Exercices de théorie des nombres - BAC 2 - Séance 6

15 mai 2007

1. Calculer les symbôles de Legendre suivants :

   a) $(\frac{2}{77})$

   b) $(\frac{2}{391})$

   c) $(\frac{2}{2737})$

   d) $(\frac{3}{143})$

   e) $(\frac{179}{389})$

   f) $(\frac{-58}{643})$

2. Déterminer tous les premiers p tels que 3 soit un reste quadratique mod p. Même question pour 5 à la place de 3.

3. Un théorème de Dirichelet affirme que pour tous naturels k et l premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv k(l)$. Montrer cette affirmation dans les cas particuliers suivants :

   a) k=3, l=4

   b) k=1, l=4

   c) k=5, l=6

   d) k=1, l=6

Pour ce faire, on suppose par l'absurde qu'il en existe un nombre fini $p_1, \cdots, p_n$. Produire une contradiction en utilisant ...

   a) $m = 4p_1 \cdots p_n - 1$.

   b) $m = (2p_1 \cdots p_n)^2 + 1$. (Aide : si $p|m$, alors $(\frac{-1}{p}) = 1$)

   c) ...

   d) $m = (2p_1 \cdots p_n)^2 + 3$. (Aide : si $p|m$, alors $(\frac{p}{3}) = 1$)

4. Soit p un premier impair. Si q est le plus petit naturel tel que $(\frac{q}{p}) = -1$, alors q est premier, et $q < \sqrt{p} + 1$.

5. Soit p un premier impair, et soit $f : \mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z} \to \{\pm 1\}$ une fonction telle que $f(a)f(b) = f(ab)$ pour tout a et b, et telle que $f(a) = f(b)$ si $a \equiv b(p)$. Montrer que soit $f(a) = 1$ pour tout a, soit $f(a) = (\frac{a}{p})$ pour tout a.