodité, définissons le rapport :

$$R = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) / \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \quad (3.9)$$

$$= \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) / (4\pi\alpha^2/3s) \quad (3.10)$$

$$= N_c \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \quad (3.11)$$

La commodité ici est tant théorique (expression plus simple, libérée de facteurs inintéressants pour notre propos) qu'expérimentale car si les conditions permettent de mesurer directement ce rapport, bon nombre d'incertitudes expérimentales s'annulent dans le rapport (en particulier les mesures des valeurs absolues des deux sections efficaces dépendent de la même façon de la mesure de la luminosité).

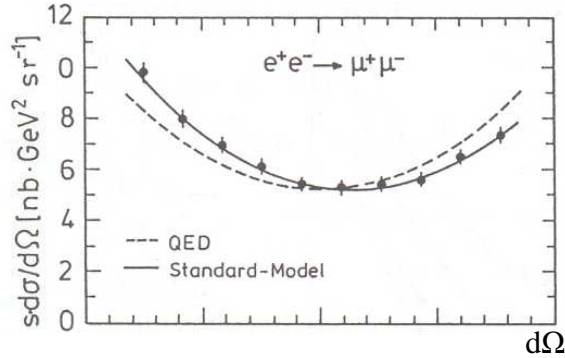


FIGURE 3.1 – Section efficace différentielle $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ mesurée par PETRA au collisionneur DESY (1990). Un comparaison aux prédictions du Modèle standard et de QED sont montrées.

Pour $\sqrt{s} < 3$ GeV, seuls les quarks u , d et s contribuent et pour $N_c = 3$, nous avons :

$$R = 3 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] \quad (3.12)$$

$$= 2. \quad (3.13)$$

Dans le domaine $4 < \sqrt{s} < 9$ GeV, le c contribue également, impliquant $R = 10/3$, au-delà, le quark b implique $R = 11/3$.

La comparaison aux mesures expérimentales confirme la valeur de $N_c = 3$ (voir figures 3.2 et 3.3). Ces estimations correspondent principalement au comptage des degrés de liberté impliqués à une énergie donnée. On remarque que notre prédiction n'est valable que lorsqu'on s'écarte des résonances $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ et que notre prédiction est meilleure aux plus hautes énergies (au-delà de 2 GeV). Aux énergies inférieures à 2 GeV et dans les régions de résonances, les effets d'hadronisations sont importants. De plus aux basses énergies la constante de couplage forte est plus grande (se rapproche de l'unité) impliquant des corrections radiatives QCD plus importantes voire même des effets non perturbatifs. Dans les régions des résonances on peut interpréter la prédiction QCD comme une valeur moyenne sur un intervalle en énergie ΔE de l'ordre de 1 GeV :

$$R \rightarrow \langle R \rangle = \frac{1}{\Delta E} \int_{E-\Delta E/2}^{E+\Delta E/2} R(E') dE' \quad (3.14)$$

Nous discuterons l'approche du pic du Z un peu plus loin dans ce chapitre.

3.2 Création d'une paire quark-antiquark

Dans le système du centre de masse, le quark et l'antiquark possèdent la même énergie et des impulsions opposées (suivant chaque composante). Ils sont créés au même point de l'espace et s'éloignent l'un de l'autre. Quand leur distance de séparation devient proche du rayon de confinement ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$) le champ de couleur de la paire peut être représenté par un tube (comme un ressort). En continuant à se

R in Light-Flavor, Charm, and Beauty Threshold Regions

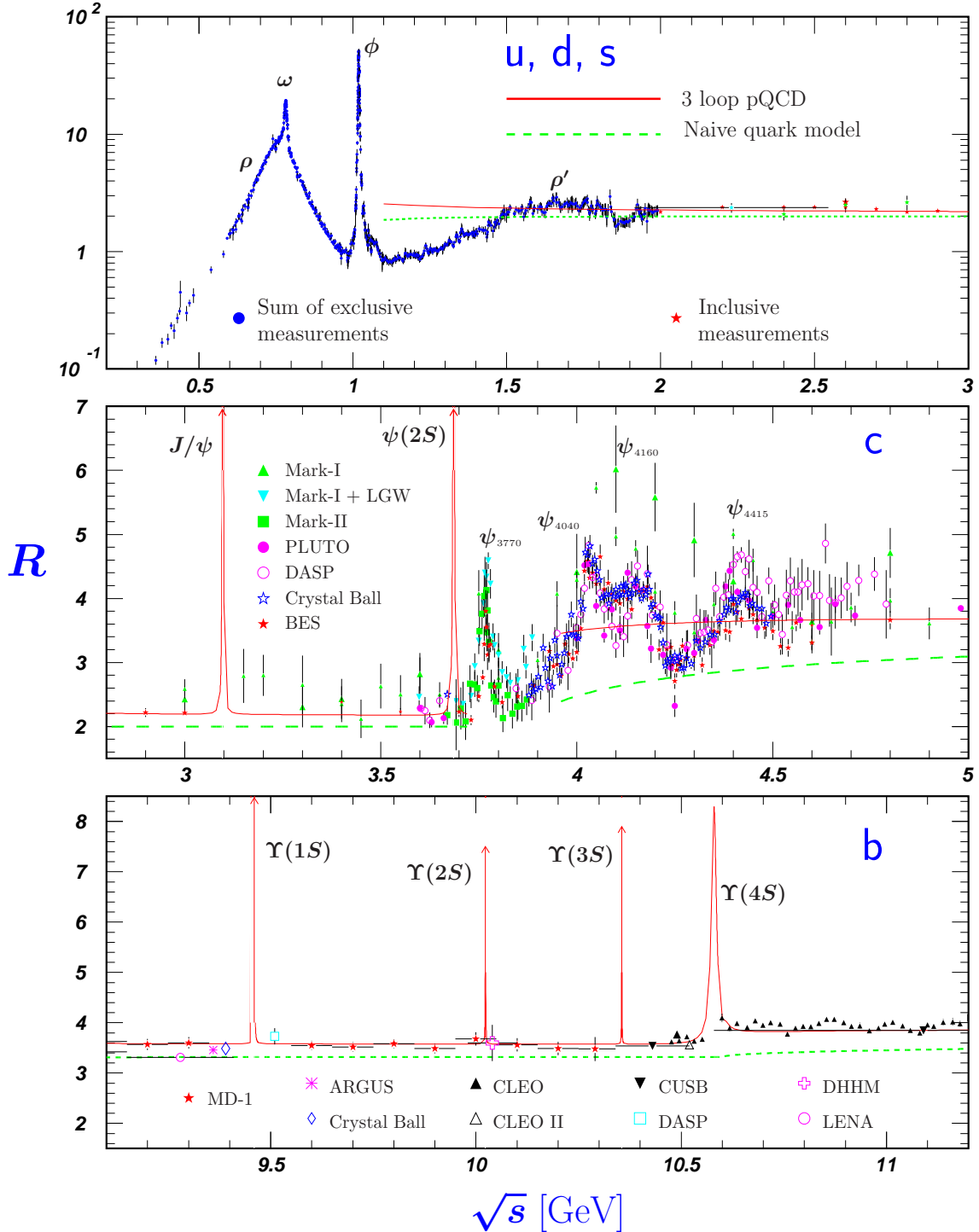


Figure 40.7: R in the light-flavor, charm, and beauty threshold regions. Data errors are total below 2 GeV and statistical above 2 GeV. The curves are the same as in Fig. 40.6. **Note:** CLEO data above $\Upsilon(4S)$ were not fully corrected for radiative effects, and we retain them on the plot only for illustrative purposes with a normalization factor of 0.8. The full list of references to the original data and the details of the R ratio extraction from them can be found in [arXiv:hep-ph/0312114]. The computer-readable data are available at <http://pdg.ihp.su/xsect/contents.html> (Courtesy of the COMPAS(Protvino) and HEPDATA(Durham) Groups, August 2005.) See full-color version on color pages at end of book.

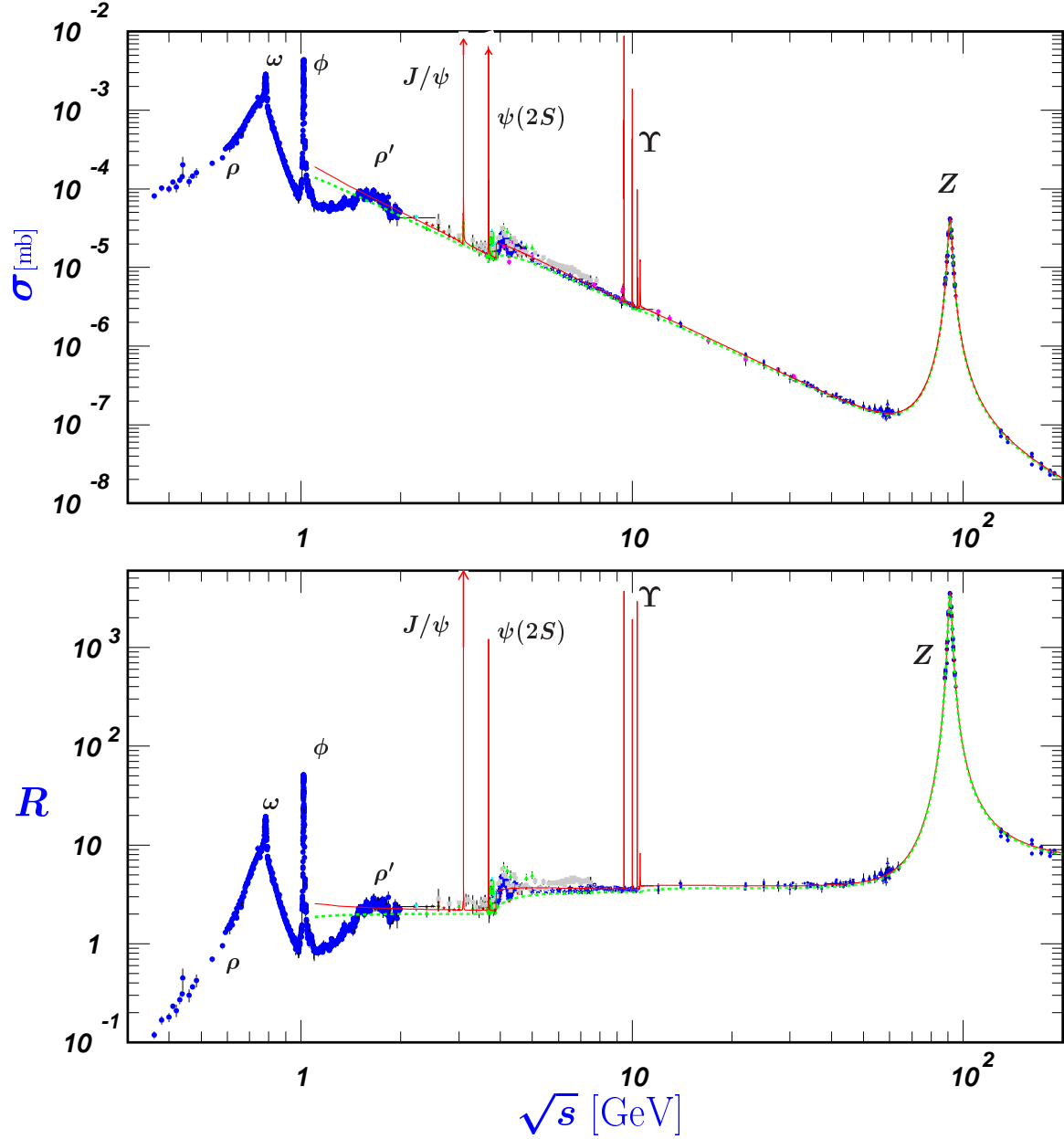
σ and R in e^+e^- Collisions

Figure 40.6: World data on the total cross section of $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$ and the ratio $R(s) = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}, s) / \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, s)$. $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}, s)$ is the experimental cross section corrected for initial state radiation and electron-positron vertex loops, $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, s) = 4\pi\alpha^2(s)/3s$. Data errors are total below 2 GeV and statistical above 2 GeV. The curves are an educative guide: the broken one (green) is a naive quark-parton model prediction and the solid one (red) is 3-loop pQCD prediction (see “Quantum Chromodynamics” section of this *Review*, Eq. (9.12) or, for more details, K. G. Chetyrkin *et al.*, Nucl. Phys. **B586**, 56 (2000) (Erratum *ibid.* **B634**, 413 (2002)). Breit-Wigner parameterizations of J/ψ , $\psi(2S)$, and $\Upsilon(nS)$, $n = 1, 2, 3, 4$ are also shown. The full list of references to the original data and the details of the R ratio extraction from them can be found in [arXiv:hep-ph/0312114]. Corresponding computer-readable data files are available at <http://pdg.ihep.su/xsect/contents.html>. (Courtesy of the COMPAS(Protvino) and HEPDATA(Durham) Groups, August 2005. Corrections by P. Janot (CERN) and M. Schmitt (Northwestern U.)) See full-color version on color pages at end of book.

séparer l'énergie potentielle du tube augmente et celles cinétiques des quarks diminuent. Lorsque le tube a suffisamment d'énergie potentielle, c'est-à-dire supérieure à la masse d'une paire $q\bar{q}$, une nouvelle paire $q\bar{q}$ est créée qui écrante la couleur de la paire initiale. La couleur doit être conservée à chaque vertex et de façon globale après un temps qui est celui de l'hadronisation. Par exemple :

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow q_v + \bar{q}_v \rightarrow q_v + \bar{q}_v \dots q_v + \bar{q}_v \quad (3.15)$$

Si l'impulsion relative d'un quark par rapport à l'autre au sein de ces paires est suffisamment grande les tubes se fragmentent encore, et ainsi de suite. Une *cascade* de partons est ainsi produite, c'est-à-dire des quarks et des gluons en grand nombre avec progressivement moins d'énergie. Si l'énergie disponible dans le centre de masse est grande, ce phénomène de neutralisation de la couleur n'apparaîtra qu'en fin de processus, c'est-à-dire lorsque l'on s'approche de l'échelle d'hadronisation.

A haute énergie (disons $E \gg m_p$, où m_p est la masse du proton) le tube initial possède une grande impulsion longitudinale (prenons l'axe z définissant la direction longitudinale suivant le quark initial q), p_L et une impulsion transverse limitée, $p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \sim m_p$. Par conséquent, les partons produits possèdent des impulsions principalement longitudinales.

Après la production en cascade, les quarks se recombinent en des états neutres de couleurs (seuls états observables) c'est-à-dire des hadrons. Cette transition n'induit pas de transfert d'impulsion transverse important (on dit que c'est un processus *soft*). Cette hypothèse souvent appelée la *dualité parton-hadron* a pour conséquence que les hadrons produits sont proches dans l'espace des phases des partons qui sont à leur origine. Les hadrons produits sont collimés dans deux petits domaines angulaires, c'est ce qu'on appelle des *jets*, et opposés l'un à l'autre.

