BA3 en sciences mathématiques
Examen d'analyse

Juin 2015

1. Soit X un ensemble et soit $S := \{\{x\} : x \in X\}$. Déterminer la σ-algèbre engendrée par S dans chacun des trois cas suivants: (a) S est fini; (b) S est infini dénombrable; et (c) S est infini non dénombrable.

2. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Steinhaus: pour tout sous-ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue non nulle, l'ensemble $A - A := \{x - y : x, y \in A\}$ contient un voisinage ouvert de l'origine. Pour ce faire, on procédera selon les étapes suivantes:

(a) Soient $A, B \subset \mathbb{R}^d$ deux sous-ensembles bornés Lebesgue-mesurables. Montrer que la fonction définie par $\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B(x) := \int_B \mathbb{1}_A(x-y)dy$ est continue sur $\mathbb{R}^d$.

(b) Utiliser le théorème de Fubini pour montrer que la fonction positive $\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B$ n'est pas uniformément nulle dès que A et B sont de mesure de Lebesgue non nulle. Calculer aussi la valeur $\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B(0)$.

(c) En choisissant $B = -A$, déduire le théorème de Steinhaus.

3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure avec $\mu(X) < \infty$, soient $1 \leq p, q < \infty$, et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $|g(t)| \leq 1 + |t|^{p/q}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(a) Soit $u \in \mathcal{L}^p(X)$. Montrer que $g \circ u$ appartient à $\mathcal{L}^q(X)$.

(b) Pour $u \in \mathrm{L}^p(X)$, on pose $G(u) := \{h \in \mathcal{L}^q(X) : h = g \circ v \text{ p.p.}\}$ avec $v \in u$. Vérifier que cette définition de $G(u)$ ne dépend pas du choix de $v \in u$, de sorte que l'application $G : \mathrm{L}^p(X) \to \mathrm{L}^q(X)$ est bien définie.

(c) Soient $(u_n)_n \subset \mathrm{L}^p(X)$ et $u, w \in \mathrm{L}^p(X)$ tels que $u_n \to u$ presque partout et $|u_n| \leq w$ presque partout pour tout n. Montrer qu'alors $G(u_n) \to G(u)$ dans $\mathrm{L}^q(X)$.

(d) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables qui converge dans $\mathrm{L}^1(X)$ vers une fonction f. Montrer qu'alors il existe une fonction $h \in \mathrm{L}^1(X)$ et une sous-suite $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ telles que $f_{n_k} \to f$ presque partout et $|f_{n_k}| \leq h$ presque partout pour tout k.

(e) Combiner les points (c) et (d) ci-dessus pour déduire que l'application $G : \mathrm{L}^p(X) \to \mathrm{L}^q(X)$ est continue.

4. Soit $\{e_1, e_2, \ldots\}$ une base orthonormée d'un espace de Hilbert H. On considère l'opérateur linéaire T dont le domaine $D(T)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de la base et tel que

$$T(e_{2^n+j}) = \frac{2^n + j}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{e_k}{k}$$

pour $n \geq 0$ et $0 \leq j \leq 2^n - 1$,

(a) Calculer $T(e_i)/i$ pour $i = 1, 2, \ldots, 7$.

(b) Construire une suite $(f_n)_n$ dans $D(T)$ convergeant vers 0 dans H et telle que $T(f_n)$ ait une limite non nulle.

(c) Est-ce que T est fermable? Justifier.

5. Résoudre

$$\begin{cases} x\partial_x u + (x^2 + y)\partial_y u = x \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

pour (x, y) dans un voisinage de $(1, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$.