BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 14

Opérateurs bornés

Les exercices de cette séance sont tirés du livre de W. Arveson, *A short course on spectral theory.*

1. Donner des exemples explicites d'opérateurs bornés A, B sur $l^2(\mathbb{N})$ tels que AB soit l'identité et BA la projection sur un sous-espace fermé de codimension infinie.

2. Soient A et B des opérateurs définis sur $l^2(\mathbb{N})$ par

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, \dots) &= (0, x_1, x_2, \dots) \\ B(x_1, x_2, \dots) &= (x_2, x_3, x_4, \dots), \end{aligned}$$

pour $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2(\mathbb{N})$. Montrer que $\|A\| = \|B\| = 1$, et calculer BA et AB. En déduire que A est injectif mais pas surjectif, que B est surjectif mais pas injectif, et que AB et BA n'ont pas le même spectre.

3. Soit E un espace de Banach et soient A et B des opérateurs bornés sur E. Montrer que $\mathbf{1} - AB$ est inversible si et seulement si $\mathbf{1} - BA$ est inversible.

Indication : penser d'abord à une façon de relier la série de Neumann formelle pour $(\mathbf{1} - AB)^{-1}$,

$$(\mathbf{1} - AB)^{-1} = \mathbf{1} + AB + (AB)^2 + (AB)^3 + \dots,$$

à celle correspondant à $(\mathbf{1} - BA)^{-1}$, puis transformer le calcul formel en une démonstration rigoureuse.

4. Utiliser le résultat de l'exercice précédent pour montrer que, étant donné deux opérateurs A et B bornés sur un espace de Banach, les spectres de AB et de BA coïncident, sauf peut-être en 0 : $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$.