Remarque sur les échelles de temps :

Le mécanisme de formation de jets que nous avons décrit ci-dessus est composé d'étapes successives dans le temps. Ceci peut être justifié par le fait que différentes échelles de temps interviennent. En utilisant les variables conjuguées de temps et d'énergie :

- le processus partonique (désintégration du photon ou du Z) se déroule sur une échelle de temps :

$$t_p \sim \frac{1}{\sqrt{s}} \quad (3.16)$$

- le temps caractéristique de l'hadronisation :

$$t_h \sim \frac{1}{\Lambda_{QCD}} \sim \tau = 10^{-23} \text{sec} \quad (3.17)$$

où τ est le temps de vie typique d'une résonance (désintégration forte). A haute énergie

$$\sqrt{s} \gg \Lambda_{QCD} \Rightarrow t_p \ll t_h, \quad (3.18)$$

en d'autres termes : l'hadronisation se déroule longtemps après la processus partonique.

Remarquons aussi au passage que c'est un argument identique sur les échelles de temps qui nous permet de comprendre pourquoi, contrairement aux quarks plus légers, le quark top, ne peut pas se lier à d'autres quarks pour former un hadron $t\bar{t}$. En effet la largeur totale de désintégration :

$$\Gamma_{top} \sim G_F m_{top}^3 \Rightarrow \tau_{top} \simeq 4 \cdot 10^{-25} \text{s}$$

qui est inférieur au temps d'hadronisation t_h .

Cette approche de factorisation en temps nous permet de comprendre aussi pourquoi à basse énergie (s petit) les effets d'hadronisation sont importants. Si le temps de l'interaction n'est pas petit devant le temps de l'hadronisation, l'émission de gluons supplémentaires, par exemple, se déroulerait "en même temps" que l'hadronisation, mêlant alors les effets perturbatifs (à supposer qu'ils le soient) et les effets non perturbatifs (hadronisation).

3.3 La formation de jets

Le mécanisme de formation de jets interdit, par exemple, qu'un quark de quadri-impulsion p d'un jet se combine avec un quark de quadri-impulsion p' de l'autre jet tel que $p \cdot p' \gg \Lambda_{QCD}^2$. Ce qui revient à dire que la masse invariante formée par ces deux quarks doit être petite par rapport à Λ_{QCD}^2 . La transition des jets de partons en jets de hadrons conserve, par conséquent, les distributions des impulsions longitudinale et transverse.

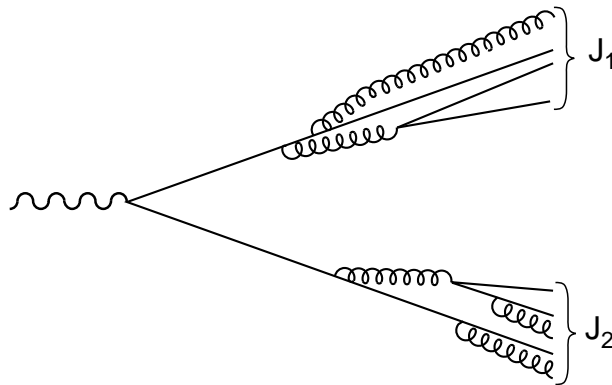


FIGURE 3.4 – Illustration du mécanisme de formation de jets partoniques

On peut donc remonter successivement de l'information des jets hadroniques, vers les jets partoniques et ensuite vers la paire $q\bar{q}$ d'origine. Les données expérimentales confirment cette approche qualitative (voir figure 3.5).

Si un gluon énergétique est produit à grand angle par rapport à la paire d'origine (un *gluon dur*), suivant un processus à l'ordre supérieur en α_s , un troisième jet est formé (voir le diagramme de la figure 3.6 et l'événement observé au LEP à la figure 3.5 de droite).

Ces considérations permettent de se rendre compte que les jets sont des objets universels de grande importance dans les interactions hadroniques à haute énergie.

Les dépendances angulaires de la production de deux jets sont en bon accord avec l'équation 3.57, comme l'attestent les résultats du LEP de la figure 3.7, ce qui confirme à la fois le fait que les quarks sont de spin 1/2 et le mécanisme de production de jets décrit ci-dessus.

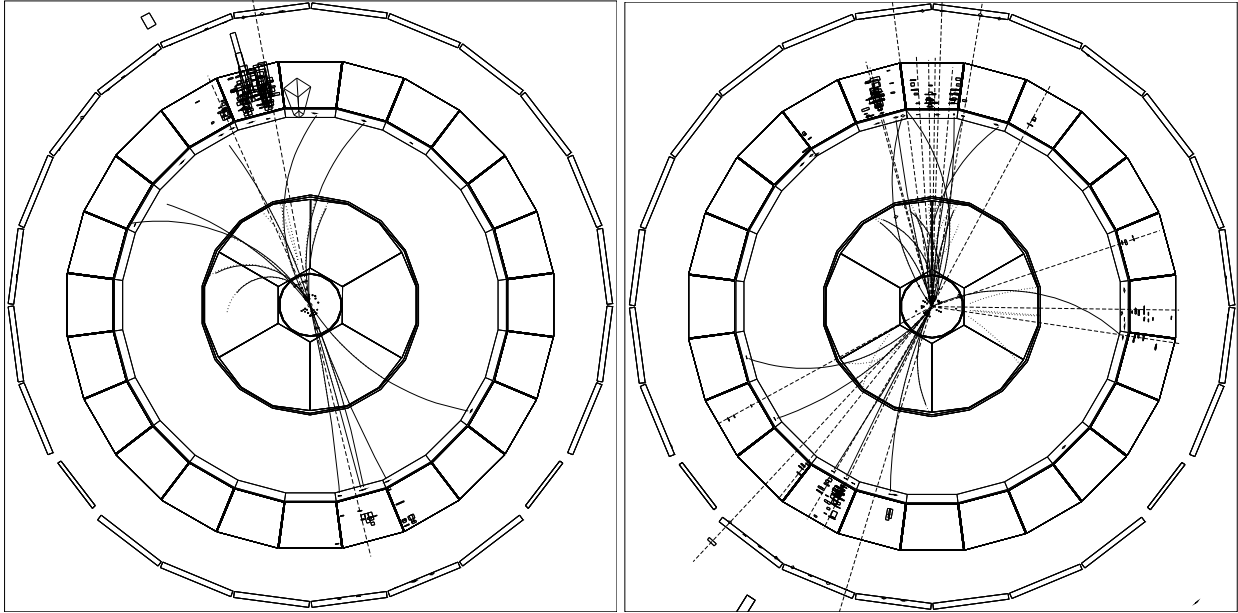


FIGURE 3.5 – Événement à deux jets (à gauche) et à trois jets (à droite) de la désintégration hadronique d'un boson Z vu dans le détecteur DELPHI du collisionneur e^+e^- LEP. Vue transverse.

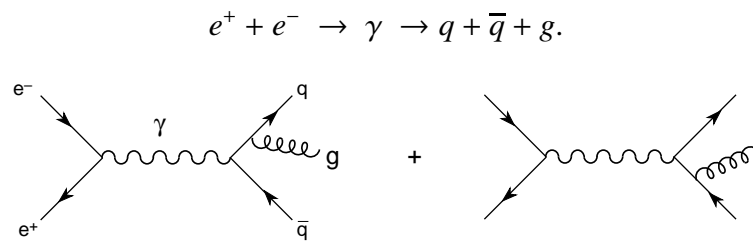


FIGURE 3.6 – Diagrammes à l'origine de la création de 3 jets

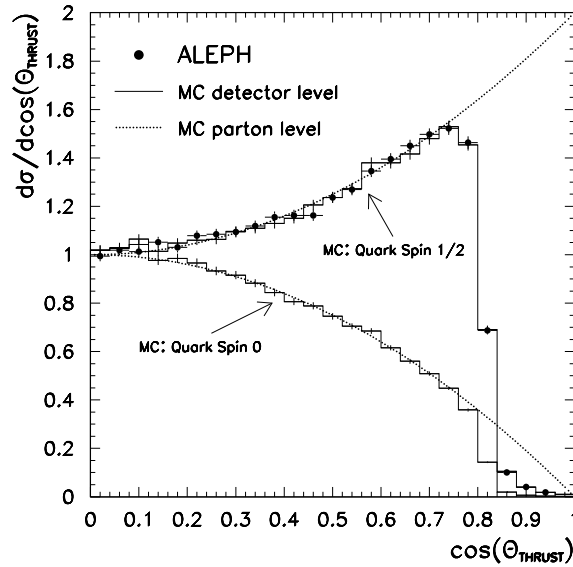


FIGURE 3.7 – Section efficace de jet en fonction du cosinus de l'angle. Le comportement attendu pour les particules de spin 1/2, soit $(1 + \cos^2\theta)$ est très nettement favorisé par rapport à celui attendu pour un spin 0, soit $(1 - \cos^2\theta)$.

3.4 Le pic du Z et haute énergie

Les expériences auprès des accélérateurs LEP1 et SLAC ont opéré à des énergies sur le pic de production du boson Z, i.e. $\sqrt{s} = M_Z$ (où M_Z est la masse du Z). L'hypothèse tenue jusqu'alors de considérer le seul photon n'est clairement plus valable. On peut même négliger la contribution du photon ainsi que celle de l'interférence entre le photon et le Z. La section efficace s'exprime alors comme :

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2 k^2}{2\Gamma_Z^2} \left[(1 + \cos^2\theta)(a_e^2 + v_e^2)(a_f^2 + v_f^2) + 8\cos\theta a_e v_e a_f v_f \right] \quad (3.19)$$

où

$$k = \frac{\sqrt{2}G_F M_Z^2}{4\pi\alpha} = 1.40 \quad (3.20)$$

k représente le rapport sans dimension des couplages faible sur électromagnétique, sa valeur numérique est donnée ici pour $\alpha(M_Z) = 1/128$. G_F est la constante de Fermi, α la constante de structure fine et Γ_Z la largeur du boson Z. v_f et a_f sont les couplages vectoriel et axial du Z aux fermions, ils sont donnés par :

$$\begin{aligned} v_f &= I_{3f} - 2Q \sin^2\theta_W \\ a_f &= I_{3f} \end{aligned} \quad (3.21)$$

où θ_W est l'angle de Weinberg et I_{3f} la composante z de l'isospin faible.

	fermions	Q	I_{3f}	v_f	a_f		
leptons	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$	0	1/2	1	-1
				-1	-1/2	$-1 + 2\sin^2\theta_W$	1
	quarks	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$	2/3	1/2	$1 - \frac{8}{3}\sin^2\theta_W$
				-1/3	-1/2	$-1 + \frac{4}{3}\sin^2\theta_W$	1

Les facteurs v_e et a_e sont les valeurs particulières de v_f et a_f pour l'électron.

La distribution angulaire présente une contribution supplémentaire en $\cos\theta$ produite par l'interférence entre les contributions aux amplitudes des courants vecteur et axial. Ce terme induit une différence entre le nombre d'événements produits dans les hémisphères de l'électron ($\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$) et du positon ($\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$). Cet effet est appelé l'asymétrie avant-arrière et est générée par la violation de la parité dans les interactions faibles.

Revenons à la section efficace dans la région du pic du Z. Calculons la section efficace à la résonance $E = M_Z$ en intégrant 3.19 sur θ :

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2 k^2}{3\Gamma_Z^2} (a_e^2 + v_e^2)(a_f^2 + v_f^2) \quad (3.22)$$

Remarquons que si l'on s'écarte du pic le propagateur du Z doit être écrit de façon plus complète : $1/(Q^2 - M_Z^2 + iQ^2\Gamma^2/M_Z^2)$. Ici nous avons discuté le cas où $Q^2 = M_Z^2$.

L'émission de photons réels par les électron et positon initiaux (bremsstrahlung) étale et déplace légèrement le pic. L'expression de la section efficace devrait en être corrigée. En revanche, comme la production d'une paire $\mu^+\mu^-$ subit les mêmes effets de corrections radiatives QED, cet effet s'annule dans le rapport R .

Sur le pôle de la masse du Z, on remplace le rapport des sections efficaces par le rapport des largeurs :

$$R_Z = \frac{\Gamma(Z \rightarrow \text{hadrons})}{\Gamma(Z \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \frac{\sum_{f=1}^5 a_f^2 + v_f^2}{a_\mu^2 + v_\mu^2} = 20.09 \quad (3.23)$$

où pour la valeur numérique, nous avons pris $\sin^2\theta_W = 0.2315$. La valeur expérimentale est $R_{exp} = 20.80 \pm 0.035$. La valeur théorique ici estimée est légèrement inférieure, dû à l'absence de corrections radiatives QCD (principalement l'échange de gluons supplémentaires). Une comparaison de ce rapport entre sa mesure et sa prédiction théorique permet de déduire α_S .

Remarquons que la valeur de R est ici (i.e. pic du Z) sensiblement supérieure à celles mesurées à plus basse énergie. Ceci est dû au fait que les charges faibles des quarks sont comparables à celle des muons tandis que leurs charges électriques sont inférieures (qui seront élevées au carré). Au-delà du pic du Z les contributions de l'échange de photon et du boson Z, ainsi que leur interférence, sont à prendre en compte, la valeur de R retombera donc un petit peu.

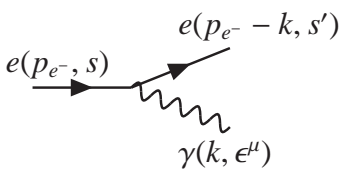
Corrections radiatives QED

La simplicité de la mesure d'une section efficace et même la simplicité de sa définition s'éloignent au fur et à mesure que l'on gagne en précision. Un des effets important est appelé *les corrections radiatives*. Il s'agit de la prise en compte d'effets dus aux ordres supérieurs (QED, QCD ou même faibles) comportant ou non des particules supplémentaires dans l'état initial et/ou final.

Chaque particule chargée pouvant émettre un ou plusieurs photons, comment traiter ces radiations ?

