BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 17

Distributions

1. Montrer que les applications suivantes sont des distributions sur $\mathbb{R}$:

(i) l'application

$$T : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi^{(j)}(j) \ ;$$

(ii) la *valeur principale de Cauchy* de $\frac{1}{x}$, qui est définie par

$$\mathrm{vp}\,\tfrac{1}{x} : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \tfrac{\varphi(x)}{x}\, dx.$$

Sont-ce des distributions tempérées ? Par ailleurs, que vaut le produit $x\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$?

2. Déterminer la dérivée de la distribution sur $\mathbb{R}$ associée à

(i) la fonction $\ln|x|$ prolongée arbitrairement en $x = 0$;

(ii) la fonction caractéristique de $\mathbb{R}^+$, appelée *fonction de Heaviside* et notée H.

3. Montrer que si une distribution sur $\mathbb{R}$ possède une dérivée nulle, alors elle est (la distribution régulière associée à une) constante.

(i) Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que si $\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)dx = 0$, alors il existe une fonction $\phi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\phi_1' = \chi$, et réciproquement.

(ii) Soit $\phi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x)dx \neq 0$. Montrer que pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\phi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tels que $\phi = \lambda\phi_0 + \phi_1'$. Calculer λ.

(iii) Utiliser le point précédent pour obtenir la conclusion annoncée.

4. Déterminer toutes les distributions T sur $\mathbb{R}$ telles que

(i) $xT = 0$;

(ii) $xT = 1$.

5. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction C^∞ pour $x \neq 0$, telle que ses dérivées aient toutes une limite à gauche et une limite à droite quand $x \to 0$. Pour tout j, $u^{(j)}$ est donc une fonction localement intégrable, et on lui associe la distribution régulière $T_{u^{(j)}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ définie par $T_{u^{(j)}}\phi = \int_{\mathbb{R}} u^{(j)}(x)\phi(x)dx$. On pose $\sigma_j = u^{(j)}(0^+) - u^{(j)}(0^-)$. Montrer que

$$(T_u)^{(k)} = T_{u^{(k)}} + \sigma_0\delta^{(k-1)} + \ldots + \sigma_{k-1}\delta.$$

6. Soit P un polynôme $P(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^d$. Montrer que la distribution régulière associée à P appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, et calculer sa transformée de Fourier.

7. Montrer que $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$ est impaire, et calculer sa transformée de Fourier.

8. Montrer que l'opérateur des ondes $\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2$ vérifie $\Box T_E = \delta$, où T_E est la distribution régulière associée à la fonction

$$E(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } t^2 - x^2 > 0 \text{ et } t > 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$