BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 16

Autour du spectre d'opérateurs bornés

Soit B un espace de Banach, et soit $A := \mathcal{B}(B)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires $B \to B$, muni de la norme opérateur $\|\cdot\|$.

Pour un élément $x \in A$, son *spectre* est défini comme $\mathrm{Sp}(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - x \text{ n'est pas inversible}\}$. Le complémentaire $\rho(x) := \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(x)$ est par ailleurs appelé *ensemble résolvant*, et pour $\lambda \in \rho(x)$ l'opérateur $(\lambda - x)^{-1} \in A$ est la *résolvante*.

1. Soit $x \in A$ avec $\|x\| < 1$. Montrer que $1 - x$ est inversible avec $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, et que

$$\|(1-x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|x\|}.$$

2. Soit $S \subset A$ le sous-ensemble des éléments inversibles.

(i) Montrer S est ouvert dans A, et que l'application $S \to S : x \mapsto x^{-1}$ est continue.
Hint : pour $x \in S$, on écrira un élément $y \in A$ comme $y = x(\mathrm{Id} - x^{-1}(x - y))$, et on utilisera le résultat de l'exercice précédent.

(ii) En utilisant le point (i), montrer que le spectre $\mathrm{Sp}(x)$ d'un élément $x \in A$ est un sous-ensemble fermé de $\overline{B}(0, \|x\|) \subset \mathbb{C}$.

3. Sur l'espace de Hilbert $H = \ell^2(\mathbb{N})$, déterminer le spectre de l'opérateur $S \in \mathcal{B}(H)$ défini par $(Sa)_n := a_{n+1}$. Même question sur $H = \ell^2(\mathbb{Z})$.
Hint : songer à utiliser d'abord le résultat de l'exercice 2(ii) ; et dans le cas de $\ell^2(\mathbb{Z})$ observer également l'inverse S^{-1}.

4. Le but de cet exercice est de montrer que $\mathrm{Sp}(x) \neq \varnothing$ pour tout $x \in A$.

(i) On note $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité, et $\mathrm{Hol}(B_1)$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur B_1. Pour $f \in \mathrm{Hol}(B_1)$, on note $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ sa série de Taylor. Pour $x \in A$, montrer que l'application

$$\phi_x : \mathrm{Hol}(B_1) \to A : f \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

est bien définie et est un homomorphisme d'algèbres.

(ii) Étant donné $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, une fonction $f : \Omega \to A$ est dite holomorphe si pour tout $z \in \Omega$ il existe un élément $f'(z) \in A$ tel que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \left\| \frac{1}{h}(f(z+h) - f(z)) - f'(z) \right\| = 0.$$

Pour $x \in A$, vérifier que l'application $f_x : \rho(x) \to A : z \mapsto (z-x)^{-1}$ est analytique, avec $f_x'(z) = -(z-x)^{-2}$.

(iii) Supposer par l'absurde que $x \in A$ satisfait $\mathrm{Sp}(x) = \varnothing$. Étant donné une fonctionnelle linéaire continue ζ sur A, vérifier que l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \zeta((z-x)^{-1})$ est analytique et tend vers 0 pour $|z| \to \infty$.

(iv) Obtenir une contradiction avec le théorème de Liouville.

5. Le rayon spectral d'un élément $x \in A$ est défini par

$$r(x) := \max\{|z| : z \in \mathrm{Sp}(x)\}.$$

L'exercice 2(ii) montre que $r(x) \leq \|x\|$. Le but de cet exercice est de prouver que

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

On procédera selon les étapes suivantes :

(i) Montrer que $z \in \mathrm{Sp}(x)$ implique $z^n \in \mathrm{Sp}(x^n)$.

(ii) Déduire que $r(x) \leq \inf_n \|x^n\|^{1/n}$.

(iii) Pour $r > \|x\|$, et pour une fonctionnelle linéaire continue ζ sur A, montrer pour tout $n \geq 0$ la formule de Cauchy

$$\zeta(x^n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} z^n \zeta((z-x)^{-1}) dz.$$

Hint : développer $(z-x)^{-1}$ en série comme à l'exercice 1.

(iv) Déduire *a posteriori* la même formule pour tout $r > r(x)$.

(v) Conclure que $r(x) \geq \lim_n \|x^n\|^{1/n}$.
Hint : appliquer l'inégalité triangulaire au résultat du point (iv).

6. Soit $B = H$ est un espace de Hilbert, et $A = \mathcal{B}(H)$.

(i) En utilisant la structure hilbertienne, montrer que $\|x^*x\| = \|x\|^2$ pour tout $x \in A$.

(ii) En combinant le point (i) et le résultat de l'exercice 5, déduire que $\|x^*x\| = r(x^*x)$ pour tout $x \in A$.