Radiation par l'électron et le positon incidents

L'amplitude pour laquelle la radiation d'un photon, d'impulsion k et possédant un vecteur de polarisation ϵ^μ , est émise par l'électron incident, d'impulsion p_{e^-} et de spin s , s'écrit :



$$\mathcal{M} = \dots i \frac{\not{p}_{e^-} - \not{k} + m}{(p_{e^-} - k)^2 - m^2} (-ie\gamma_\mu) u(p_{e^-}, s) \epsilon^\mu \quad (3.24)$$

$$= \dots \frac{\not{p}_{e^-} - \not{k} + m}{-2p_{e^-} \cdot k} e \not{\epsilon} u(p_{e^-}, s) \quad (3.25)$$

où l'on a utilisé la relation $(p_{e^-} - k)^2 = m^2 - 2p_{e^-} \cdot k$. Dans l'approximation des photons mous, on peut négliger k devant p_{e^-} . A l'aide de la relation générale de permutation $\not{p}\not{q} = -\not{q}\not{p} + 2p \cdot q$, on a :

$$\mathcal{M} = \dots -e \frac{\not{p}_{e^-} + m}{-2p_{e^-} \cdot k} \not{\epsilon} u(p_{e^-}, s) \quad (3.26)$$

$$= \dots \frac{-e}{2p_{e^-} \cdot k} (-\not{\epsilon} \cdot \not{p}_{e^-} + 2p_{e^-} \cdot \epsilon + m\not{\epsilon}) u(p_{e^-}, s) \quad (3.27)$$

$$= \dots \frac{-e}{2p_{e^-} \cdot k} (2p_{e^-} \cdot \epsilon - \not{\epsilon}(\not{p}_{e^-} - m)) u(p_{e^-}, s) \quad (3.28)$$

$$= \dots -e \frac{\epsilon \cdot p_{e^-}}{p_{e^-} \cdot k} u(p_{e^-}, s) \quad (3.29)$$

où on a simplifié la relation par l'usage de l'équation de Dirac $(\not{p} - m)u(p, s) = 0$ pour une particule entrante (de même on a $(\not{p} + m)v(p, s) = 0$ pour une sortante, $\bar{u}(\not{p} + m) = 0$ et $\bar{v}(\not{p} - m) = 0$ pour les antiparticules entrante et sortante).

Pour la radiation par le positon, la situation est identique mis à part l'emploi du spineur de Dirac \bar{v} au lieu du u et l'orientation $\epsilon(p - k) \rightarrow -\epsilon(p - k)$ car le vecteur de polarisation n'a que des composantes spatiales $\epsilon = (0, \vec{\epsilon})$ et donc :

$$\mathcal{M} = e \frac{\epsilon \cdot p_{e^+}}{p_{e^+} \cdot k} \bar{v}(p_{e^+}, s) \dots \quad (3.30)$$

En considérant les deux sources, la correction à l'amplitude à l'ordre le plus bas, \mathcal{M}_{born} est :

$$\mathcal{M}_{rad} = (-e) \left(\frac{\epsilon \cdot p_{e^+}}{p_{e^+} \cdot k} - \frac{\epsilon \cdot p_{e^-}}{p_{e^-} \cdot k} \right) \mathcal{M}_{born} \quad (3.31)$$

Cette factorisation est remarquable et peut s'appliquer pour un nombre l de photons

$$\mathcal{M}_{rad} = \prod_{i=1}^l \left[(-e) \left(\frac{\epsilon_i \cdot p_{e^+}}{p_{e^+} \cdot k_i} - \frac{\epsilon_i \cdot p_{e^-}}{p_{e^-} \cdot k_i} \right) \right] \mathcal{M}_{born} \quad (3.32)$$

Limitons nous à la radiation d'un seul photon par une particule chargée initiale. La section efficace s'exprime dès lors :

$$d\sigma = e^2 \left[\frac{\epsilon \cdot p_{e^+}}{p_{e^+} \cdot k} - \frac{\epsilon \cdot p_{e^-}}{p_{e^-} \cdot k} \right]^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^2 2k_0} \cdot d\sigma_{born} \quad (3.33)$$

où k_0 est la composante énergie du quadri-vecteur k . En sommant sur les états de polarisation du photon (celui-ci étant réel, il est polarisé uniquement transversalement et d'hélicité ± 1) on obtient :

$$d\sigma = e^2 \left[\frac{p_{e^+}}{p_{e^+} \cdot k} - \frac{p_{e^-}}{p_{e^-} \cdot k} \right]^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^2 k_0} \cdot d\sigma_{born} \quad (3.34)$$

Cette expression met en évidence la structure en double pôle qui correspondent à l'émission colinéaire au positon (terme $p_{e^+}/p_{e^+} \cdot k$) et à l'électron (terme $-p_{e^-}/p_{e^-} \cdot k$). Les divergences infrarouges correspondantes ($k \rightarrow 0$) sont annulées par la prise en compte de la correction de vertex (qui se factorise aussi).

Remarquons que l'effet de l'émission d'un photon par une des particules entrantes peut être vu comme une diminution de l'impulsion de cette particule et donc simplement comme une diminution de s sans autre effet. Ceci est rendu possible par la factorisation des facteurs de radiation. Cette approche est correcte même pour l'émission de photons énergétiques (ou photons durs). On pose p'_{e^-} la quadri-impulsion de l'électron après radiation :

$$p'_{e^-} = p_{e^-} - k \quad s' = 4(E_{e^-} - k)E_{e^+} \quad (3.35)$$

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow q\bar{q}\gamma} = \frac{1}{2s} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \frac{d^3p_q}{(2\pi)^2 2p_q^0} \frac{d^3p_{\bar{q}}}{(2\pi)^2 2p_{\bar{q}}^0} \frac{d^3k}{(2\pi)^2 2k^0} (2\pi)^2 \delta(p_{e^+} + p_{e^-} - p_q - p_{\bar{q}} - k) \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} &\simeq e^2 \left[\frac{p_{e^+}}{p_{e^+} \cdot k} - \frac{p_{e^-}}{p_{e^-} \cdot k} \right]^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^2 2k^0} * \frac{1}{2s'} |\overline{\mathcal{M}}_{born}|^2 \\ &\frac{d^3p_q}{(2\pi)^2 2p_q^0} \frac{d^3p_{\bar{q}}}{(2\pi)^2 2p_{\bar{q}}^0} (2\pi)^2 \delta(p_{e^+} + p'_{e^-} - p_q - p_{\bar{q}}) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Regardons de plus près le comportement (pôle) à petit angle (radiation colinéaire).

$$\left[\frac{p_{e^+}}{p_{e^+} \cdot k} - \frac{p_{e^-}}{p_{e^-} \cdot k} \right]^2 = 2 \frac{p_{e^-} \cdot p_{e^+}}{p_{e^-} \cdot k p_{e^+} \cdot k} \quad \text{et} \quad p_{e^-} \cdot k = E_b k_0 - p_{e^-}^{\vec{r}} \cdot \vec{k} = E_b k_0 [1 - \cos\theta] \quad (3.38)$$

où θ est l'angle entre l'électron p_{e^-} et le photon k . Pour des petits angles $\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$, $d\cos\theta \sim d\theta^2$ et donc :

$$d\sigma \sim \frac{d\theta^2}{\theta^2} \quad (3.39)$$

La divergence est semblable dans le cas de l'émission colinéaire au positon. L'angle minimal n'atteint pas zéro grâce à la masse non nulle de l'électron (et imposée par la conservation à la fois de l'énergie et de l'impulsion). En effet un électron d'impulsion p , émettant un photon réel d'impulsion k ne pourra rester sur sa couche de masse en l'absence d'autre interaction. L'angle de diffusion minimum vaut :

$$\theta_{min}^2 \simeq \frac{1}{z(1-z)} \frac{m_e^2}{E^2} \quad (3.40)$$

pour un photon portant une fraction d'impulsion $z = k/p$. Le dernier facteur correspond au facteur de Lorentz :

$$\theta_{min} \sim 1/\gamma \quad \text{où} \quad \gamma = E/m_e = 1/\sqrt{1-\beta^2} \gg 1 \quad (3.41)$$

Remarquons que plus la particule est massive plus l'angle minimal d'émission est grand. Ce phénomène est également observé dans QCD dans la radiation de gluons par les quarks lourds. C'est ce qu'on appelle l'effet du *dead cone* : il y a un angle mort autour de la direction du quark lourd dans lequel il n'y a pas de radiation (le calcul ne peut plus se faire dans l'approximation hyper relativiste que nous avons utilisée, mais $p \cdot k = E_b k_0 (1 - \beta \cos\theta)$).

Si l'on ne néglige plus k devant p , l'expression de la section efficace s'écrit :

$$d\sigma = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dz}{z} \left(1 + (1-z)^2 \right) \ln\left(\frac{E_b^2}{m_e^2}\right) \cdot d\sigma_{born} \quad (3.42)$$

On l'appelle l'approximation colinéaire, "peaking approximation", ou encore approximation du logarithme dominant car on a seulement gardé le terme : $\ln(E_b^2/m_e^2)$ qui provient de la limite supérieure de l'intégration sur l'angle. Cette approximation est valable tant que l'angle polaire d'émission du photon reste petit : $\theta \ll m_e/E_b$ pour rester dans la limite hyper relativiste et parce que nous avons séparé artificiellement la radiation de l'électron et du positon. Tant que le recouvrement de l'espace des phases reste faible, l'approximation est correcte mais pour des grands angles l'interférence devient importante. La situation est similaire aux franges d'interférence dans l'expérience des fentes de Young : plus la distance entre les deux fentes est grande plus les franges d'interférence sont faibles.

Effet sur le pic du Z

Ces corrections radiatives entraînent deux effets :

i) un déplacement de la valeur du pic du Z (correspondant à l'intégration sur une somme infinie de photons mous et virtuels) ;

ii) un changement de la cinématique. Ce dernier point entraîne ce qui est appelé le "radiative return" du pic du Z observé auprès du collisionneur LEP II. Le LEP II fonctionnait à des énergies \sqrt{s} supérieures à la masse du Z mais le pic du Z apparaissait quand même dû aux émissions de photons durs par l'état initial. La section efficace à la masse du Z étant jusqu'à 1000 fois supérieure, ces émissions étaient grandement favorisées par le pôle de la section efficace Born.

De façon plus générale, à chaque s correspondant à l'énergie rendue disponible par les faisceaux,

$$\sigma(s) = \int_0^s ds' \sigma(s') R(s, s') \quad (3.43)$$

où $R(s, s')$ est la probabilité d'avoir une émission d'un ou plusieurs photons faisant passer l'énergie de s à s' . Cet effet est illustré à la figure 3.8 où les migrations des $s' < s$ peuplent les régions à plus grand s si la section efficace born y est inférieure.

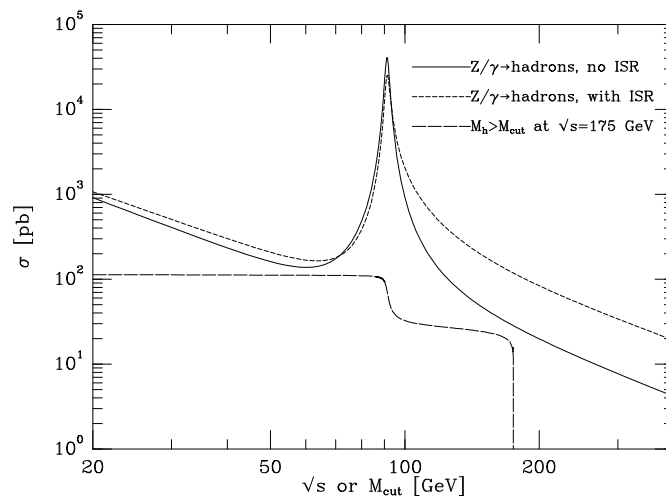


FIGURE 3.8 – Prédiction des sections efficaces totales, avec et sans corrections radiatives QED dans l'état initial (ISR) dans la région d'énergie proche du pic du Z. \sqrt{s} représente l'énergie dans le centre de masse des faisceaux avant radiation.

En général il est possible de diminuer l'effet de ces corrections radiatives en rejetant les événements pour lesquels soit les photons émis sont détectés soit en imposant que la masse invariante totale reconstruite M_h soit proche de l'énergie a priori disponible. Ainsi à la figure 3.8, pour une énergie de $\sqrt{s} = 175$ GeV on mesure la section efficace à laquelle contribuent tous les événements produits à un M_h tels que $M_h > M_{cut}$.

L'usage de ces radiations fut et est encore exploité jusqu'à en devenir une méthode à part entière, pour la mesure de certaines résonances étroites aux expériences KLOE, BaBar et Belle (des "meson factories") sans devoir modifier l'énergie des faisceaux et également pour des mesures de facteurs de formes et de fonction de structure dans les régimes cinématiques hors de l'acceptance (en l'absence de radiations) du détecteur.

Et le futur

Des collisionneurs e^+e^- futurs (projets ILC et CLIC) devraient permettre d'augmenter encore l'énergie du centre de masse, ouvrant alors de nouveaux canaux de production de paire de fermions ou de bosons comme illustré sur la figure ci-dessous.

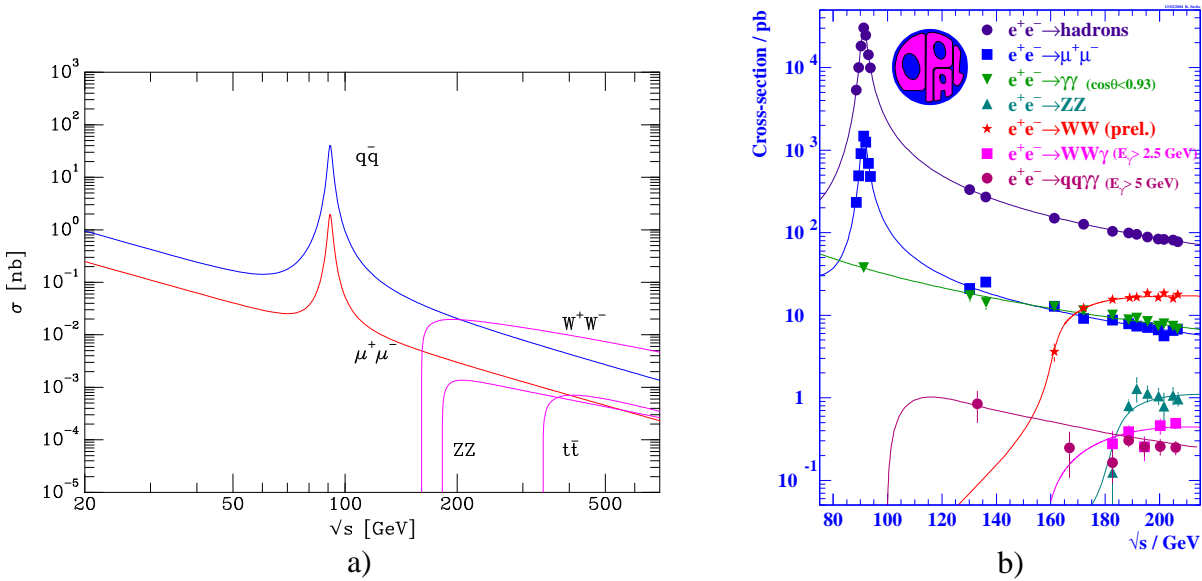


FIGURE 3.9 – a) Prédiction de différentes sections efficaces en fonction de l'énergie disponible dans le centre de masse. b) Mesures de différentes sections efficaces de la Collaboration OPAL auprès du LEP.

3.5 Production de particules

On étudie les taux relatifs de production de particules de façon inclusive et séparément pour les hadrons chargés identifiés (π^\pm , K^\pm , p) ou se désintégrant en particules chargées (K^0 , ϕ , Λ) en fonction de leur fraction d'impulsion :

$$x_p = p/E_{\text{beam}} = 2p/\sqrt{s} \quad \text{ou} \quad \xi_p = \log(1/x_p) \quad (3.44)$$

où p est l'impulsion de la particule. Le facteur 2 dans la définition de x_p provient du fait que l'énergie disponible est partagée au moins entre deux particules (conservation de P_z).

