

BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 12

Espaces de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert.

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans H et soit $x \in H$.

(i) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0, \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\| \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle \text{ pour tout } y \in H, \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\| \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x \rangle = \|x\|^2. \quad (3)$$

(ii) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tout $y \in H$, on dit que x_n converge faiblement vers x (et on note $x_n \rightharpoonup x$). La convergence faible implique-t-elle la convergence forte ?

2. Soit C un sous-ensemble de H convexe et fermé. Montrer que la projection d'un élément $x \in H$ dans C est l'unique $y \in C$ tel que $\Re \langle x - y, c - y \rangle \leq 0$ pour tout $c \in C$.

3. Montrer de deux façons différentes que $C([0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas un espace de Hilbert.

(i) L'identité du parallélogramme n'est pas satisfaite.

(ii) L'infimum de $\|\cdot\|_\infty$ sur l'ensemble des $f \in C([0, 1])$ qui vérifient

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = 1$$

n'est pas atteint.

4. Montrer que si x et y sont deux points distincts de H , il existe une forme linéaire continue α qui sépare x et y , c'est-à-dire telle que $\alpha(x) \neq \alpha(y)$.

5. Par un raisonnement utilisant la géométrie des espaces de Hilbert, calculer

$$\min_{a, b, c \in \mathbb{R}} \int_{-1}^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx$$

et trouver

$$\max_{g \in A} \int_{-1}^1 x^3 g(x) dx$$

où A est l'ensemble des polynômes g de degré ≤ 3 satisfaisant

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 xg(x) dx = \int_{-1}^1 x^2g(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 |g(x)|^2 dx = 1.$$

Montrer que ce maximum ne change pas si on autorise des $g \in L^2([-1, 1])$.