BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 13

Espaces de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans H et soit $x \in H$.

(i) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle \text{ pour tout } y \in H, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \langle x_n, x\rangle = \|x\|^2. \tag{3}$$

(ii) Si $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tout $y \in H$, on dit que x_n converge faiblement vers x (et on note $x_n \rightharpoonup x$). La convergence faible implique-t-elle la converge forte ?

2. Soit C un sous-ensemble de H convexe et fermé. Montrer que la projection d'un élément $x \in H$ dans C est l'unique $y \in C$ tel que $\Re\langle x - y, c - y\rangle \leq 0$ pour tout $c \in C$.

3. Soit $A = \{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ un ensemble de vecteurs orthonormés dans H.

(i) Montrer que A est fermé, borné, mais pas compact.

(ii) Montrer que, par contre, le « cube de Hilbert »

$$Q = \{x \in H \mid x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n,\ |c_n| \leq \frac{1}{n}\}$$

est compact.

4. Montrer de deux façons différentes que $C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas un espace de Hilbert.

(i) L'identité du parallélogramme n'est pas satisfaite.

(ii) L'infimum de $\|\cdot\|_\infty$ sur l'ensemble des $f \in C([0,1])$ qui vérifient

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt = 1$$

n'est pas atteint.

5. Montrer que si x et y sont deux points distincts de H, il existe une forme linéaire continue α qui sépare x et y, c'est-à-dire telle que $\alpha(x) \neq \alpha(y)$.

6. Par un raisonnement utilisant la géométrie des espaces de Hilbert, calculer

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 \, dx$$

et trouver

$$\max_{g\in A} \int_{-1}^{1} x^3 g(x) \, dx$$

où A est l'ensemble des polynômes g de degré ≤ 3 satisfaisant

$$\int_{-1}^{1} g(x) \, dx = \int_{-1}^{1} xg(x) \, dx = \int_{-1}^{1} x^2 g(x) \, dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} |g(x)|^2 \, dx = 1.$$

Montrer que ce maximum ne change pas si on autorise des $g \in L^2([-1,1])$.