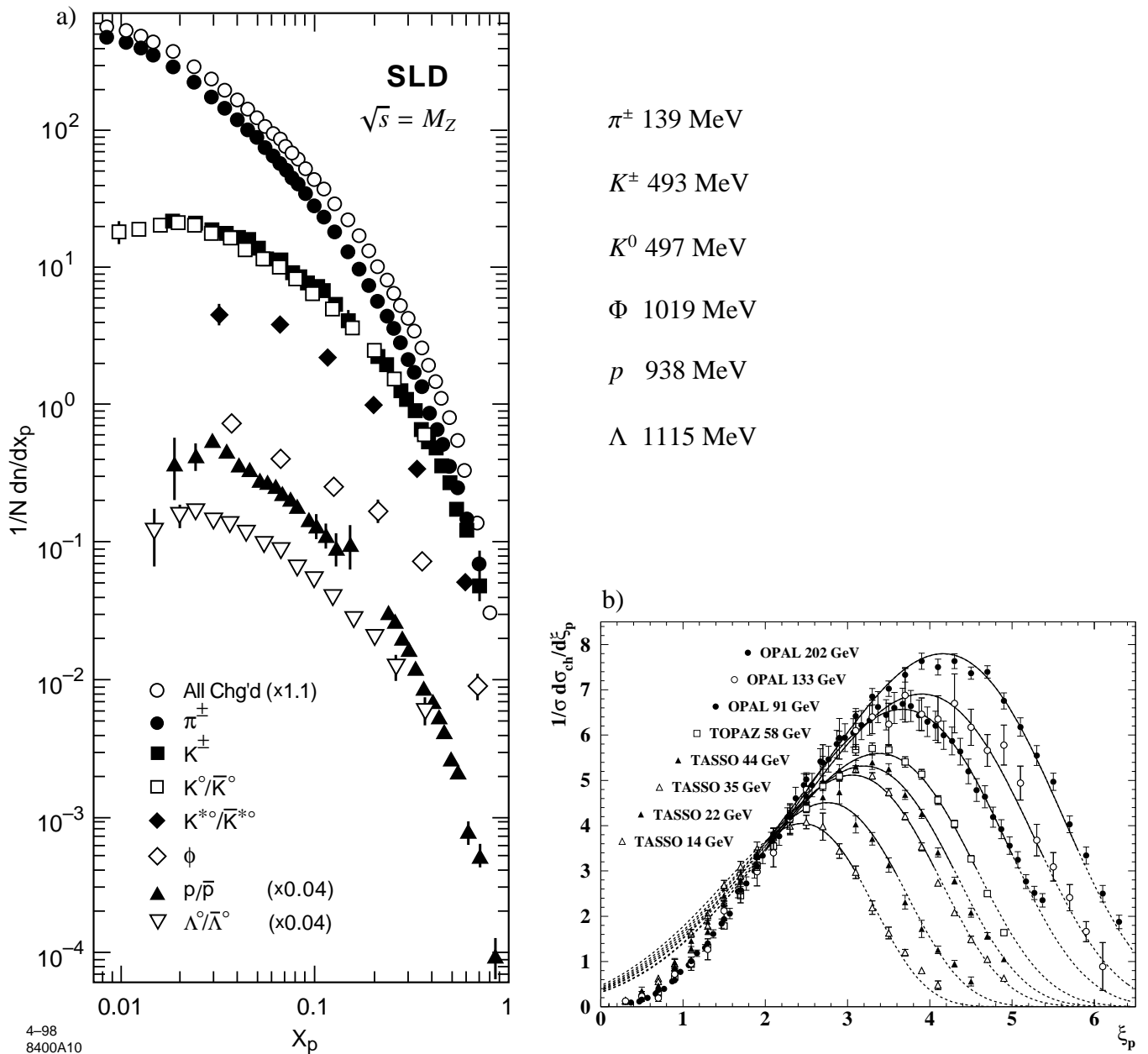


FIGURE 3.10 – a) Spectre en x_p mesuré par SLD au pic du Z. Les taux des baryons p , \bar{p} , Λ et $\bar{\Lambda}$ ont été réduits d'un facteur 25 pour des raisons de lisibilité. b) Spectre en $\xi_p = \log(1/x_p)$ mesuré par TASSO (PETRA - DESY), TOPAZ (TRISTAN - KEK) et OPAL (LEP I et II - CERN). Les courbes montrent un ajustement de la prédiction Next-to-the Leading Log Approximation (NLLA) de QCD.

Les spectres de production de hadrons ont une forme similaire mais le taux de production dépend fortement de la masse de la particule comme illustré à la figure 3.10 de gauche.

En prenant le logarithme de l'inverse de x_p on se focalise sur le mécanisme de production de particules aux petites valeurs de x_p correspondant aux grandes valeurs de ξ_p . La figure 3.10 de droite présente ces spectres pour différentes énergies. Les distributions en ξ_p tombent aux petites valeurs (grands x_p) pour des raisons cinématiques et de façon indépendante de l'énergie du centre de masse. La chute aux grandes va-

leurs de ξ_p (petits x_p) est due au fait que les gluons ont de moins en moins d'énergie et finissent par ne plus créer de paire $q\bar{q}$. Ceci permet d'expliquer pourquoi le pic de la distribution se déplace avec l'énergie puisque ξ_p est une grandeur relative et que le seuil de production d'une paire $q\bar{q}$ est une valeur absolue en énergie.

La forme de ces courbes est bien décrite par les prédictions QCD (ici NLLA) mais leur normalisation doit être fournie par les mesures expérimentales.

3.6 Les fonctions de fragmentation

Jusqu'ici nous n'avons pas vu comment les quarks se recombinaient en hadrons, nous avons pu utiliser le fait que la probabilité que les quarks donnent des hadrons est de 1. Si l'on s'intéresse à la production d'un certain hadron h :

$$e^+e^- \rightarrow hX$$

à la différence du cas inclusif $e^+e^- \rightarrow X$, on écrit la section efficace correspondante comme :

$$\frac{d\sigma}{dz}(e^+e^- \rightarrow hX) = \sum_q \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) [D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z)] \quad (3.45)$$

où la somme porte sur toutes les saveurs de quarks. Cette expression correspond à une suite de deux séquences temporelles :

- i) une paire $q\bar{q}$ est créée ;
- ii) la fragmentation d'un ou des deux quarks en hadron h qui lui est détectable.

Les fonctions de fragmentation $D_q^h(z)$ représentent la probabilité qu'un hadron h soit trouvé dans les débris d'un quark q (ou anti-quark \bar{q}) portant une fraction z de son énergie. La fraction z est définie par

$$z = \frac{E_h}{E_q} = \frac{2E_h}{\sqrt{s}} \quad (3.46)$$

Elles ne prennent du sens que dans les productions multiples de hadrons (i.e. loin des la région des résonances).

La conservation des probabilités implique des règles de somme sur les fonctions de fragmentation.

- i) Tout quark doit finir dans un hadron :

$$\sum_h \int_{z_{min}}^1 D_q^h(z) dz = 1 \quad (3.47)$$

$$(3.48)$$

Le seuil en énergie $z_{min} = 2M_h / \sqrt{s}$.

- ii) Un hadron h provient toujours de quarks et d'anti-quarks :

$$\sum_q \int_{z_{min}}^1 [D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z)] dz = n_h \quad (3.49)$$

où n_h est la multiplicité moyenne du hadron h dans les jets formés par q et \bar{q} .

- iii) L'intégrale sur l'impulsion du quark et de l'anti-quark doit se retrouver intégralement dans la somme

des hadrons :

$$\sum_h \int_{z_{min}}^1 z [D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z)] dz = 1 \quad (3.50)$$

$$(3.51)$$

De façon à se rendre indépendant de s , on divise souvent par la section efficace totale :

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dz}(e^+e^- \rightarrow hX) = \frac{\sum_q e_q^2 [D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z)]}{\sum_q e_q^2} \quad (3.52)$$

comme cela est fait à la figure 3.10.

Comme exemple illustratif, la fragmentation des quarks b en hadrons B , c'est-à-dire contenant une saveur b , est montrée à la figure 3.11. Cette mesure provient de l'expérience SLD au SLAC (e^+e^-) faite à $\sqrt{s} \simeq M_Z$. Le fait de prendre comme variable $z = 2E_B/\sqrt{s}$ (notée x_B sur la figure 3.11) permet de prendre en compte l'énergie de la particule en question en non plus son impulsion comme pour x_p , dû à la masse importante des hadrons B .

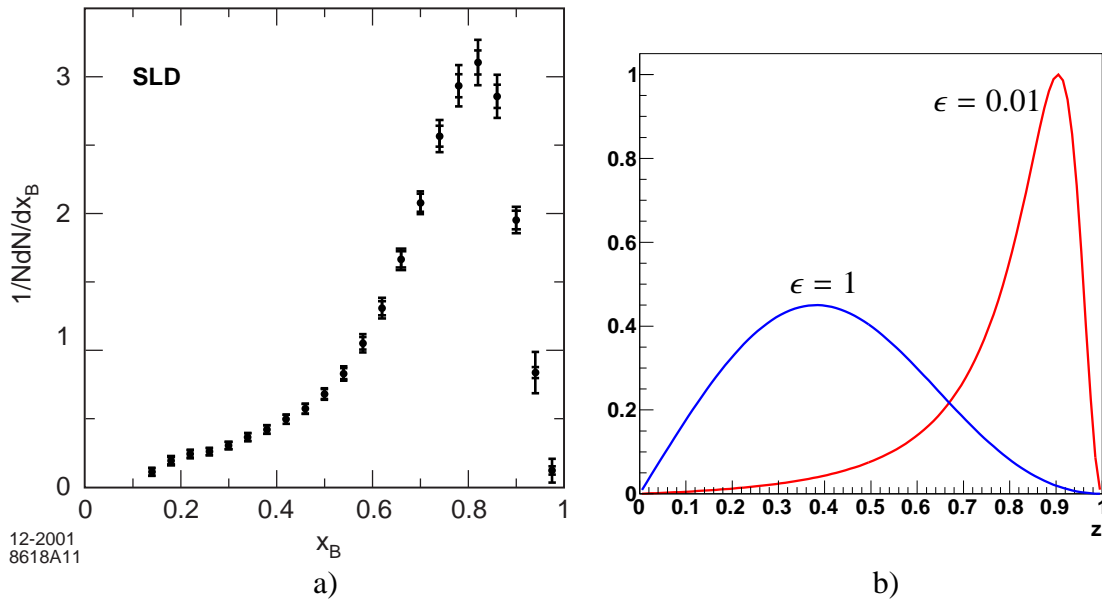


FIGURE 3.11 – a) Spectre relatif de fragmentation de quarks b en hadrons B en fonction de x_B mesuré par la Collaboration SLD. b) Spectre relatif de fragmentation de Peterson pour des valeurs de $\epsilon = 1$ (bleu - quark léger) et $\epsilon = 0.01$ (rouge - quark lourd)

Différents modèles tentent de décrire la dépendance en z des fonctions de fragmentation. La plus connue fut proposée par Peterson et al. [8] en 1983. L'idée de départ repose sur la cinématique : quand un quark lourd, Q , se combine avec un quark léger, q , pour former un hadron, l'impulsion du quark lourd est à peine modifiée. La forme suivante est proposée :

$$D_Q^h(z) = N(\epsilon) \frac{1}{z(1 - \frac{1}{z} - \frac{\epsilon}{1-z})^2} \quad (3.53)$$

Au départ dans le modèle, le paramètre $\varepsilon = m_q^2/m_Q^2$, en pratique ε est laissé comme paramètre libre car m_q^2 représente l'échelle non perturbative à considérer et non pas purement la masse du quark léger. Le facteur $N(\varepsilon)$ fixe la normalisation. Les comportements aux limites valent :

$$z \rightarrow 1 \quad D_Q^h(z) \rightarrow N(\varepsilon) \frac{(1-z)^2}{\varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad (3.54)$$

$$z \rightarrow 0 \quad D_Q^h(z) \rightarrow N(\varepsilon)z \rightarrow 0 \quad (3.55)$$

Le terme $\varepsilon/(1-z)$ fixe le pic de la distribution qui tend vers 1 pour $\varepsilon \rightarrow 0$ et tend vers 1/2 pour $m_q \simeq m_Q$.

Les programmes de simulation qui décrivent l'état final hadronique utilisent de telles paramétrisations tout en laissant certains paramètres ajustables.

3.7 Production de quarks lourds

Jusqu'ici nous avons considéré que les quarks étaient de masse nulle. Pour les énergies du LEP et du SLC c'est une approximation raisonnable pour les u, d, s et c . En revanche les masses des quarks b et t doivent être prises en considération.

Considérons l'ordre le plus bas : $e^+e^- \rightarrow Q\bar{Q}$, où Q désigne un quark lourd. L'effet de la masse joue à deux niveaux : l'élément de matrice et l'espace de phase d'intégration. La conservation de l'énergie impose que la section efficace s'annule pour tout $\sqrt{s} < 2m$. Utilisons la vitesse

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \quad (3.56)$$

de façon à retrouver l'approximation des quarks légers dans la limite $\beta \rightarrow 1$.

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow Q\bar{Q})}{d\Omega} = N_c \frac{\alpha^2}{4s} \beta \left[1 + \cos^2 \theta + (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \right] Q_i^2 \quad (3.57)$$

Le terme $(1 - \beta^2) \sin^2 \theta$ qui disparaît dans la limite relativiste correspond aux diffusions inversant l'hélicité, ce qui n'est possible qu'en présence de masse.

On trouve également que :

$$R = N_c Q_Q^2 \beta \frac{3 - \beta^2}{2} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} R_Z &= N_c \frac{\beta}{a_\mu^2 + v_\mu^2} (\beta^2 a_Q^2 + \frac{3 - \beta^2}{2} v_Q^2) \\ &\equiv R_{ZA}(\beta) + R_{ZV}(\beta) \end{aligned} \quad (3.59)$$

La dépendance en la masse est différente pour les parties vectorielle et axiale du couplage, car l'invariance de chiralité est brisée. De même, les coefficients relatifs à la correction de l'ordre supérieur seront différents pour chaque couplage.

$$R = R_{ZV} \left(1 + c_1 \frac{\alpha_S}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_S^2) \right) \quad (3.60)$$

$$+ R_{ZA} \left(1 + d_1 \frac{\alpha_S}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_S^2) \right) \quad (3.61)$$

3.8 Section efficace $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$

En négligeant les masses, l'élément de matrice élevé au carré de section efficace du processus

$$e^+(p_{e^+}) + e^-(p_{e^-}) \rightarrow \gamma^*(q) \rightarrow q(p_q) + \bar{q}(p_{\bar{q}}) + g(p_g). \quad (3.62)$$

à l'ordre le plus bas est donné par :

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 8C_F(4\pi)^3\alpha^2\alpha_S N_c Q_i^2 \frac{(p_{e^+} \cdot p_q)^2 + (p_{e^+} \cdot p_{\bar{q}})^2 + (p_{e^-} \cdot p_q)^2 + (p_{e^-} \cdot p_{\bar{q}})^2}{(p_{e^+} \cdot p_{e^-})(p_q \cdot p_g)(p_{\bar{q}} \cdot p_g)} \quad (3.63)$$

Nous n'allons pas dériver cette relation mais on peut intuitivement la rapprocher de l'équation (3.6) pour laquelle il n'y a pas de radiation de gluon.

