BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 15

Opérateur

1. Soit $T : H \to H$ un opérateur linéaire borné. Est-ce que la condition

$$\|Tx\| = \|x\| \quad \text{pour tout } x \in H$$

est équivalente à $T^*T = I$?

2. Soient E et F des sous-ensembles mesurables d'espaces euclidiens (pas nécessairement de la même dimension). Soit $t : F \times E \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Montrer que

$$Tu(y) = \int_E t(y, x)\, u(x)\, dx$$

définit un opérateur borné de $L^2(E)$ dans $L^2(F)$ dès que l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :

(i) $t \in L^2(F \times E)$

(ii) il existe des constantes finies M' et M'' telles que

$$\int_E |t(y, x)|\, dx \leq M'$$

pour presque tout $y \in F$ et

$$\int_F |t(y, x)|\, dy \leq M''$$

pour presque tout $x \in E$.

Montrer que $\|T\| \leq \|t\|_{L^2}$ dans le premier cas et que $\|T\|^2 \leq M'M''$ dans le second.
[Cf. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, III-§ 2.1.]

3. Soient H et H' des espaces de Hilbert séparables. Pour tout opérateur borné $T : H \to H'$, on pose

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|T\varphi_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $\{\varphi_k\}$ est une base orthormée de H. Le sous-ensemble de $\mathcal{B}(H, H')$ constitué des T tels que $\|T\|_2 < \infty$ est appelé la classe de Schmidt et noté $\mathcal{B}_2(H, H')$.

(i) Montrer que la valeur de $\|T\|_2$ est indépendante du choix de $\{\varphi_k\}$ et que

$$\|T\|_2 = \|T^*\|_2.$$

(ii) Soit H'' un troisième espace de Hilbert séparable. Montrer que si $T \in \mathcal{B}_2(H, H')$ et $S \in \mathcal{B}(H', H'')$, alors $ST \in \mathcal{B}_2(H, H'')$ et

$$\|ST\|_2 \leq \|S\| \|T\|_2,$$

et que si $T \in \mathcal{B}(H, H')$ et $S \in \mathcal{B}_2(H', H'')$, alors $ST \in \mathcal{B}_2(H, H'')$ et

$$\|ST\|_2 \leq \|S\|_2 \|T\|.$$

(iii) Étant donné $S, T \in \mathcal{B}_2(H, H')$, on pose

$$\langle S, T \rangle = \sum_k \langle S\varphi_k, T\varphi_k \rangle.$$

Montrer que cette série converge absolument et que sa valeur est indépendante du choix de $\{\varphi_k\}$.

(iv) Montrer que $\mathcal{B}_2$ muni de $\langle\ ,\ \rangle$ est un espace de Hilbert.

[Ibid., V-§ 2.4.]