

# Examen de géométrie - BAC 3 MATH

7 janvier 2008

**Justifiez soigneusement toutes vos réponses.**

**Q 1** (10 points). Considérons l'espace vectoriel  $V = \mathbb{K}^4$  sur le corps  $\mathbb{K}$  de cardinal 7.

- Quel est le nombre de points de l'espace affine  $\text{Aff}(V)$  ?
- Quel est le nombre de points de l'espace projectif  $P(V)$  ?
- Quel est le nombre de points de  $P(V)$  qui sont fixés par l'application suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Q 2** (15 points). Soit  $V = \mathbb{R}^3$ . Soit la projectivité de  $P(\mathbb{R}^3)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Quel sont les points fixes de cette application.
- $A$  est-elle une perspective? Si oui, déterminer ses axe(s) et centre(s).
- $A^2$  est-elle une perspective? Si oui, déterminer ses axe(s) et centre(s).

**Q 3** (25 points). Dans l'espace vectoriel  $V = \mathbb{R}^3$ , on se donne les vecteurs suivants :  $a = (1, 1, 1)$ ,  $b = (2, 1, 1)$ ,  $c = (1, 2, 1)$  et  $d = (1, 1, 2)$ .

- Décrire explicitement une affinité de  $V$  qui fixe  $a$ , et qui envoie  $b$  sur  $c$ ,  $c$  sur  $d$  et  $d$  sur  $b$  ?
- Existe-t-il une projectivité de  $P(V)$  qui envoie  $[a]$ ,  $[b]$ ,  $[c]$  sur  $[b]$ ,  $[c]$  et  $[d]$  respectivement ?
- Existe-t-il une élation de  $P(V)$  d'axe  $\overline{[a][b]}$  et de centre  $[b]$  qui envoie  $[c]$  sur  $[d]$  ?
- Posons  $G = \text{Aut}(P(V))$ 
  - Montrer que  $G$  n'est pas 3-transitif sur  $P_\infty(V)$ .
  - Montrer que  $G_{[a],[b],[c]}$  (i.e. le fixateur de  $[a]$ ,  $[b]$ ,  $[c]$  dans  $G$ ) n'est pas réduit à l'identité.

**Q 4** (15 points).

- Pour un espace linéaire  $S = (P, L)$ , définir le sous-espace linéaire engendré par un sous-ensemble  $X \subset P$ .
- Définir une permutation semilinéaire d'un espace vectoriel  $V$  sur un corps  $\mathbb{K}$ .
- Définir un plan projectif abstrait.

**Q 5** (5 points). Soit  $V$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$ , et soient  $L, L'$  deux droites projectives de  $P(V)$ . On pose  $G_{[L]}$  le groupe des automorphismes de  $P(V)$  qui fixent  $L$  point par point. On définit  $G_{[L']}$  similairement. Montrer que ces deux groupes sont conjugués dans  $\text{Aut}(P(V))$ .

**Q 6** (10 points).

- a) Définir un groupe parfait.
- b) Existe-t-il un groupe parfait  $G$  possédant un sous-groupe normal d'indice 2 ?
- c) Existe-t-il un groupe parfait  $G$  possédant un sous-groupe normal d'indice  $p$  pour un  $p$  premier impair ?

**Q 7** (10 points). Soient deux naturels  $p$  et  $q$  supérieurs ou égal à 2. Soit  $S = (P, L)$  un espace linéaire tel que  $S$  possède  $p$  points et tel que toute droite contient  $q$  points.

a) Montrer que  $S$  possède  $\frac{\binom{p}{2}}{\binom{q}{2}}$  droites.

b) Montrer qu'il y a exactement  $\frac{p-1}{q-1}$  droites qui passent par un point donné de  $P$ .

**Q 8** (10 points). Soit  $S = (P, L)$  un espace linéaire contenant au moins 2 points. Supposons que  $G = \text{Aut}(S)$  est 2-transitif sur l'ensemble des points  $P$ . Montrer que  $G$  est transitif sur l'ensemble des droites  $L$  mais pas strictement transitif.