Dans le cas $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$, on peut réécrire le dénominateur de l'équation (3.6) comme :

$$s^2 = (p_{e^+} + p_{e^-})^2(p_q + p_{\bar{q}})^2 = 4(p_{e^+} \cdot p_{e^-})(p_q \cdot p_{\bar{q}}) \quad (3.64)$$

qui est maintenant modifié en une expression contenant deux pôles, correspondant aux radiations colinéaires du gluon avec un des deux quarks. D'autre part on peut réécrire :

$$(p_{e^+} \cdot p_q)^2 + (p_{e^-} \cdot p_{\bar{q}})^2 = \frac{1}{2}\{(p_{e^+} \cdot p_q)^2 + (p_{e^+} \cdot p_{\bar{q}})^2 + (p_{e^-} \cdot p_q)^2 + (p_{e^-} \cdot p_{\bar{q}})^2\} \quad (3.65)$$

On remarque que le terme de droite est symétrique pour la permutation du quark et de l'anti-quark, $(p_{e^+} \cdot p_{\bar{q}})^2 + (p_{e^-} \cdot p_q)^2$ sera donc donné par la même expression. On retrouve donc bien l'égalité des termes cinématiques des numérateurs des relations (3.6) et (3.63). Enfin, la radiation du gluon a entraîné les facteurs α_S et $C_F = \frac{N^2-1}{2N} = 4/3$ rend compte des différentes combinaisons de couleurs que le gluon émis peut porter.

En intégrant sur les trois angles indépendants, on obtient :

$$\frac{d^2\sigma_{q\bar{q}g}}{dx_q dx_{\bar{q}}} = \sigma_{q\bar{q}} C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})}, \quad (3.66)$$

où $\sigma_{q\bar{q}}$ est donné par l'équation 3.8. Les variables scalaires x_i , dans le système du centre de masse, correspondent aux fractions d'énergies :

$$x_q = \frac{E_q}{E_b}, \quad x_{\bar{q}} = \frac{E_{\bar{q}}}{E_b}, \quad x_g = \frac{E_g}{E_b}, \quad (3.67)$$

où E_b est l'énergie du faisceau ($s = q^2 = (2E_b)^2$). Remarquons que cette définition n'est pas invariante de Lorentz, il vaut mieux définir :

$$x_i = \frac{2q \cdot p_i}{q^2} \quad (3.68)$$

où q est le 4-vecteur du boson échangé.

La conservation de l'énergie et de l'impulsion imposent :

$$\begin{aligned} x_q + x_{\bar{q}} + x_g &= 2 \\ 1 - x_i &= \frac{1}{2}x_j x_k (1 - \cos \theta_{jk}), \quad i \neq j \neq k, \quad i \neq k. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Les bornes sont donc :

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (3.70)$$

et

$$x_i + x_j \geq 1, \quad i \neq j \quad (3.71)$$

Cela signifie que un parton a une énergie au maximum égale à celle du faisceau ($x_i = 1$), et dans ce cas les deux autres partons sont colinéaires ($\theta_{jk} = 0$). L'impulsion de l'état initial étant nulle dans le plan transverse (par définition), l'état final tient dans un plan :

$$\theta_{q\bar{q}} + \theta_{\bar{q}g} + \theta_{qg} = 2\pi \quad (3.72)$$

Remarquons que la section efficace 3.66 est symétrique sous l'échange de x_q par $x_{\bar{q}}$ ce qui est imposé par la symétrie CP de QCD.

Le domaine d'intégration de 3.66 est donc :

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_q, x_{\bar{q}} \leq 1 \\ 1 &\leq x_q + x_{\bar{q}} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Singularités

Cette équation présente des singularités quand un quark atteint son énergie maximum :

$$x_i \rightarrow 1^- \quad i = q, \bar{q} \quad (3.74)$$

et un double pôle quand les deux quarks atteignent simultanément cette limite :

$$x_q \rightarrow 1^- \quad \iff \quad (p_{\bar{q}} + p_g)^2 = 2(p_{\bar{q}} \cdot p_g) \rightarrow 0; \quad (3.75)$$

$$x_{\bar{q}} \rightarrow 1^- \quad \iff \quad (p_q + p_g)^2 = 2(p_q \cdot p_g) \rightarrow 0. \quad (3.76)$$

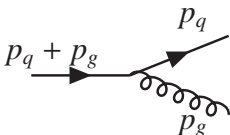
Nous nous trouvons face à deux singularités dites *infrarouges* :

1. **Gluon colinéaire** : le gluon est colinéaire soit au quark soit à l'antiquark. Cette singularité est aussi appelée *singularité de masse* car elle serait absente si nous pouvions tenir compte de la masse soit du gluon soit du quark.
2. **Gluon soft** : $p_3 \rightarrow 0$, c'est-à-dire lorsque l'énergie du gluon tend vers zéro.

Elles apparaissent facilement dans la réécriture :

$$\frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})} = \frac{2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})} - \frac{1+x_q}{1-x_{\bar{q}}} - \frac{1+x_{\bar{q}}}{1-x_q}. \quad (3.77)$$

L'origine de ces singularités est dans les propagateurs des quarks :



$$\begin{aligned} \frac{1}{(p_q + p_g)^2} &= \frac{1}{2E_q E_g (1 - \cos \theta_{qg})} = \frac{1}{s} \frac{1}{1 - x_{\bar{q}}} \\ \frac{1}{(p_{\bar{q}} + p_g)^2} &= \frac{1}{2E_{\bar{q}} E_g (1 - \cos \theta_{\bar{q}g})} = \frac{1}{s} \frac{1}{1 - x_q} \end{aligned}$$

i) cas $E_g \rightarrow 0, \theta_{qg} \neq 0, \theta_{\bar{q}g} \neq 0$

Dans ce premier cas, les singularités sont associées à des pôles simples. La contribution infrarouge à la section efficace totale est donnée par :

$$\delta\sigma \sim \alpha_S \int \frac{dx_q dx_{\bar{q}}}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})} \sim \alpha_S \int \frac{dx_q dx_{\bar{q}}}{x_g^2 (1 - \cos\theta_{qg})(1 - \cos\theta_{\bar{q}g})} \quad (3.78)$$

En introduisant les variables :

$$\epsilon = x_g \quad \text{et} \quad u = \cos\theta_{qg} \quad (3.79)$$

telles que $x_q \simeq 1 - \epsilon(1+u)/2$, $x_{\bar{q}} \simeq 1 - \epsilon(1-u)/2$, nous avons :

$$\delta\sigma \sim \alpha_S \int \frac{d\epsilon}{\epsilon} \frac{du}{1-u^2} \quad (3.80)$$

Remarquons que le terme en ϵ (c'est à dire en x_g^2) ne signifie pas un double pôle car le gluon est soit colinéaire au quark soit à l'antiquark. Ce changement de variables montre bien qu'il s'agit de pôles simples car $u \neq \pm 1$.

ii) cas $E_g \rightarrow 0$ et $\theta_{qg} \rightarrow 0$, ou $\theta_{\bar{q}g} \rightarrow 0$

L'équation 3.80 reste valable, mais dans ce cas : $\epsilon \rightarrow 0$ et $u \rightarrow \pm 1$ ce qui produit un double pôle (en prenant $u \simeq 1 - \theta^2/2$) :

$$\delta\sigma \sim \alpha_S \int \frac{d\epsilon}{\epsilon} \int \frac{d\theta}{\theta} \quad (3.81)$$

Ces divergences sont évitées si les conditions limites ne sont pas rencontrées. C'est ce qui arrive naturellement dans les mesures expérimentales car si une activité hadronique provient d'un gluon de trop basse énergie et/ou émis de façon colinéaire à un quark, elle ne sera pas détectée. Les résolutions angulaire, $\Delta\theta > 0$ et en énergies $\Delta E > 0$ sont de valeurs finies. En dessous d'un certain seuil, l'état $|q\bar{q}g\rangle$ théorique sera englobé dans l'état $|q\bar{q}\rangle_{phys}$ physique.

Les distributions expérimentales des événements 3 jets au SLAC sont montrées à la figure 3.12. Les jets sont classés par ordre d'énergie décroissant. L'angle de Ellis-Karliner :

$$\cos\theta_{EK} = \frac{x_2 - x_3}{x_1} \quad (3.82)$$

représente l'angle entre les jets 1 et 2 dans le référentiel au repos du système constitué des jets 2 et 3. Cette variable permet de mettre en évidence le caractère vectoriel dans l'émission de gluons.

La conservation de l'énergie $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ impose que :

i) $x_1 > 2/3$ et $x_2 > 1/2$ sinon le jet serait identifié à un autre groupe ;

ii) $x_1 = 1 \Rightarrow x_3 < 0.5$, or $x_1 < 1$ et donc x_3 peut dépasser $1/2$.

iii) La bosse juste avant $x_3 = 1/2$ provient de la somme de la distribution décroissante des gluons pour $x_g \leq 1/2$ et de la distribution croissante du quark ou anti-quark pour lequel $x_q, x_{\bar{q}} \leq 1/2$.

3.8.1 Approximation colinéaire

Commençons par réexprimer la section efficace $q\bar{q}g$ en fonction des variables attachées au gluon plutôt qu'aux quarks, en remplaçant

$$z = x_g \quad t = 1 - \cos(\theta_{qg}) \quad (3.83)$$

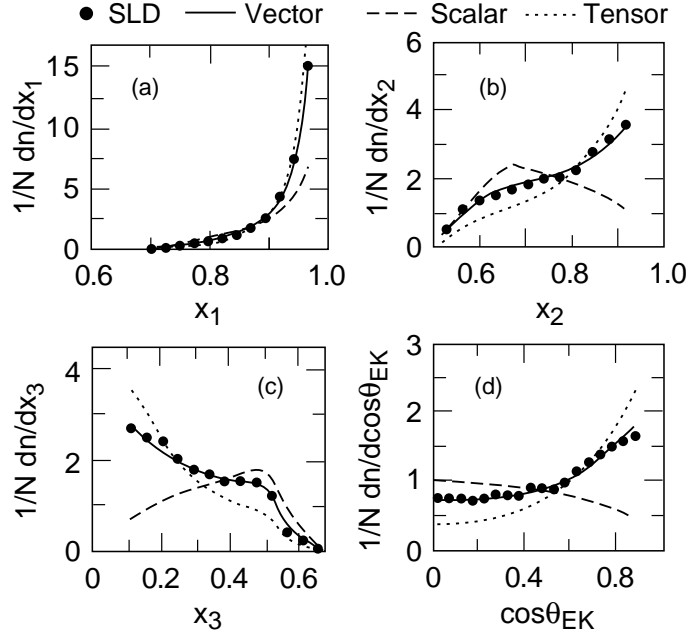


FIGURE 3.12 – Distributions expérimentales des événements à 3 jets mesurées par l'expérience SLD [15] et comparées aux prédictions des modèles scalaire, vectoriel et tensoriel, à l'ordre dominant.

En utilisant $2(1 - x_{\bar{q}}) = x_q x_g (1 - \cos(\theta_{qg}))$, on trouve :

$$x_q = \frac{2(1-z)}{2-zt} \quad x_{\bar{q}} = \frac{2-z(2-z)t}{2-zt} \quad dx_q dx_{\bar{q}} = \frac{z(2-z)}{(2-zt)^2} dz dt, \quad (3.84)$$

la section efficace 3.66 peut être réécrite comme :

$$\frac{d^2 \sigma_{q\bar{q}g}}{dz dt} = \sigma_{q\bar{q}} C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{4[1 + (1-z)^2] - 4z(2-z)t + z^2(2-z)^2 t^2}{z t (2-t)(2-zt)^2} \quad (3.85)$$

où $\sigma_{q\bar{q}}$ est donné par l'équation 3.8.

Dans la limite colinéaire $t \simeq \theta^2/2$ et

$$d^2 \sigma = \sigma_{q\bar{q}} C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} [1 + (1-z)^2] \frac{dz}{z} \frac{d\theta^2}{\theta^2} \quad (3.86)$$

qui est à rapprocher de l'équation obtenue pour la radiation colinéaire d'un photon par les électron et positon des faisceaux (bien que intégrées sur l'angle). Le terme $[1 + (1-z)^2]/z$ est appelé facteur de splitting P_{gq} , nous le retrouverons au chapitre suivant dans les interactions profondément inélastiques. Il correspond, une fois multiplié par $N_C \frac{C_F \alpha_s}{2\pi}$, à la probabilité pour un quark de se séparer en un quark (portant une fraction d'impulsion z) et un gluon (de fraction d'impulsion $1-z$).

En prenant le problème en sens inverse, considérons maintenant la section efficace $ee \rightarrow q\bar{q}$ intégrée dans la région correspondant à l'émission d'un gluon indétectable mais également comprenant les corrections virtuelles à l'ordre α_s . La question pertinente, devant se rattacher à une observable, est : comment se comporte la section efficace "totale" de ce que l'on cherche à mesurer.

3.9 Corrections radiatives QCD virtuelles

Les corrections radiatives virtuelles au premier ordre en α_S sont illustrées à la figure 3.13. Les divergences infrarouges qui sont apparues vont être annulées lorsque l'on prend la somme des amplitudes $ee \rightarrow q\bar{q}$ et $ee \rightarrow q\bar{q}g$.

Il existe différentes procédures de renormalisation. Le principe est toujours le même, on introduit un régulateur qui rend les intégrales finies, ensemble pour les corrections réelles et virtuelles. On fait ensuite tendre le régulateur vers zéro pour obtenir un résultat fini. Certaines méthodes proposent de donner une masse aux gluons, d'autres de mettre les quarks hors de leur couche de masse. La méthode souvent considérée comme la plus élégante est la régularisation dimensionnelle. On introduit un nombre de dimensions spacio-temporelles $n > 4$. Cela affecte l'espace des phases de l'intégration de l'élément de matrice.

