BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 8

1. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}, \mu)$, avec $\mu = m \times \sharp$, où m est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$ et $\sharp$ est la mesure qui compte les points. Que vaut $\int_{\mathbb{R}} \int_{\{a\}} dm\, d\sharp$? Et $\int_{\mathbb{R}} \int_{\{a\}} d\sharp\, dm$? Ceci contredit-il le théorème de Fubini ?

2. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}, \mu)$, avec $\mu = m \times \sharp$, où m comme dans l'exercice 1. Notons la diagonale $D = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Que vaut $\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} 1_D\, dm\, d\sharp$? Et $\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} 1_D\, d\sharp\, dm$? Ceci contredit-il le théorème de Fubini ?

3. Soit $f :]-1, 1[\times]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } x^2 \neq y^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(i) Vérifier que f est Lebesgue-mesurable.

(ii) Calculer

$$I = \int_{]-1.1[} \left(\int_{]-1.1[} f(x,y)\, dx \right) dy$$

et

$$J = \int_{]-1.1[} \left(\int_{]-1.1[} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

(iii) f est-elle intégrable sur $]-1, 1[\times]-1, 1[$?

4. Soient $[a, b] \subset [0, 1[$ et $g :]0, 1[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, de support inclus dans $]a, b[$, telle que $\int_0^1 g(y)\, dy = 1$.

(i) Étant donné $\epsilon > 0$, construire une fonction continue $G :]0, 1[\times]0, 1[\to \mathbb{R}^+$, de support inclus dans $]0, 1[\times]a, b[$, telle que

$$G(\frac{1}{2}, y) = g(y)$$

et

$$\int_0^1 \int_0^1 G(x, y)\, dx\, dy = \epsilon.$$

(ii) Soient $g_n :]0,1[\to \mathbb{R}^+$ des fonctions continues telles que

$$\operatorname{supp} g_n \subset]\delta_n, \delta_{n+1}[$$

et

$$\int_0^1 g_n(y)\, dy = 1,$$

avec $0 = \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_n \to 1$ quand $n \to \infty$. Soit G_n une fonction correspondant à g_n par la construction du point (i) si $\epsilon = 1/2^n$, pour tout $n \geq 1$. Montrer que

$$H(x,y) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x,y)$$

est une fonction continue et positive sur $]0,1[\times]0,1[$ vérifiant

$$\iint_{]0,1[\times]0,1[} H(x,y)\, dx\, dy = 1$$

alors que

$$\int_0^1 H(\frac{1}{2}, y)\, dy = +\infty.$$

(iii) Le résultat (ii) est-il en contradiction avec le théorème de Fubini ?

5 (*M.D.)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de mesure complet avec $P(\Omega) = 1$, et soit $h : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ tel que $h(\cdot, x)$ est mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé (ce qui signifie que h est un champ aléatoire). Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) h est mesurable sur $\Omega \times \mathbb{R}^d$;

(ii) h est presque stochastiquement continue, i.e., pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$P\{\omega \in \Omega \,:\, |h(\omega, x+y) - h(\omega, x)| > \delta\} \xrightarrow{y \to 0} 0.$$

Montrer que, si h est stationnaire (i.e. $P\{\omega : h(\omega, x) \in B\} = P\{\omega : h(\omega, 0) \in B\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout borélien $B \subset \mathbb{C}$), alors ces propriétés sont encore équivalentes à la suivante :

(iii) h est stochastiquement continue, i.e., pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$P\{\omega \in \Omega : |h(\omega, x+y) - h(\omega, x)| > \delta\} \xrightarrow{y \to 0} 0.$$

Montrer qu'en général sans l'hypothèse de stationnarité la propriété (iii) est strictement plus forte que (i) et (ii).