BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 14

Réciproques du théorème de convergence dominée ?

Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace de mesure.

1. Soient f_n, f, g_n, g des fonctions mesurables $X \to \mathbb{R}$ telles que $f_n \to f$ presque partout, que $|f_n| \leq g_n$ presque partout pour tout n, et que $g_n \to g$ dans $L^1(X)$. Montrer qu'alors on a aussi $f_n \to f$ dans $L^1(X)$.

2. Montrer que la réciproque du théorème de convergence dominée de Lebesgue est fausse.
(*Hint :* pour $X = [0, \infty)$ muni de la mesure de Lebesgue m, considérer la suite des fonctions $f_n = 1_{[b_{n-1}, b_n)}$ avec $b_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$.)

3. Réciproque à extraction près. Soit $1 \leq p \leq \infty$, et supposons que f_n converge vers f dans $L^p(X)$. Alors, il existe $g \in L^p(X)$ et une sous-suite $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ telle que $f_{n_k} \to f$ presque partout et $|f_{n_k}| \leq g$ presque partout pour tout k.

4. Théorème de convergence de Vitali. Supposons $\mu(X) < \infty$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables $X \to \mathbb{R}$ telles que $f_n \to f$ presque partout, et que $|f| < \infty$ presque partout. Supposons en outre que $(f_n)_n$ est uniformément intégrable (i.e. pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\mu(A) < \delta$ implique $|\int_A f_n| < \epsilon$ pour tout n et tout sous-ensemble mesurable A). Déduire $f \in L^1(X)$ et $f_n \to f$ dans $L^1(X)$. (*Hint :* songer à exploiter le théorème d'Egorov.)
Montrer que ce résultat est en général faux lorsque $\mu(X) = \infty$ (même si $\|f_n\|_{L^1}$ reste borné). Observer aussi que cela généralise (strictement !) le théorème de convergence dominée pour des espaces de mesure finie.

5. Réciproque du théorème de Vitali. Supposons que $\mu(X) < \infty$ et que la suite $(f_n)_n \subset L^1(X)$ est telle que la limite $\lim_n \int_A f_n d\mu$ existe pour tout $A \in \mathcal{X}$. Montrer qu'alors la suite $(f_n)_n$ est uniformément intégrable. Pour ce faire, on raisonnera comme suit :

(i) Définir $\rho(A, B) := \int |1_A - 1_B| d\mu = \mu(A \Delta B)$ pour $A, B \in \mathcal{X}$, et montrer que $(\mathcal{X}, \rho)$ est un espace métrique complet.

(ii) Soit $\epsilon > 0$. Si (E, d) est un espace métrique complet, et si $(\phi_n)_n$ est une suite de fonctions continues sur E telle que la limite $\phi(a) := \lim_n \phi_n(a)$ existe pour tout n, montrer qu'il existe un entier N, un élément $a_0 \in E$ et un $\delta > 0$ tels que $|\phi_n(a) - \phi_N(a)| < \epsilon$ pour tout $d(a, a_0) < \delta$.
(*Hint :* Considérer $A_N = \{a : |\phi_m(a) - \phi_n(a)| < \epsilon, \forall m, n \geq N\}$ pour tout N, observer que $\cup_N A_N = E$ et en déduire l'existence d'un N tel que l'intérieur de A_N est non vide.)

(iii) Déduire des deux points précédents que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A_0 \in \mathcal{X}$, $\delta > 0$ et un entier N tels que $|\int_B (f_n - f_N) d\mu| < \epsilon/2$ pour tout $n \geq N$ et tout B avec $\mu(B \Delta A_0) < \delta$.

(iv) Conclure en considérant au point (iii) les choix $B = A_0 \cup A$ et $B = A_0 \setminus A$ avec $\mu(A) < \delta$.

6. Supposons $\mu(X) < \infty$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $L^1(X)$ telles que $f_n \to f$ presque partout et telles qu'il existe $p > 1$ et $C < \infty$ avec $\int_X |f_n|^p \leq C$ pour tout n. Montrer qu'alors $f_n \to f$ dans $L^1(X)$.
(*Hint :* appliquer l'exercice précédent.)

7. Montrer qu'il n'existe pas de topologie pour la convergence presque partout. Plus précisément, il n'existe pas de topologie sur l'espace des fonctions mesurables $X \to \mathbb{R}$ de telle sorte qu'une suite de telles fonctions converge pour cette topologie si et seulement si elle converge presque partout.
(*Hint :* observer qu'une suite $(f_n)_n$ converge en mesure si et seulement si toute sous-suite possède une sous-sous-suite qui converge presque partout.)

• **Mesure de Lebesgue-Stieltjes.**

Soit $\mathcal{S} = \{]a, b] \,;\, a, b \in \mathbb{R},\, a \leq b\}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction non décroissante. On définit $\mu_f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^+$ par

$$\mu_f(]a, b]) = f(b) - f(a).$$

(i) Montrer que μ_f est σ-additive sur $\mathcal{S}$ si et seulement si f est continue à droite (c'est-à-dire si $\lim_{\epsilon \to 0^+} f(x + \epsilon) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$).
Indications :
— si μ_f est σ-additive sur $\mathcal{S}$ et si (x_n) est une suite décroissante tendant vers x, alors

$$\mu_f(]x, x_1]) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(]x_{n+1}, x_n])\,;$$

— si $]a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n]$, avec des $]a_n, b_n]$ disjoints, alors

$$\sum_{n=1}^{N} \mu_f(]a_n, b_n]) \leq \mu_f(]a, b]),$$

pour tout N ;

— si de plus f est continue à droite, alors

$$\mu_f(]a,b]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(]a_n,b_n]) + \epsilon,$$

pour tout $\epsilon > 0$ (choisir $\delta_\epsilon > 0$ tel que $f(a+\delta_\epsilon) \leq f(a) + \epsilon/2$ et $\delta_\epsilon^{(n)} > 0$ tels que $f(b_n + \delta_\epsilon^{(n)}) \leq f(b_n) + \epsilon/2^{n+1}$, pour tout n, et remarquer que les $]a_n, b_n + \delta_\epsilon^{(n)}[$ recouvrent le compact $[a+\delta_\epsilon, b]$).

(ii) L'extension de μ_f à la σ-algèbre des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ μ_f-mesurables est notée df ; c'est une *mesure de Stieltjes positive*, et on dit que f est sa *fonction distribution*. Comment appelle-t-on les objets correspondants en probabilité et en statistique ?

(iii) Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$, non décroissante. Montrer que si g est continue sur $\mathbb{R}$ et à support compact, inclus dans $[a,b]$, alors $g \in L^1(df)$ et

$$\int_{\mathbb{R}} g\, df = (R)\int_a^b g(x) f'(x)\, dx.$$

(*Hint :* Utiliser une suite de fonctions en escalier tendant vers g.)

(iv) Soient $H = \mathbf{1}_{[0,\infty[}$ et $g(x) = \max\{1 - x^2, 0\}$. H est la *fonction de Heaviside*. Quels sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ dH-mesurables ? Quel est le nom de dH ? Calculer $\int_{\mathbb{R}} g\, dH$.