Nous pouvons réécrire la section efficace $ee \rightarrow q\bar{q}g$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g) &= \sigma_0 \frac{C_F \alpha_S}{2\pi} H(\epsilon) \int dx_q dx_{\bar{q}} \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2 - \epsilon(2 - x_q - x_{\bar{q}})}{(1 - x_q)^{1+\epsilon} (1 - x_{\bar{q}})^{1+\epsilon}} \\ &= \sigma_0 \frac{C_F \alpha_S}{2\pi} H(\epsilon) \left[\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + \frac{19}{2} + O(\epsilon) \right] \end{aligned} \quad (3.87)$$

où $H(\epsilon)$ est l'opérateur de Casimir dans la représentation fondamentale $n = 4 - 2\epsilon$ dans une approche de régularisation dimensionnelle ($n > 4$) et

$$H(\epsilon) = \frac{3(1 - \epsilon)^2}{(3 - 2\epsilon)\Gamma(2 - 2\epsilon)} = 1 + O(\epsilon) \quad (3.88)$$

Où Γ est la fonction habituelle $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ pour des z réels et positifs.

Les singularités infrarouges que nous avons vues apparaissent dans des pôles en ϵ . Le pôle double (resp. simple) correspond au cas de figure des singularités colinéaires et (resp. ou) soft.

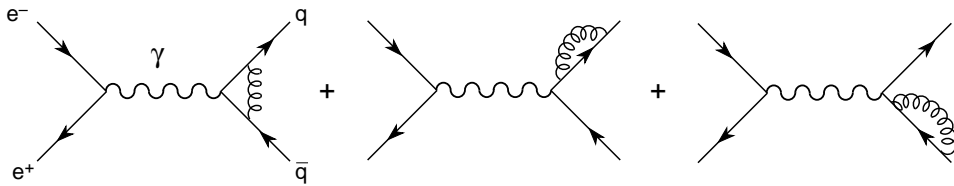


FIGURE 3.13 – corrections gluoniques à une boucle

Les corrections virtuelles (diagrammes avec un gluon réabsorbé de la figure 3.13) font apparaître des divergences ultra-violettes :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = \sigma_0 \frac{C_F \alpha_S}{2\pi} H(\epsilon) \left[-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 + O(\epsilon) \right]. \quad (3.89)$$

Les simple et double pôles s'annulent donc parfaitement dans la somme à cet ordre. On peut écrire les corrections apportées à l'ordre non nul le plus bas (*tree level*) comme :

$$R = K_{QCD} 3 \sum_q Q_q^2 = 3 \sum_q Q_q^2 \left(1 + \frac{\alpha_S}{\pi} + O(\alpha_S^2) \right) \quad (3.90)$$

Remarquons que la correction du premier ordre est positive, elle serait négative si le gluon était scalaire. L'annulation des divergences n'est pas accidentelle, un théorème général montre que cela se passe pour tout objet "non physique", un quark nu ou un électron nu n'étant pas des objets physiques, la section efficace $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ sans émission de gluon ne l'est donc pas. Le résultat obtenu dépend a priori de l'échelle de renormalisation μ dont la valeur de α_S dépend. La divergence ayant disparu, le premier terme de correction est indépendant de l'échelle de renormalisation. Le terme $\mathcal{O}(\alpha_S^2)$ et les suivants, eux, en dépendent car de nouvelles divergences ultraviolettes apparaissent associées à la renormalisation du couplage. Les coefficients dépendent donc du schéma de renormalisation.

La prise en compte des ordres supérieurs ($\alpha_S^2, \alpha_S^3, \dots$) fait intervenir les processus $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}, q\bar{q}g, q\bar{q}gg, \dots$ et fait apparaître de nouvelles divergences ultraviolettes. On peut développer l'expression en une série :

$$K_{QCD} = 1 + \frac{\alpha_S}{\pi} + \sum_{n \geq 2} C_n \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \left(\frac{\alpha_S(\mu^2)}{\pi} \right)^n \quad (3.91)$$

La figure 3.14 montre les résultats des calculs faits jusqu'au troisième terme correctif. On constate que la dépendance en l'échelle de renormalisation diminue à chaque prise en compte d'un ordre supérieur. De façon générale on peut dire qu'un changement d'échelle dans une quantité physique qui a été calculée à l'ordre $\mathcal{O}(\alpha_S^n)$ induit des changements dans $\mathcal{O}(\alpha_S^{n+1})$.

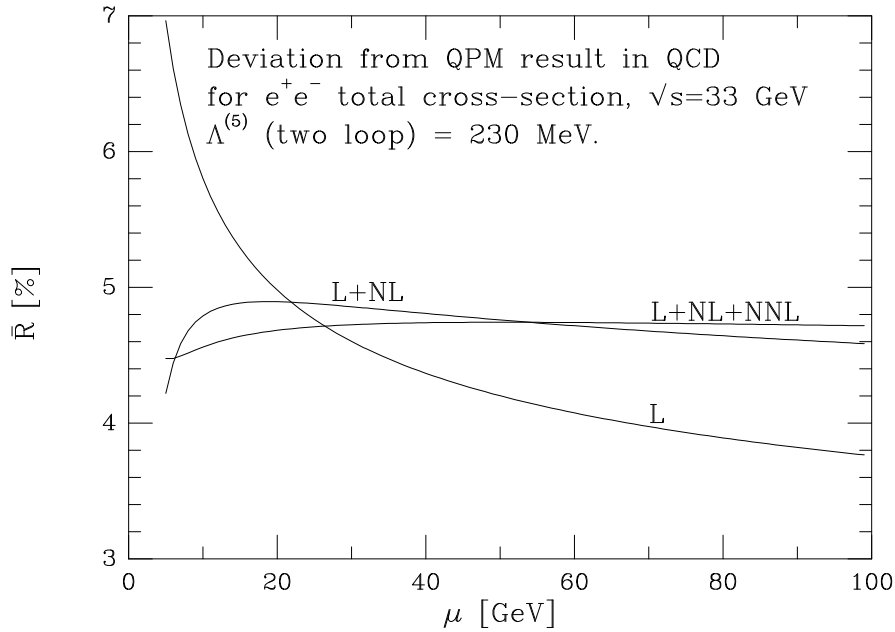


FIGURE 3.14 – Correction au rapport R à différents ordres en α_S

En l'absence de corrections d'ordre supérieur, on peut tenter de deviner le meilleur choix d'échelle, c'est-à-dire l'échelle qui rendra le calcul tronqué égal à la somme de tous les ordres. Différents choix sont proposés :

- **Fast Apparent Congergence (FAC)** tel que

$$R^{(1)}(\mu_{FAC}) = R^{(n)}(\mu_{FAC}) .$$

- **Principle of minimum sensitivity (PMS)** demande que pour tout n pour lequel le calcul est fait :

$$\mu \frac{d}{d\mu} R^{(n)}(\mu)|_{\mu_{PMS}} = 0$$

Suivant les différentes méthodes, on obtient que l'échelle de renormalisation vaut entre 0.5 et 0.7 fois \sqrt{s} pour le calcul de R .

3.10 Algorithmes de reconstruction de jets

Dans les algorithmes de reconstruction de jets, on tente de regrouper les particules de l'état final de façon à ce que la structure clairement visible expérimentalement soit reproduite. Il existe différents algorithmes présentant divers avantages et inconvénients que nous ne discuterons pas ici (sensibilités aux modèles de hadronisation, incertitudes théoriques,...). Les plus connus sont les algorithmes de JADE, de Cone, de Durham, de kt ,... L'algorithme de JADE présenté ci-dessous présente plusieurs avantages dont celui de ne souffrir de correction hadronique que de 5% à $\sqrt{s} = m_{Z^0}$

3.10.1 Algorithme de JADE

La définition d'un événement à N jets suivant l'algorithme de JADE [9] est la suivante : soit le quadri-vecteur énergie-impulsion p_i d'une particule i , calculons la masse invariante :

$$M_{ij}^2 = (p_i + p_j)^2, \quad i \neq j \quad (3.92)$$

Si la masse invariante de la paire de particule ij est inférieure à un seuil donné $y_{cut} s$

$$M_{ij}^2 < y_{cut} s, \quad (3.93)$$

les particules i et j sont combinées pour former une "nouvelle particule" (pseudo-particule) d'impulsion $p_{ij} = p_i + p_j$. Cette procédure itérative est appliquée en traitant les pseudo-particules comme des particules. La procédure s'arrête quand toutes les paires de particules ont une masse invariante supérieure au seuil. Les (pseudo) particules résultantes sont identifiées à des jets et leur nombre est la *multiplicité de jets* n . En d'autres termes, y_{cut} fixe la valeur à laquelle un événement particulier passe de l'état de n -jet à celui de $n + 1$ -jet.

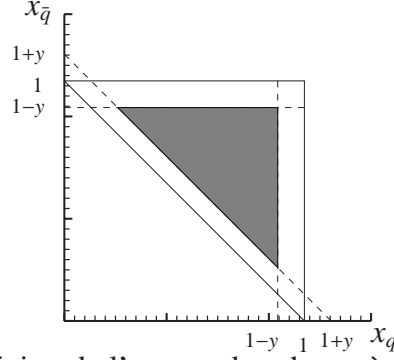
Le point fort de cet algorithme est que les corrections d'hadronisation sont faibles, surtout dans le cas des interactions e^+e^- , c'est donc l'algorithme qui est en général utilisé pour les études au LEP. Le point faible apparaît à l'ordre suivant : si deux gluons softs sont émis à grand angle par rapport aux deux quarks initiaux, ils peuvent former, de par la grande masse invariante reconstruite, un troisième jet artificiel. Cela empêche d'inclure les techniques de resommations de gluons soft dans les Monte Carlo.



Appliquons notre algorithme au niveau partonique dans les cas $q\bar{q}g$. Les masses invariantes des jets sont directement liées aux x_i :

$$M_{ij}^2 = \frac{s}{2} x_i x_j (1 - \cos \theta_{ij}) = \frac{s}{4} [(x_i + x_j)^2 - x_k^2] = s(1 - x_k) \quad (3.94)$$

Un événement sera donc identifié comme ayant 3 jets si :



3 Jets :

$$x_q < 1 - y$$

$$x_{\bar{q}} < 1 - y$$

$$x_g < 1 - y \Rightarrow x_q + x_{\bar{q}} > 1 + y$$

On remarque bien que la région de l'espace des phases à considérer ne contient pas de singularité soft ou colinéaire.

3.10.2 Algorithme de k_T

L'algorithme dit de k_T forme aussi des *clusters*. On y définit :

$$M_{ij}^2 = 2 \min [E_i^2, E_j^2] (1 - \cos \theta_{ij}), \quad i \neq j. \quad (3.95)$$

Si l'on considère des émissions à petit angle :

$$\begin{aligned} M_{ij}^2 &\simeq 2 \min [E_i^2, E_j^2] (1 - (1 - \theta_{ij}^2/2 + \dots)) \\ &\simeq \min [E_i^2, E_j^2] \theta_{ij}^2 \\ &\simeq k_T^2 \end{aligned} \quad (3.96)$$

Dans ce cas les émissions problématiques pour l'algorithme de JADE, discutées plus haut, ne poseront pas de problème. Les gluons softs ayant une petite impulsion transverse par rapport à un des quarks, seront attachés au bons jets. L'algorithme dit de *anti* - k_T cherche le $\min [1/k_{Ti}^2, 1/k_{Tj}^2] \Delta_{ij}^2/R^2$ où $\Delta_{ij}^2 = (y_i - y_j)^2 + (\phi_i - \phi_j)^2$ où les y représentent la rapidité de la particule et R un paramètre de rayon.

3.10.3 Multiplicité de jets

Les expérimentateurs calculent le nombre de jets en se basant sur les impulsions des hadrons de l'état final. Les théoriciens, en revanche, utilisent les impulsions des partons. Si les idées développées au cours de ce chapitre sur le confinement et l'hadronisation sont correctes, il nous est permis de tester les prédictions d'une approche perturbative de QCD en comparant le nombre de jets aux niveaux hadronique et partonique.

Définissons les grandeurs suivantes :

$$f_2 = \frac{\sigma_{2jet}}{\sigma_{tot}}, \quad f_3 = \frac{\sigma_{3jet}}{\sigma_{tot}}. \quad (3.97)$$

où $\sigma_{tot} = \sigma_{2jet} + \sigma_{3jet} = \sigma_0(1 + \alpha_S/\pi)$ est la section efficace totale à l'ordre α_S . Plus explicitement :

$$\begin{aligned} f_3 &= \int d\sigma_{q\bar{q}g} = C_F \frac{\alpha_S}{2\pi} \int_{2y}^{1-y} \frac{dx_1}{1-x_1} \int_{1+y-x_1}^{1-y} \frac{dx_2(x_1^2 + x_2^2)}{1-x_2} \\ &= C_F \frac{\alpha_S}{2\pi} \left(4Li_2\left(\frac{y}{1-y}\right) + (3-6y) \log\left(\frac{y}{1-2y}\right) + 2 \log^2\left(\frac{y}{1-y}\right) \right. \\ &\quad \left. - 6y - \frac{9}{2}y^2 - \frac{\pi^2}{3} + \frac{5}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.98)$$

où $Li_2(z)$ est la fonction dilogarithmique (ou fonction de Spence), définie par sa représentation intégrale :

$$Li_2(z) = - \int_0^z du \frac{\log u}{1-u} \quad (3.99)$$

où aucune divergence n'apparaît.

Si l'on fait varier \sqrt{s} , l'énergie du centre de masse e^+e^- , en gardant y fixé, la fraction de jets f_i change car la constante de couplage dépend de l'échelle :

$$f_i(s, \alpha_S, y) = f_i(\alpha_S(s), y). \quad (3.100)$$

Cela donne un moyen de mesurer la dépendance $\alpha_S(s)$ comme illustré à la figure 3.15 [10] qui reprend les résultats des expériences JADE au collisionneur PETRA de DESY (à $\sqrt{s} = 35$ GeV) et d'OPAL au collisionneur LEP du CERN (à $\sqrt{s} = 91$ et 189 GeV).

Les résultats expérimentaux correspondent à des mesures basées sur un ensemble de hadrons, ils ne peuvent donc être comparés directement aux résultats théoriques faits au niveau des partons. Des programmes de simulations, basés sur les calculs QCD perturbatifs, incluent des effets de corrections approximatifs correspondant aux ordres supérieurs non calculés (pour compléter la fragmentation) et une simulation de l'hadronisation suivant des modèles choisis. Les résultats ici présentés sont comparés aux prédictions théoriques estimées sur base des simulations (PYTHIA, HERWIG, ARIADNE et COJETS). Un bon accord est observé. Plus de détails sur les simulations et leurs comparaisons aux mesures expérimentales peuvent être trouvés dans la référence [11].

Ces résultats montrent qu'une même multiplicité de jets est trouvée pour une valeur inférieure de y_{cut} quand \sqrt{s} augmente (voir par exemple 3.15c ou d). Dans les régions des larges valeurs de y_{cut} par rapport au pic, cet effet est une conséquence de la variation de α_S . La faible diminution de l'ampleur du pic est également due à cette variation. Ceci est mis en évidence sur la figure 3.16 qui présente la fraction d'événements à 3-jets, f_3 , en fonction de l'énergie du centre de masse, \sqrt{s} , pour une valeur $y_{cut} = 0.08$

Remarquons finalement que la multiplicité de jets possède une grande sensibilité à α_S [$R_n \sim \alpha_S^{n-2}$]. Mais si cette sensibilité augmente avec n , la précision expérimentale souffre du nombre décroissant d'événements.

