BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 10

Différents types de convergence

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurable. On dit qu'une suite (f_n) de fonctions mesurables converge

— *en mesure* vers f si

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega\,;\, |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0$$

pour tout $\epsilon > 0$;

— *presque uniformément* vers f si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ tel que

$$\mu(\Omega \setminus \Omega_\epsilon) < \epsilon \text{ et } f_n \to f \text{ uniformément sur } \Omega_\epsilon\,;$$

— *dans* L^p vers f, où $1 \leq p \leq \infty$, si $f \in L^p$, $f_n \in L^p$ pour tout n et

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu = 0\,;$$

— *presque partout* vers f s'il existe un ensemble $N \subset \Omega$ de mesure nulle tel que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \Omega \setminus N$.

Justifier les énoncés suivants.

(i) La convergence presque partout n'implique pas la convergence dans L^p, sauf si la suite (f_n) est bornée par une fonction $g \in L^p$.

(ii) La convergence dans L^p implique la convergence en mesure.

(iii) La convergence presque partout n'implique pas la convergence en mesure, sauf si $\mu(\Omega) < \infty$.

(iv) La convergence en mesure n'implique pas la convergence presque partout, mais seulement la convergence presque partout d'une suite partielle.

(v) La convergence en mesure n'implique pas la convergence dans L^p, sauf si la suite (f_n) est bornée par une fonction $g \in L^p$.

(vi) La convergence presque partout n'implique pas la convergence presque uniforme.

(vii) Si $\mu(\Omega) < \infty$, la convergence presque partout et la convergence presque uniforme sont équivalentes (*théorème d'Egorov*).

En utilisant le point (vii) ainsi que la densité dans L^1 des fonctions continues, déduire le *théorème de Lusin* : si f est une fonction mesurable $[a, b] \to \mathbb{C}$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset [a, b]$ tel que la restriction $f|_K$ est continue et $|[a, b] \setminus K| < \epsilon$. (En d'autres termes, une fonction mesurable est continue presque partout.)