**BA3 en mathématiques**
**Exercices d'analyse**

Séance 11

Transformée de Fourier

**1.** Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

(i) On considère l'application $t \to f_t : \mathbb{R} \to L^p(\mathbb{R})$ où $f_t(x) = f(x-t)$. Montrer que si $p < \infty$, cette application est uniformément continue.

(ii) Montrer que $t \to h_t : \mathbb{R} \to L^\infty(\mathbb{R})$, où $h = \mathbf{1}_{[0,1]}$, n'est pas continue.

(iii) Soit

$$C_0(\mathbb{R}) = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\,;\, g \text{ continue et } \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0\},$$

muni de la norme

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|.$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ et que l'application $t \to \widehat{f_t}$ est uniformément continue.

**2.** Le but de cet exercice est de démontrer la formule d'inversion de Fourier si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Soit $h_n(x) = (2\pi)^{-1} e^{-\frac{|x|}{n}}$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.

(i) Vérifier que

$$\hat{h_n}(\xi) = \frac{n}{\pi(1+n^2\xi^2)}.$$

(ii) Montrer que $(\hat{h_n})$ est une approximation de l'identité, c'est-à-dire que

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h_n}(\xi)\,d\xi = 1$ pour tout $n$ ;

(b) pour tout $\delta > 0$, $\int_{|\xi|>\delta} \hat{h_n}(\xi)\,d\xi \to 0$ quand $n \to \infty$.

(iii) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) h_n(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi = f * \hat{h_n}(x)$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) h_n(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi.$$

(iv) Montrer que $f * \hat{h_n} \to f$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

(v) En déduire que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi$$

pour presque tout $x$.

(vi) Montrer que, si $f$ est continue en $x_0$, alors

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{ix_0\xi}\, d\xi.$$