3.11 Structure de l'état final hadronique

L'étude de la structure de l'état final hadronique (*event shape* en anglais) évite une association directe des particules à un jet mais préfère calculer une valeur pour différentes observables qui classe l'événement en accord avec sa topologie. De façon générale, ces observables sont construites telles que la valeur zéro corresponde au cas idéal d'un événement constitué de deux jets d'uniquement deux particules dos-à-dos. Les valeurs plus grandes indiquent la présence d'un ou de plusieurs jets additionnels. Il existe un grand nombre de telles observables. Nous nous concentrerons sur les principales qui de plus possèdent l'avantage d'être insensibles aux divergences infrarouges et ultraviolettes.

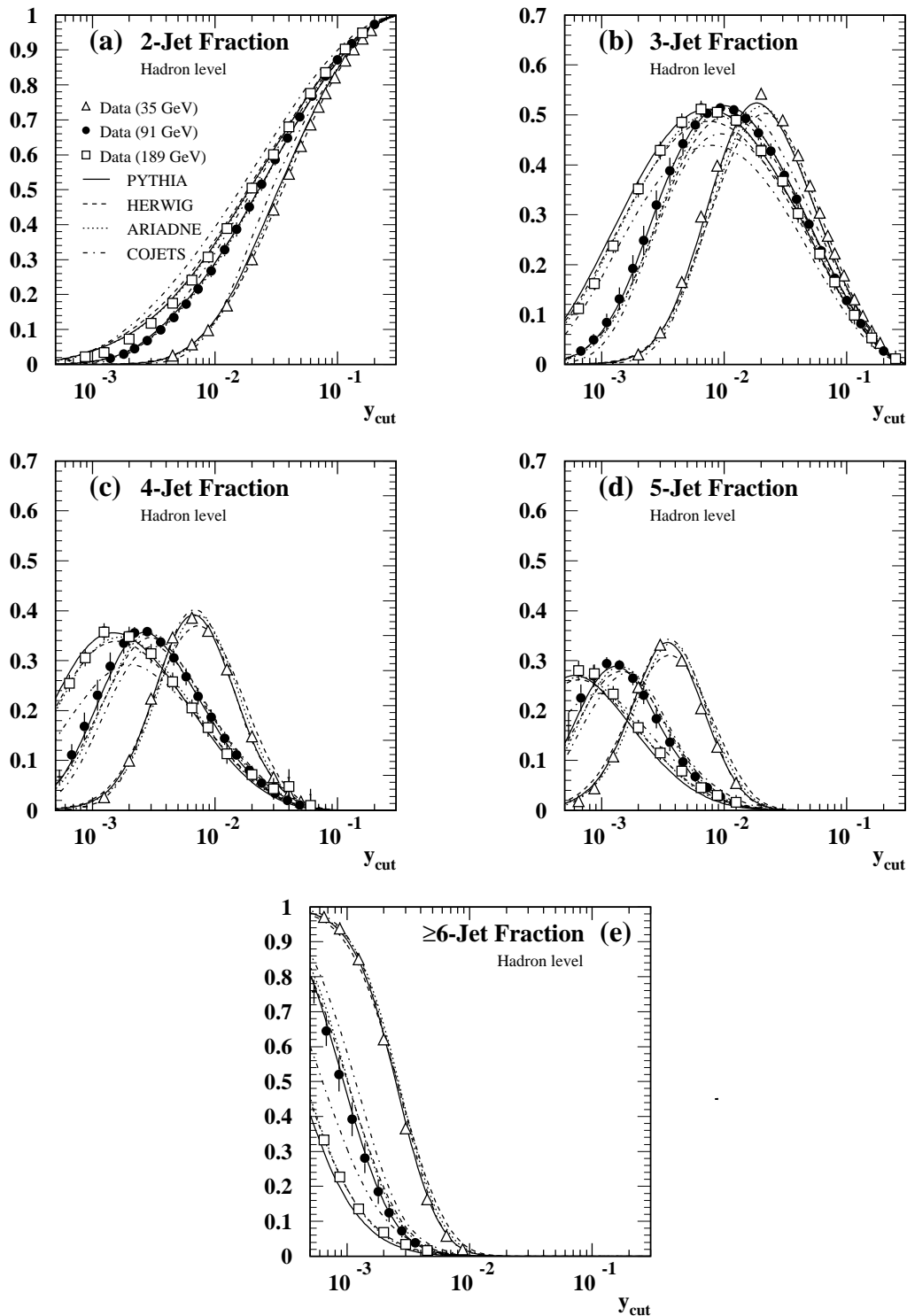


FIGURE 3.15 – Fraction d'événements avec 2, 3, 4, 5 et plus de 5 jets mesurés par les expériences JADE ($\sqrt{s} = 35$ GeV) et OPAL ($\sqrt{s} = 91$ et 189 GeV) en utilisant l'algorithme de reconstruction de jets JADE en fonction de la valeur du paramètre y_{cut} . Les barres d'erreurs représentent l'incertitude totale. Les courbes représentent les prédictions des modèles implémentés dans PYTHIA, HERWIG, ARIADNE et COJETS.

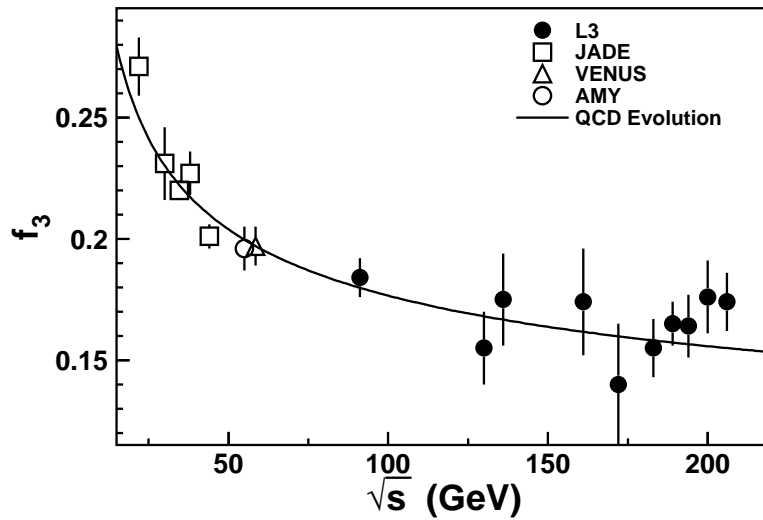


FIGURE 3.16 – Fraction d'événements à 3-jets en fonction de l'énergie du centre de masse, \sqrt{s} , pour une valeur $y_{cut} = 0.08$ mesurée par les expériences AMY (TRISTAN-KEK), VENUS (TRISTAN-KEK), JADE (PETRA-DESY) et L3 (LEP-CERN) et comparée à la dépendance prédite par QCD. Figure issue de la référence [12].

Les observables Thrust et M_H

On définit la variable Thrust, T , pour un événement, par :

$$T = \max_{\vec{n}} \left(\frac{\sum_i |\vec{p}_i \cdot \vec{n}|}{\sum_i |\vec{p}_i|} \right) \quad (3.101)$$

où \vec{p}_i est l'impulsion de la particule i . L'axe du thrust \vec{n}_T est le vecteur \vec{n} qui maximise l'expression entre parenthèses. Un plan passant par l'origine et perpendiculaire à \vec{n}_T divise l'événement en deux hémisphères, H_1 et H_2 . La valeur de $T = 1$ correspond au cas idéal de deux jets cité plus haut. Dès lors on définit la variable $1 - T$.

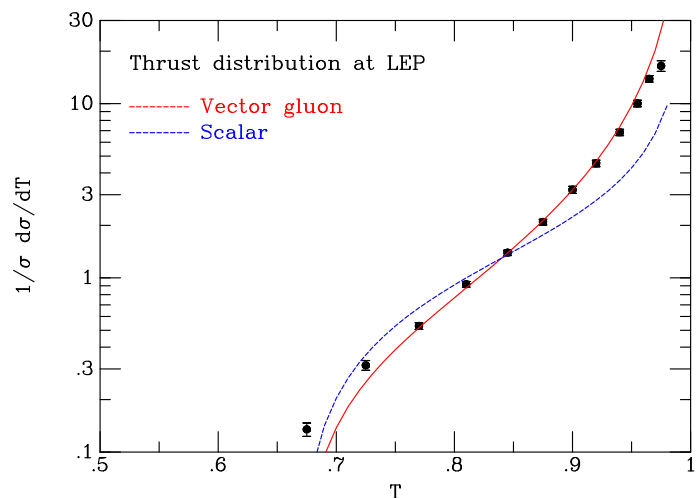
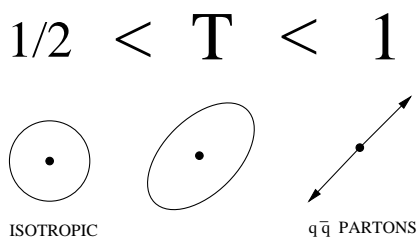


FIGURE 3.17 – Thrust mesuré par l'expérience DELPHI du LEP. Le résultat confirme le caractère vectoriel (spin 1) du gluon (par rapport au comportement attendu pour un gluon scalaire (spin 0)).

La variable M_H est définie comme le maximum des masses invariantes des particules contenues dans un

des hémisphères.

Les observables d'étalement des jets B_T et B_W

En construisant la quantité :

$$B_k = \left(\frac{\sum_{i \in H_k} |\vec{p}_i \times \vec{n}_T|}{2 \sum_i |\vec{p}_i|} \right)$$

pour chaque hémisphère, H_k , on définit les variables de *Broadening* :

$$B_T = B_1 + B_2, \text{ et } B_W = \max(B_1, B_2) .$$

Transition entre 2 et 3 jets

Dans le cadre de l'algorithme de Durham [13], on définit la valeur de charnière $y_{23}^D = y_{cut}$ pour laquelle chaque événement passe d'une topologie de deux à trois jets.

Les distributions expérimentales des observables de "event shape" obtenues par la Collaboration OPAL sont montrées à la figure 3.18. La définition de l'observable C également montrée sur la figure peut être trouvée par exemple dans la référence [11]. La dépendance en $\alpha_S(s)$ est ajustée séparément pour chaque observable sur la domaine indiqué par les flèches.

3.12 Comparaison des mesures de α_S

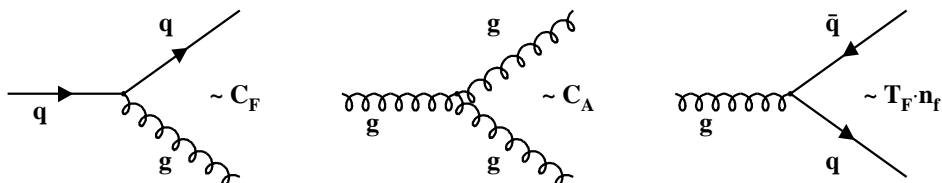
En combinant un grand nombre de résultats portant sur la mesure de α_S (voir figure 3.19, sa valeur extrapolée à la masse du Z est actuellement estimée à [S. Bethke, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **234** (2013) 229, arXiv :1210.0325 [hep-ph]] :

$$\alpha_S(m_{Z^0}) = 0.1184 \pm 0.0007$$

3.13 Test de la structure de jauge de QCD

Jusqu'ici la distribution angulaire des jets a mis en évidence le spin 1/2 des quarks, la mesure du Thrust, le spin 1 des gluons et une somme de mesures indépendantes concordent à la même valeur de α_S et à son évolution. En revanche la structure de jauge du groupe, et en particulier son caractère non abélien, n'a pas été mise en évidence si ce n'est de façon indirecte par l'évolution de α_S .

Au NLO de QCD, trois vertex fondamentaux contribuent :



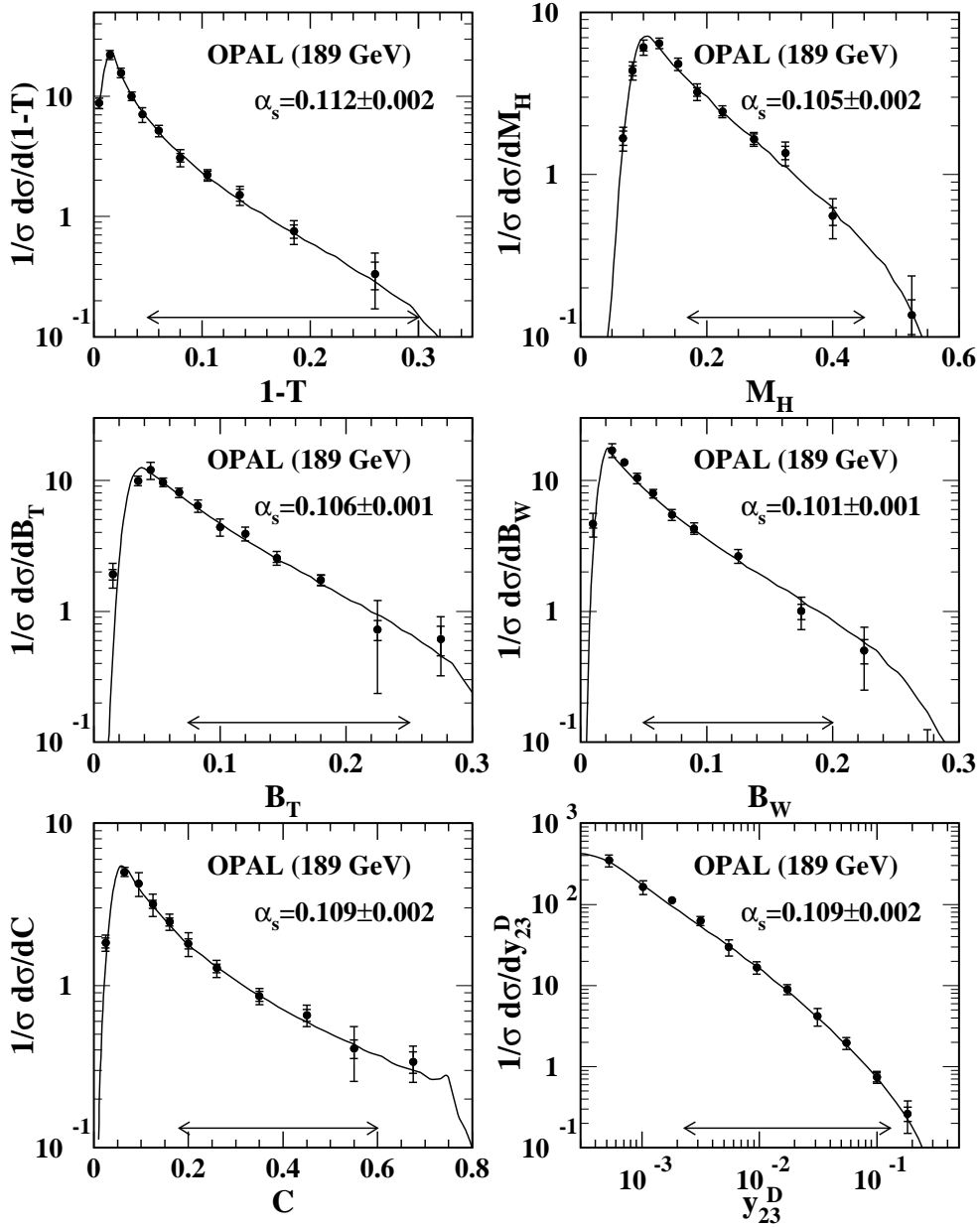


FIGURE 3.18 – Distributions des observables de thrust $1 - T$, de masse M_H , de Broadening B_T et B_W , du paramètre C et de la valeur de transition entre 2 et 3 jets y_{23}^D . Ces mesures de la Collaboration OPAL au LEP sont confrontées avec des ajustements QCD à l'ordre $O(\alpha_s^2)+NLLA$ avec α_s comme paramètre d'ajustement. Les régions sujettes à l'ajustement sont indiquées par des flèches.

