

BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 18

Équations aux dérivées partielles

1. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + 3\partial_x u - \partial_y u = u + 1 \\ u(0, x, y) = 1, \end{cases}$$

où $(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

2. Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; 1 < |x| < 2\}$. Montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x_1 \partial_{x_2} u - x_2 \partial_{x_1} u = 1 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{si } x_1 > 0, x_2 = 0 \text{ et } (x_1, x_2) \in \Omega \end{cases}$$

ne possède pas de solution.

3. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + x \partial_x u = 0 & \text{si } (t, x) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0, x) = x & \text{si } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_x u + z^2 \partial_y u + \partial_z u = x & \text{si } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ u = 1 & \text{si } x + z = 0. \end{cases}$$