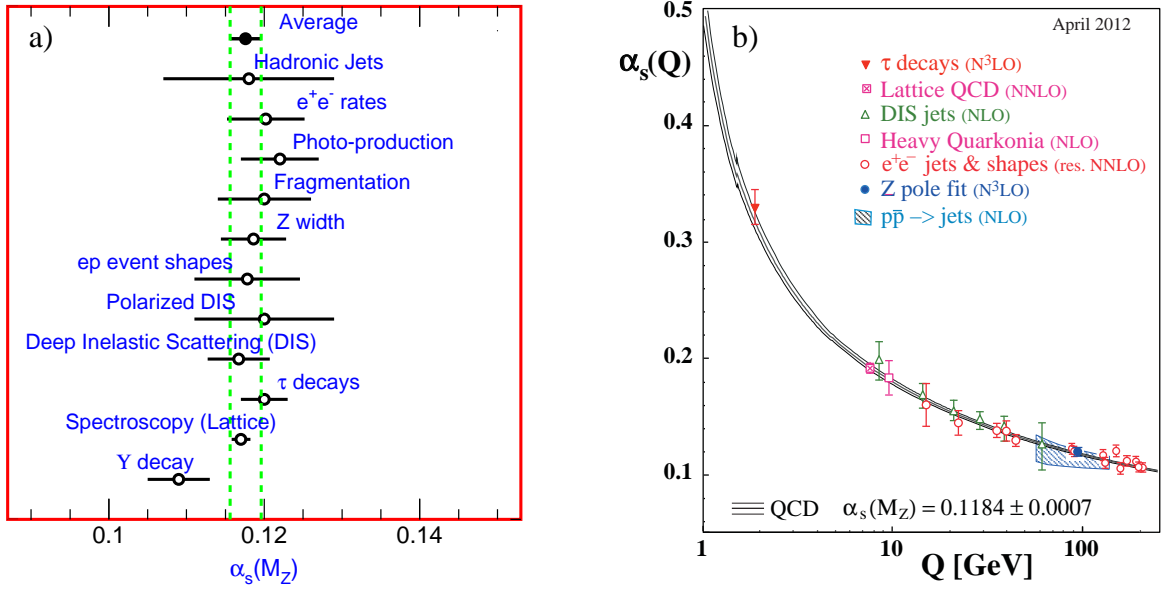


FIGURE 3.19 – a) Résumé des valeurs mesurées les plus précises α_s extrapolées à $\alpha_s(m_{Z^0})$ pour différentes méthodes. L’incertitude présentée inclut l’incertitude théorique. b) Résumé des valeurs mesurées les plus précises de $\alpha_s(\mu)$ en fonction de l’échelle $Q = \mu$. Pour plus de détails voir S.Bethke [Nucl. Phys. Proc. Suppl. **234** (2013) 229, arXiv :1210.0325 [hep-ph]].

En les élevant au carré, on trouve les facteurs intervenant dans les sections efficaces :

$$\begin{aligned}
 \sum_a (\lambda^a \lambda^a)_{ij} &= 4C_F \delta_{ij}, & C_F &= T_F \frac{N^2 - 1}{N} = \frac{4}{3}, \\
 \text{Tr}(T_A^a T_A^b) &= f^{acd} f^{bcd} = C_A \delta_{ab}, & C_A &= 2T_F N = 3, \\
 \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) &= 4T_F \delta^{ab}, & T_F &= \frac{1}{2},
 \end{aligned}
 \tag{3.102}$$

où pour un groupe $SU(N)$, les représentations du groupe $T^a = \lambda^a/2$ de dimension N sont données par les matrices de Pauli dans le cas $SU(2)$ et par les matrices de Gell-Mann dans le cas $SU(3)$. Les représentations adjointes T_A^a , nécessaires pour les couplages entre indices adjoints, c’est-à-dire entre gluons, sont de dimension $(N^2 - 1)(N^2 - 1)$ et telles que $(T_A^a)_{bc} = -if^{abc}$.

Remarquons que pour le groupe $U(1)_3$ les valeurs attendues seraient $C_A/C_F = 0$ et $T_F/C_F = 3$.

Une façon de vérifier la structure du groupe, c’est-à-dire de mesurer les nombres C_F, C_A et T_F est d’analyser les événements à 4 jets. La section efficace peut s’écrire sous la forme

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right)^2 [C_F^2 \mathcal{A} + C_F C_A \mathcal{B} + C_F T_F n_f C]
 \tag{3.103}$$

Le terme en \mathcal{A} correspond à la contribution de diagrammes de type (a) et (b), celui en \mathcal{B} aux diagrammes de type (c), c’est-à-dire au vertex à 3 gluons, et le terme en C aux diagrammes de type (d) de la figure 3.20, c’est-à-dire à l’état final $q\bar{q}q\bar{q}$. Notons que dans une théorie abélienne le terme en C serait absent. Les termes \mathcal{A}, \mathcal{B} et C sont des fonctions de la masse invariante des systèmes formés par les paires de partons, $s_{ij} = (p_i + p_j)^2$, indépendantes du groupe de jauge.

En principe on pourrait distinguer une théorie abélienne d’une non abélienne par la mesure de la section efficace, vu que certains termes disparaissent, mais l’incertitude induite par l’échelle de renormalisation

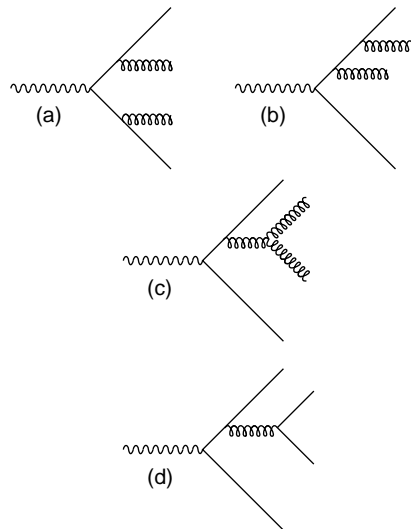


FIGURE 3.20 – Diagrammes contribuant à la production de 4 jets, à l'ordre le plus bas.

est trop importante pour obtenir un résultat probant. On obtient une plus grande sensibilité en étudiant les corrélations angulaires entre jets. On classe tout d'abord les jets par ordre croissant d'énergie

$$E_1 > E_2 > E_3 > E_4,$$

Les jets 1 et 2 sont presque toujours des jets issus de quarks. On s'attend à ce que les dépendances angulaires soient différentes pour les différents termes : $\mathcal{A} : q \rightarrow qg$, soit spin $1/2 \rightarrow 1 + 1/2$, $\mathcal{B} : g \rightarrow gg$, soit spin $1 \rightarrow 1 + 1$ et $\mathcal{C} : g \rightarrow q\bar{q}$, soit spin $1 \rightarrow 1/2 + 1/2$.

De façon à être sensible au vertex à 3 gluons, on définit les angles de Bengtsson-Zerwas

$$\cos \chi_{\text{BZ}} = \left| \frac{(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot (\vec{p}_3 \times \vec{p}_4)}{|\vec{p}_1 \times \vec{p}_2| |\vec{p}_3 \times \vec{p}_4|} \right| \quad (3.104)$$

soit l'angle entre les plans formés par (1,2) et (3,4), et de Nachtmann-Reiter (modifié) :

$$\cos \Theta_{\text{NR}^*} = \left| \frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot (\vec{p}_3 - \vec{p}_4)}{|\vec{p}_1 - \vec{p}_2| |\vec{p}_3 - \vec{p}_4|} \right|, \quad (3.105)$$

correspondant à l'angle entre les vecteurs $(p_1 - p_2)$ et $(p_3 - p_4)$.

On corrige pour les effets d'hadronisation par Monte Carlo et on ajuste les rapports C_A/C_F et T_F/C_F aux données.

Les distributions expérimentales obtenues par l'expérience L3 du LEP sont montrées à la figure 3.21.

En combinant ces résultats avec d'autres mesures de l'état final hadronique seul le groupe $SU(3)$ est compatible avec les mesures (le $N = 3$ étant imposé par le rapport R) et exclut les autres groupes proposés, en particulier un modèle abélien exclu par plus de 12 déviations standards. D'autres mesures peuvent également être menées, en particulier, comparer les jets de gluons à ceux de quarks (les jets de gluons doivent émettre deux fois plus de gluons mous) et les événements à 5 jets qui donnent accès au vertex à 4 gluons.

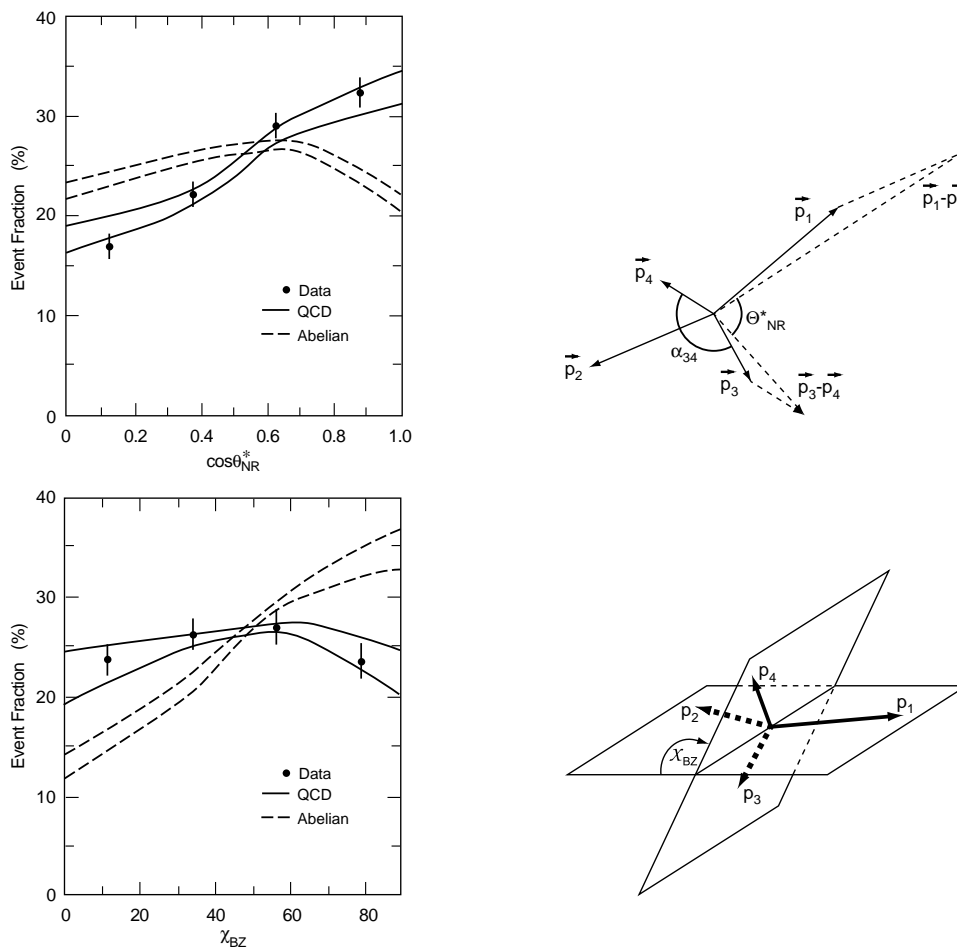


FIGURE 3.21 – Distributions expérimentales des angles de Nachtmann-Reiter et de Bengtsson-Zerwas obtenues par l'expérience L3 au LEP. Les prédictions sont comparées pour un groupe de non abélien $SU(3)$, ici noté QCD et un groupe abélien. Figure extraite de [16].

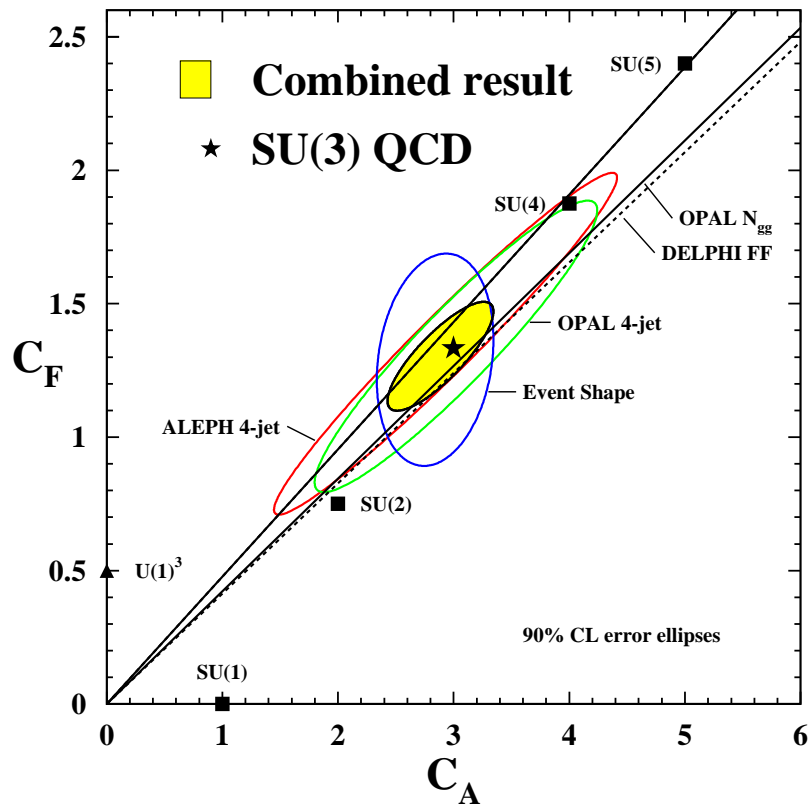


FIGURE 3.22 – Résultats combinés LEP des contraintes sur le groupe de jauge de QCD.